Die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen.

Von

Alexander Kurosch in Moskau.

Einleitung.

Im Gegensatz zu der Theorie der endlichen Gruppen, die sich als ein gut bearbeiteter und in vielen seiner Teile schon vollendeter Zweig der Mathematik darstellt, bilden die Arbeiten über unendliche Gruppen, genauer über Gruppen ohne Voraussetzung der endlichen Anzahl von Elementen, noch keine entsprechende „Theorie". Die Untersuchungen über unendliche Gruppen gehören gewöhnlich zu einer von zwei Richtungen, die miteinander keine Berührungspunkte haben. Man betrachtet erstens einige „fast endliche" Gruppen, d. h. Gruppen, in denen die Voraussetzung der endlichen Anzahl von Elementen durch eine andere, nicht so beschränkende Endlichkeitsvoraussetzung ersetzt worden ist; z. B. bei Abelschen Gruppen Voraussetzung einer endlichen Anzahl von Erzeugenden oder endlicher Ordnungen aller Elemente, bei nichtkommutativen Gruppen Vorhandensein einer Kompositionsreihe oder Endlichkeit der Untergruppenketten. Diese Richtung beschäftigt sich meistens mit direkten Summen- und Produktzerlegungen.

Die zweite Richtung, deren Bedeutung für die Topologie der Mannigfaltigkeiten und für die Theorie der automorphen Funktionen bekannt ist, beschäftigt sich mit Gruppen, die durch Erzeugende und definierende Relationen gegeben sind. Die Untersuchungen solcher Gruppen sind sehr schwierig, und hier betrachtete man bis jetzt entweder einfachste Klassen von Gruppen, z. B. Gruppen mit einer einzigen definierenden Relation, oder sogar einzelne Beispiele. Diese Richtung ist also noch sehr weit von jener Allgemeinheit entfernt, die für die heutige Algebra bezeichnend ist.

Es entsteht die Aufgabe, diesen Zweig der Gruppentheorie auf neuen Grundlagen, *ohne den Begriff der Erzeugenden*, aufzubauen. Diese Richtung soll der ersten entgegengesetzt sein und sozusagen „sehr unendliche" Gruppen untersuchen. Die Lösung dieser Aufgabe liegt noch weit im Felde; der erste Schritt ist aber schon getan, und das verdanken wir O. Schreier.

Schreier hat schon die lange bekannten *freien Gruppen*, d. h. Gruppen, die eine Menge von Erzeugenden *ohne* Relationen besitzen, betrachtet und auf eine sehr bemerkenswerte Weise bewiesen, daß jede Untergruppe einer freien Gruppe selbst frei ist[1]). In der Definition der freien Gruppe spielen noch die Erzeugenden eine Rolle, aber sie werden gänzlich eliminiert in dem von Schreier eingeführten Begriffe des *freien Produktes von Gruppen*; die Definition dieses Begriffes wird in § 1 der vorliegenden Arbeit gegeben. Er kann freilich auch mit Hilfe von Erzeugenden und definierenden Relationen definiert werden, und zwar so:

Eine Gruppe G ist in ein freies Produkt zerlegbar, wenn sie eine Menge von Erzeugenden besitzt, die so in paarweise elementenfremde Teilmengen zerlegt werden kann, daß jede definierende Relation nur zu derselben Teilmenge gehörende Erzeugende verbindet.

In einer früheren Arbeit[2]) hat der Verfasser die Probleme über Untergruppen freier Produkte (das *Untergruppenproblem*) und über Beziehungen zwischen verschiedenen Zerlegungen einer Gruppe in ein freies Produkt von unzerlegbaren Faktoren (das *Isomorphieproblem*) gestellt und sie in einigen Fällen unter sehr beschränkenden Voraussetzungen gelöst. Das erste Problem ist nämlich nur für freie Produkte von beliebigen zyklischen Gruppen gelöst worden, und diese Lösung hatte sich auf Schreiersche Sätze gestützt. Das zweite Problem war für freie Produkte von Abelschen Gruppen und von Gruppen ohne Elemente unendlicher Ordnung gelöst worden.

In der vorliegenden Arbeit wird das *Untergruppenproblem für jedes freie Produkt, ohne irgendwelche Voraussetzungen über die Struktur der Faktoren dieses Produktes, gelöst werden.* Die Schreierschen Untersuchungen werden dabei nicht benutzt, der Schreiersche Satz über Untergruppen freier Gruppen wird also von neuem bewiesen werden. Von der unter [2]) zitierten Arbeit sind diese Betrachtungen auch unabhängig. Mit Hilfe unseres Untergruppensatzes erhält auch das *Isomorphieproblem eine allgemeine Lösung* (§ 5).

Die Theorie der freien Produkte fordert noch viele weitere Betrachtungen. Außer vielen Problemen, die nicht sehr schwierig scheinen —

---

[1]) O. Schreier, Die Untergruppen der freien Gruppen, Hamb. Abhandl. 5 (1927), S. 161—183. Eine Vereinfachung bei W. Hurewicz. Zu einer Arbeit von O. Schreier, Hamb. Abhandl. 8 (1930), S. 307—314. Schon früher hatte J. Nielsen diesen Satz bei Voraussetzung einer endlichen Anzahl der Erzeugenden bewiesen. Später war die Theorie der freien Gruppen von F. Levi, Math. Zeitschr. 32, 37 fortgeführt worden.

[2]) A. Kurosch, Über freie Produkte von Gruppen, Math. Annalen 108 (1933), S. 26—36.

z. B. die Bestimmung der Automorphismengruppe eines freien Produktes, wenn die Automorphismengruppen der Faktoren als bekannt vorausgesetzt werden — entsteht noch ein sehr schweres und sehr wichtiges *Zerlegungsproblem*:

Ist jede in ein freies Produkt zerlegbare Gruppe als ein freies Produkt von *unzerlegbaren* Faktoren darstellbar? Ist besonders jede Gruppe, deren unzerlegbare Untergruppen alle unendliche zyklische Gruppen sind, eine freie Gruppe?

Weitere Untersuchungen werden sich wahrscheinlich einerseits auf freie Produkte mit einer vereinigten Untergruppe[3]) beziehen, andererseits sich mit unzerlegbaren Gruppen, die zerlegbare Untergruppen besitzen, beschäftigen.

§ 1.

Definitionen.

Es sei eine Menge von Gruppen H_α (α durchläuft eine beliebige Indexmenge) gegeben. Unter dem *freien Produkte* dieser Gruppen, *Komponenten* genannt, versteht man eine Gruppe G,

$$G = \prod_\alpha H_\alpha,$$

die aus allen formalen Produkten $h_1 h_2 \dots h_n$ besteht, wo jeder Faktor h_i ein von 1 verschiedenes Element aus einer Komponente H_{α_i} ist und wo je zwei benachbarte Faktoren h_i, h_{i+1} zu verschiedenen Komponenten gehören.

Ist $g = h_1 h_2 \dots h_n$, so nennen wir $h_1 h_2 \dots h_n$ die *unkürzbare Darstellung* für das Element g, die Anzahl der Faktoren n die *Länge* von g (in Zeichen: $n = l(g)$). Jedes Element von G hat eine einzige unkürzbare Darstellung durch Elemente von Komponenten H_α.

Um die unkürzbare Darstellung für das Produkt von zwei Elementen $g = h_1 h_2 \dots h_n$, $g' = h_1' h_2' \dots h_m'$ in gegebener Reihenfolge zu bilden, schreiben wir die unkürzbaren Darstellungen dieser Elemente nacheinander,

$$g g' = h_1 h_2 \dots h_n h_1' h_2' \dots h_m'.$$

Ist $h_1' = h_n^{-1}$, $h_2' = h_{n-1}^{-1}, \dots, h_k' = h_{n-k+1}^{-1}$, aber $h_{k+1}' \neq h_{n-k}^{-1}$ $(0 \leqq k \leqq \min(n, m))$, so werden k *Kürzungen* der Reihe nach vollzogen. Gehören h_{n-k} und h_{k+1}' zu verschiedenen Komponenten, so ist schon die unkürzbare Darstellung für das Produkt $g g'$ erhalten; im entgegengesetzten Falle bildet das Produkt $h_{n-k} h_{k+1}'$ ein von 1 verschiedenes Element aus einer Komponente, also soll eine *Vereinigung* ausgeführt

[3]) Vgl. Schreier, l. c. [1]).

werden. Es ist leicht zu zeigen, daß diese Definition der Gruppenmultiplikation assoziativ ist[4]).

Das Einselement 1 der Gruppe G ist ein Element, dessen unkürzbare Darstellung leer ist, d. h. keine Faktoren h_i enthält; $l(1) = 0$. Ist $g = h_1 h_2 \dots h_n$, so wird $g^{-1} = h_n^{-1} \dots h_2^{-1} h_1^{-1}$ sein.

Hat das Element g von G eine gerade Länge, $l(g) = 2k$, also

$$g = h_{-k} \dots h_{-1} h_1 \dots h_k,$$

so heißt $h_{-k} \dots h_{-1}$ die *erste Hälfte* von g, $h_1 \dots h_k$ die *zweite Hälfte*. Hat das Element g eine ungerade Länge, $l(g) = 2k + 1$, also

$$g = h_{-k} \dots h_{-1} h_0 h_1 \dots h_k,$$

so heißt $h_{-k} \dots h_{-1}$ die *erste Hälfte*, $h_1 \dots h_k$ die *zweite Hälfte*, h_0 der *Zentralfaktor* von g. Es ist klar, daß die erste Hälfte von g^{-1} zu der zweiten Hälfte von g und die zweite Hälfte von g^{-1} zu der ersten Hälfte von g invers sind.

Ein Element $g = h_{-k} \dots h_{-1} h_0 h_1 \dots h_k$ ungerader Länge soll eine *Transformation* heißen, wenn seine erste und zweite Hälfte zueinander invers sind, $h_{-i} = h_i^{-1}$ $(i = 1, 2, \dots, k)$, d. h. wenn g zu seinem Zentralfaktor h_0 konjugiert ist. Ist g eine Transformation, so wird

$$g^n = h_k^{-1} \dots h_1^{-1} h_0^n h_1 \dots h_k$$

sein und daher sind g und h_0 von gleicher Ordnung. Ist aber g keine Transformation, so ist die von g erzeugte zyklische Untergruppe gewiß unendlich.

Aus der Definition des freien Produktes folgt sofort:

Ist $G = \prod_\alpha H_\alpha$, so gibt es in G keine nichtidentischen Relationen, welche Elemente von verschiedenen Komponenten H_α verbinden.

Ist $G = \prod_\alpha H_\alpha$ und ist jede Komponente H_α selbst ein freies Produkt von Komponenten $H_{\alpha\beta}$, $H_\alpha = \prod_\beta H_{\alpha\beta}$, so gilt

$$G = \prod_{\alpha, \beta} H_{\alpha\beta}.$$

Eine Gruppe G heißt *zerlegbar*, wenn sie als ein freies Produkt von echten Untergruppen dargestellt werden kann, anderenfalls *unzerlegbar*.

In der vorliegenden Arbeit wird man folgende Bezeichnungen brauchen: $g \in G$, wenn g ein Element der Gruppe G ist; $F \subset G$, wenn F eine Untergruppe von G ist; $F = F_1 \cap F_2$, wenn die Untergruppe F der Durchschnitt der Untergruppen F_1 und F_2 ist.

---

[4]) Vgl. z. B. Schreier, l. c. [1]).

§ 2.

Untergruppensatz. Die Konstruktion der Untergruppen Φ_ν und K_ν.

Ist eine Gruppe G das freie Produkt ihrer Untergruppen H_α, $G = \prod_\alpha H_\alpha$, so enthält G gewiß, außer Untergruppen von Komponenten H_α und ihren konjugierten Untergruppen, auch unendliche zyklische Untergruppen. Wir wollen zeigen, daß diese Untergruppen und ihre freien Produkte alle Untergruppen von G erschöpfen, und zwar:

Untergruppensatz. *Jede Untergruppe F von G kann selbst in ein freies Produkt zerlegt werden,*

$$F = \prod_\beta F_\beta\text{[5]},$$

wo jeder Faktor F_β entweder eine unendliche zyklische Gruppe oder mit einer Untergruppe von einer Komponente H_α konjugiert ist.

Es sei F eine beliebige Untergruppe von G. Wir definieren die Untergruppen Φ_μ von F (μ eine Ordnungszahl) folgendermaßen:

$$\Phi_0 = 1.$$

Sind Untergruppen Φ_μ von F für alle $\mu < \nu$ schon gewählt und ist K_ν die von diesen Φ_μ erzeugte Untergruppe von F, d. h. die minimale Untergruppe von F, die alle Φ_μ enthält, so betrachten wir solche zu K_ν nicht gehörende Elemente von F, die eine minimale Länge haben; diese Länge bezeichnen wir mit l_ν. Wenn es Transformationen unter diesen Elementen gibt, so sei $g_\nu^{-1} h g_\nu$ (mit $h \varepsilon H_{\alpha_\nu}$) eine solche. Wir bezeichnen dann mit H_ν^* den Durchschnitt der Untergruppen F und $g_\nu^{-1} H_{\alpha_\nu} g_\nu$,

$$H_\nu^* = F \cap g_\nu^{-1} H_{\alpha_\nu} g_\nu\,.$$

Diese Untergruppe ist zu einer Untergruppe der Komponente H_{α_ν} konjugiert[6]). Gibt es aber in der Menge $F - K_\nu$ keine Transformationen von der Länge l_ν (z. B. bei geradem l_ν), so setzen wir $H_\nu^* = 1$.

Wenn es in F, aber außerhalb der von K_ν und H_ν^* erzeugten Untergruppe, Elemente der Länge l_ν gibt, deren zweite Hälfte g_ν ist und deren Zentralfaktoren zur Komponente H_{α_ν} gehören, so bezeichnen wir mit $f_{\nu 1}$ eins von diesen Elementen. Wenn $H_\nu^* = 1$ ist, so ist $f_{\nu 1}$ ein willkürlich gewähltes Element der Länge l_ν aus der Menge $F - K_\nu$; seine zweite Hälfte bezeichnen wir mit g_ν, die Komponente, in der sein Zentralfaktor (bei ungeradem l_ν) aufgeht, mit H_{α_ν}.

---

[5]) Dieses Produkt kann eventuell nur aus einem Faktor bestehen.

[6]) Wir behaupten noch nicht, daß der Durchschnitt der Untergruppen K_ν und H_ν^* nur aus einem einzigen Einselement besteht. Das wird erst in § 4 bewiesen werden.

Es seien die Elemente $f_{\nu\delta}$ für jede Ordnungszahl $\delta < \sigma$ schon ausgewählt. Wir wählen dann ein Element von F der Länge l_ν, das außerhalb der von K_ν, H_ν^* und allen $f_{\nu\delta}$ erzeugten Untergruppe liegt, dessen zweite Hälfte g_ν ist und dessen Zentralfaktor zur Komponente H_{α_ν} gehört; dieses Element bezeichnen wir mit $f_{\nu\sigma}$. Dieser Auswahlprozeß wird sein Ende bei einer Ordnungszahl σ_ν erreichen. *Mit Φ_ν bezeichnen wir jetzt die von H_ν^* und allen $f_{\nu\delta}$ $(\delta < \sigma_\nu)$ erzeugte Untergruppe von F.* Außer der von K_ν und Φ_ν erzeugten Untergruppe gibt es in F keine Elemente mehr von der Länge l_ν mit der zweiten Hälfte g_ν und mit dem Zentralfaktor aus der Komponente H_{α_ν}.

Für eine Ordnungszahl $\varkappa$ wird die Gleichheit

$$K_\varkappa = F$$

erreicht werden; dabei werden die Untergruppen Φ_ν für alle $\nu < \varkappa$ aufgebaut werden.

Unser Zweck ist, zu zeigen, daß die Untergruppe F das freie Produkt der Untergruppen Φ_ν, und jedes Φ_ν das freie Produkt von H_ν^* und zyklischen Untergruppen $\{f_{\nu\delta}\}$ ist.

Unter den *Erzeugenden* der Untergruppe Φ_μ werden wir die Elemente $f_{\mu\delta}$ $(\delta < \sigma_\mu)$, ihre Inversen $f_{\mu\delta}^{-1}$ und *alle* von 1 verschiedenen Elemente der Untergruppe H_μ^* verstehen. Die Erzeugenden aller Untergruppen Φ_μ $(\mu < \nu)$ sind Erzeugende für K_ν.

Es sei U entweder eine von den Untergruppen Φ_μ oder eine von den Untergruppen K_ν. Ihre Erzeugenden sollen durch den Buchstaben a mit unteren Indizes bezeichnet werden.

Das Produkt $a_1 a_2 \ldots a_k$ heißt ein *Wort* in U, wenn keine zwei benachbarten Faktoren a_i, a_{i+1} zueinander invers sind oder zu derselben Untergruppe H_μ^* gehören. Das Wort $a_1 a_2 \ldots a_k$ heißt *Primwort*, wenn die Länge seiner unkürzbaren Darstellung gleich der maximalen Länge seiner Faktoren a_i ist,

$$l(a_1 a_2 \ldots a_k) = \max l(a_i)\ ^{7)}.$$

Primworte in U sollen durch den Buchstaben a mit oberen Indizes bezeichnet werden. Unter dem Zentralfaktor eines Primwortes a' und seinen ersten und zweiten Hälften werden wir den Zentralfaktor usw. seiner unkürzbaren Darstellung verstehen.

Die Kürzungen in dem Produkte $a' a''$ zweier Primworte a', a'' von U können mehr oder weniger weit gehen. Wir werden daher drei Arten der *Nachbarschaft* zwischen a' und a'' (in dieser Reihenfolge) unterscheiden:

---

7) Ist $U = \Phi_\mu$, so haben natürlich alle Erzeugenden a_i dieselbe Länge.

Nachbarschaft erster Art, wenn $l(a' a'') > \max(l(a'), l(a''))$ ist,
Nachbarschaft zweiter Art, wenn $l(a' a'') = \max(l(a'), l(a''))$ ist,
Nachbarschaft dritter Art, wenn $l(a' a'') < \max(l(a'), l(a''))$ ist.

Ist z. B. $l(a') \leqq l(a'')$, so drückt die Nachbarschaft zweiter Art folgendes aus: Bei geradem $l(a')$ vernichten Kürzungen die ganze zweite Hälfte von a', aber Kürzungen und Vereinigungen lassen die erste Häfte von a' invariant; bei ungeradem $l(a')$ wird der Zentralfaktor von a' sich mit einem Faktor von a'' vereinigen. Dementsprechend wird es bei Nachbarschaften erster und dritter Art sein.

§ 3.

Die Struktur der Untergruppen Φ_ν.

Die Konstruktion der Untergruppen Φ_ν und K_ν führt uns zu folgenden Hilfssätzen, von denen der zweite erst im § 5 benutzt wird.

Hilfssatz 1. *Je zwei Elemente $f_{\nu\sigma_1}$ und $f_{\nu\sigma_2}$ $(\sigma_1 < \sigma_2)$ haben verschiedene erste Hälften.*

Dies ist klar bei gerader Länge l_ν, da die zweiten Hälften dieser beiden Elemente gleich g_ν sind; wenn $f_{\nu\sigma_1}$ und $f_{\nu\sigma_2}$ zusammenfallende erste Hälften hätten, so würde $f_{\nu\sigma_1} = f_{\nu\sigma_2}$ sein.

Es sei l_ν ungerade. Haben $f_{\nu\sigma_1}$ und $f_{\nu\sigma_2}$ gleiche erste Hälften, so werden die Kürzungen in dem Produkte

$$f = f_{\nu\sigma_1}^{-1} f_{\nu\sigma_2}$$

die Zentralfaktoren, die zur nämlichen Komponente H_{α_ν} gehören, erreichen. Da die erste Hälfte von $f_{\nu\sigma_1}^{-1}$ gleich g_ν^{-1} ist, so wäre bei der Kürzung der Zentralfaktoren $f = 1$ und mithin $f_{\nu\sigma_1} = f_{\nu\sigma_2}$. Wenn aber die Zentralfaktoren nur vereinigt werden, so wird f eine Transformation, also ein Element der Untergruppe H_ν^*. Das Element $f_{\nu\sigma_2}$ wird daher in der von H_ν^* und $f_{\nu\sigma_1}$ erzeugten Untergruppe liegen, entgegen der Konstruktion der Untergruppe Φ_ν.

Hilfssatz 2. *Jedes solche Element f von F, dessen erste Hälfte der ersten Hälfte eines Elementes $f_{\mu\sigma}$ gleich ist und dessen Zentralfaktor (bei ungeradem l_μ) zur Komponente H_{α_μ} gehört, ist selbst in der Untergruppe $K_{\mu+1}$ (und daher in jeder K_ν bei $\nu > \mu$) enthalten.*

In dem Produkte $f^{-1} f_{\mu\sigma}$ erreichen die Kürzungen die Zentralfaktoren, also muß $l(f^{-1} f_{\mu\sigma}) \leqq l_\mu$ sein. Ist

$$l(f^{-1} f_{\mu\sigma}) < l_\mu,$$

so wird $f^{-1} f_{\mu\sigma} \varepsilon K_\mu$, da l_μ die minimale Länge der außerhalb K_μ liegenden Elemente ist; daher wird $f^{-1} f_{\mu\sigma} \varepsilon K_{\mu+1}$, und da $f_{\mu\sigma} \varepsilon K_{\mu+1}$, so folgt $f \varepsilon K_{\mu+1}$. Ist aber

$$l(f^{-1} f_{\mu\sigma}) = l_\mu,$$

so wird die zweite Hälfte des Elementes $f^{-1} f_{\mu\sigma}$ gleich g_μ sein und der Zentralfaktor dieses Elementes zur Komponente H_{α_μ} gehören; daraus folgt $f^{-1} f_{\mu\sigma} \varepsilon K_{\mu+1}$ und dann wieder $f \varepsilon K_{\mu+1}$. Der Hilfssatz ist damit bewiesen.

Wir werden jetzt eine beliebige Untergruppe Φ_ν betrachten; ihre Erzeugenden wollen wir nun mit b_i, ihre Primworte mit $b^{(j)}$ bezeichnen.

Jedes aus einem einzigen Faktor bestehende Wort b_1 ist ein Primwort. Ein Wort $b_1 b_2$, wo die zweite Hälfte von b_1 gleich g_ν, die erste Hälfte von b_2 gleich g_ν^{-1} ist, ist auch ein Primwort; in der Tat, bei $l(b_1 b_2) < l_\nu$ wird das Element $b_1 b_2$ in der Untergruppe K_ν aufgehen, also muß eines der Elemente b_1, b_2 zu der von K_ν und dem zweiten Elemente erzeugten Untergruppe gehören, was unmöglich ist. Endlich ist ein Wort $b_1 b_2 b_3$, wo $b_2 \varepsilon H_\nu^*$, b_1 ein Element $f_{\nu\sigma_1}$, b_3 ein $f_{\nu\sigma_2}^{-1}$ ist, auch ein Primwort (sowohl bei $\sigma_1 \neq \sigma_2$ als auch bei $\sigma_1 = \sigma_2$).

Es gibt in Φ_ν keine anderen Primworte. Diese Behauptung folgt nämlich aus dem folgenden Satz, der die Struktur der Untergruppe Φ_ν völlig charakterisiert:

Ist $f = b_1 b_2 \ldots b_n$ ein beliebiges Wort von Φ_ν, so kann man die Faktoren dieses Wortes so vereinigen,

$$f = (b_1 \ldots b_{i_1})(b_{i_1+1} \ldots b_{i_2}) \ldots (b_{i_{k-1}+1} \ldots b_n),$$

daß jedes Wort $b_{i_{s-1}+1} \ldots b_{i_s}$ ein Primwort $b^{(s)}$ von obenerwähnter Art sein wird, also

$$f = b' b'' \ldots b^{(k)}$$

gilt, und zwischen je zwei benachbarten Primworten $b^{(s)}$, $b^{(s+1)}$ Nachbarschaft erster Art vorhanden ist.

Der Satz ist richtig bei $n = 1$. Ist er schon für $n - 1$ bewiesen, so gilt

$$b_1 b_2 \ldots b_{n-1} = b' b'' \ldots b^{(s)};$$

die zweite Hälfte von $b^{(s)}$ ist dieselbe, wie die von b_{n-1}. Ist diese Hälfte gleich g_ν, besteht also $b^{(s)}$ aus einem oder zwei Faktoren, und hat b_n die erste Hälfte g_ν^{-1}, so bildet das Produkt $b^{(s)} b_n$ ein Primwort. In allen anderen Fällen wird nach Hilfssatz 1 zwischen $b^{(s)}$ und b_n Nachbarschaft erster Art sein, also bildet b_n allein ein neues Primwort $b^{(s+1)}$.

Aus diesem Satze folgt, daß aus jedem Worte von Φ_ν nach Ausführung aller Kürzungen gewiß eine vom Einselement verschiedene unkürzbare Darstellung bleibt. Hieraus erhalten wir sogleich:

Die Untergruppe Φ_ν ist das freie Produkt der Untergruppe H_ν^* und der von den Elementen $f_{\nu\sigma}$ erzeugten unendlichen zyklischen Untergruppen.

§ 4.

Die Struktur der Untergruppen K_ν.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung einer Untergruppe K_ν; ihre Erzeugenden bezeichnen wir mit a_i, ihre Primworte mit $a^{(j)}$. Wir nehmen an, daß in der Untergruppe K_ν folgende Induktionsvoraussetzung (A) erfüllt ist, deren Richtigkeit für $K_1 = 1$ trivial ist und für $K_2 = \Phi_1$ schon im vorhergehenden Paragraphen bewiesen worden ist:

(A) *Ist $a_1 a_2 \ldots a_n$ ein beliebiges Wort von K_ν, so kann man die Faktoren dieses Wortes mindestens auf eine Weise so vereinigen,*

$$a_1 a_2 \ldots a_n = (a_1 \ldots a_{i_1})(a_{i_1+1} \ldots a_{i_2}) \ldots (a_{i_{k-1}+1} \ldots a_n),$$

daß jedes Wort $a_{i_{s-1}+1} \ldots a_{i_s}$ ein Primwort $a^{(s)}$ wird, also

$$a_1 a_2 \ldots a_n = a' a'' \ldots a^{(k)}$$

gilt, und zwischen je zwei benachbarten Primworten $a^{(s)}$, $a^{(s+1)}$ Nachbarschaft erster Art vorhanden ist.

Aus dieser Voraussetzung folgt sogleich

Hilfssatz 3. *Die Länge jedes Wortes $a_1 a_2 \ldots a_n$, das kein Primwort ist, ist größer als die Länge jedes seiner Faktoren a_i,*

$$l(a_1 a_2 \ldots a_n) > \max l(a_i).$$

Kein Wort in der Untergruppe K_ν kann daher dem Einselement gleich sein; denn sonst erhielte man eine nichtidentische Relation in G. Daraus folgt unmittelbar:

Die Untergruppe K_ν ist das freie Produkt aller vom Einselement verschiedenen Untergruppen H_μ^* $(\mu < \nu)$ und aller von den Elementen $f_{\mu\sigma}$ $(\mu < \nu,\ \sigma < \sigma_\mu)$ erzeugten unendlichen zyklischen Untergruppen.

Um die Voraussetzung (A) für die Untergruppe $K_{\nu+1}$ zu beweisen, müssen wir zunächst zeigen, daß der Durchschnitt der Untergruppen K_ν und H_ν^* nur das Einselement enthält. Zu diesem Zwecke werden wir folgende Hilfssätze beweisen, in denen die Rede von Worten der Untergruppe K_ν sein wird.

Hilfssatz 4. *Ist das Wort $a_1 a_2 \ldots a_k$ ein Primwort, so ist auch jeder seiner Abschnitte $a_1 a_2 \ldots a_s$, $s \leqq k$ (und jeder Abschnitt $a_t \ldots a_k$, $t \geqq 1$) ein Primwort.*

Es sei der Abschnitt $a_1 \dots a_s$, $s < k$, kein Primwort, aber $a_1 \dots a_s a_{s+1}$ Primwort. Nach (A) gilt

$$a_1 \dots a_s = a' \dots a^{(r)}, \quad r > 1,$$

also, nach Hilfssatz 3,

$$l(a_1 \dots a_s) > \max l(a^{(j)}), \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Gäbe es im Worte

$$a_1 \dots a_s a_{s+1} = a' \dots a^{(r)} a_{s+1}$$

zwischen den Primworten $a^{(r)}$, a_{s+1} eine Nachbarschaft erster oder zweiter Art, so wäre die Länge des Wortes $a_1 \dots a_s a_{s+1}$ größer als die Länge jedes seiner Faktoren, was für ein Primwort unmöglich ist. Gäbe es aber zwischen $a^{(r)}$ und a_{s+1} eine Nachbarschaft dritter Art, so würde das Produkt $a^{(r)} a_{s+1}$, das ein Wort ist, eine kleinere Länge als einer von seinen Faktoren haben, entgegen dem Hilfssatze 3.

Hilfssatz 5. *Es sei $a_1 \dots a_k$ ein Primwort. In seiner unkürzbaren Darstellung bleiben die erste Hälfte von a_1 und die zweite Hälfte von a_k invariant, und ihre Zentralfaktoren (wenn sie vorhanden sind) können nur durch andere vom Einselement verschiedene Elemente aus denselben Komponenten ersetzt werden.*

Dies ist klar bei $k = 1$. Ist diese Behauptung schon für das Wort $a_1 \dots a_{k-1}$, das, nach Hilfssatz 4, ein Primwort ist, bewiesen, so folgt ihre Richtigkeit für $a_1 \dots a_{k-1} a_k$ aus der Bemerkung, daß zwischen den Primworten $a_1 \dots a_{k-1}$ und a_k gewiß Nachbarschaft zweiter Art vorhanden sein muß.

Hilfssatz 6. *Jedes Wort f von K_ν, dessen unkürzbare Darstellung eine Transformation ist, hat die Gestalt*

$$f = a_n^{-1} \dots a_1^{-1} a_0 a_1 \dots a_n;$$

hier ist a_0 eine Transformation, also gehört es zu einer Untergruppe H_μ^* ($\mu < \nu$).

Es sei $f = a_1 a_2 \dots a_k$. Wäre $a_1 = a_k^{-1}$, so könnten wir die Transformation

$$a_1^{-1} f a_1 = a_2 \dots a_{k-1}$$

betrachten. Gehören a_1 und a_k zu derselben Untergruppe H_μ^*, so könnten wir zur Transformation

$$a_1^{-1} f a_1 = a_2 \dots a_{k-1} (a_k a_1)$$

übergehen. Wir nehmen daher an, daß a_1 und a_k keine inversen Elemente zueinander sind und nicht zu derselben Untergruppe H_μ^* gehören. Unter diesen Voraussetzungen wollen wir zeigen, daß $k = 1$ ist, d. h. f nur aus einem einzigen Faktor besteht.

Es sei umgekehrt $k > 1$. Ist f kein Primwort, so kann man es, nach (A), als Produkt von Primworten darstellen,

$$f = a' a'' \dots a^{(r-1)} a^{(r)};$$

zwischen a' und a'' (und zwischen $a^{(r-1)}$ und $a^{(r)}$) ist die Nachbarschaft erster Art. Da die erste Hälfte der unkürzbaren Darstellung von f zu ihrer zweiten Hälfte invers ist, muß in dem Produkte $a^{(r)} a'$ zwischen den Faktoren Nachbarschaft dritter Art existieren, was aber unmöglich ist, da $a^{(r)} a'$ zufolge der über f gemachten Voraussetzungen ein Wort ist.

Es sei nun f ein Primwort. Es gibt ein solches a_i, daß $l(f) = l(a_i)$ gilt; wir können annehmen, daß a_i entweder ein Element aus einer Untergruppe H_μ^* oder eines der Elemente $f_{\mu\sigma}$ $(\mu < \nu)$ ist, denn wäre es ein Element $f_{\mu\sigma}^{-1}$, so würden wir die Transformation f^{-1} betrachten. Ist $i < k$, so werden wir die Transformation

$$a_{i+1} \dots a_k f a_k^{-1} \dots a_{i+1} = a_{i+1} \dots a_k a_1 \dots a_i$$

betrachten; wäre dieses Wort kein Primwort, so würden die vorangehenden Betrachtungen anwendbar sein; ist es aber ein Primwort, so hat sein letztes Element eine maximale Länge. Wir nehmen daher an, daß $i = k$ ist, also $l(f) = l(a_k)$ gilt. Die Länge von a_k ist dabei gewiß ungerade.

Gehört a_k zur Untergruppe Φ_μ, so ist seine zweite Hälfte gleich g_μ und sein Zentralfaktor gehört zur Komponente H_{α_μ}. Dann wird, nach Hilfssatz 5, die zweite Hälfte von f auch gleich g_μ sein und der Zentralfaktor von f zu H_{α_μ} gehören; da f eine Transformation ist, so wird die erste Hälfte von f gleich g_μ^{-1} sein. Ist die in Φ_μ aufgehende Untergruppe H_μ^* vom Einselement verschieden, so gehört f, wie wir sehen, zu dieser Untergruppe, so daß

$$f = a_0 \,\varepsilon\, H_\mu^*$$

ist. Aber daraus folgt

$$a_1 \dots a_k a_0^{-1} = 1,$$

was bei $k > 1$ gewiß unmöglich ist. Ist aber $H_\mu^* = 1$, so geht das Wort f in einer Untergruppe K_λ mit $\lambda < \mu$ auf, läßt sich also durch Erzeugende dieser Untergruppe darstellen,

$$f = a_1' a_2' \dots a_m'.$$

Es gilt aber jetzt

$$a_1 \dots a_k a_m'^{-1} \dots a_1'^{-1} = 1,$$

was auch unmöglich ist, da links ein Wort steht.

Hilfssatz 7. *Enthält die Untergruppe K_ν eine Transformation $f = g^{-1} h g$ mit $h \varepsilon H_\alpha$, so enthält sie auch den ganzen Durchschnitt der Untergruppen $g^{-1} H_\alpha g$ und F,*

$$K_\nu \supset g^{-1} H_\alpha g \cap F.$$

Nach Hilfssatz 6 gilt nämlich

$$f = a_n^{-1} \ldots a_1^{-1} a_0 a_1 \ldots a_n \quad \text{mit} \quad a_0 \varepsilon H_\mu^*, \qquad \mu < \nu.$$

Enthält die Untergruppe F noch eine Transformation $f' = g^{-1} h g$ mit $h' \varepsilon H_\alpha$, so muß das Element $a_1 \ldots a_n f' a_n^{-1} \ldots a_1^{-1}$ zur Untergruppe H_μ^* gehören, also in der Untergruppe K_ν aufgehen. Daher gilt $f' \varepsilon K_\nu$.

Hieraus folgt, da die Untergruppe H_ν^* mindestens ein nicht in K_ν aufgehendes Element enthält, daß *der Durchschnitt der Untergruppen K_ν und H_μ^* nur aus dem Einselement besteht, also keine Erzeugende b_i der Untergruppe Φ_ν in K_ν aufgeht.*

§ 5.

Beweis des Untergruppensatzes. Isomorphiesatz.

Wir sind jetzt in der Lage, die Voraussetzung (A) für die Untergruppe $K_{\nu+1}$ zu beweisen; $K_{\nu+1}$ ist die von K_ν und Φ_ν erzeugte Untergruppe, also bilden die Erzeugenden von K_ν und Φ_ν in ihrer Gesamtheit Erzeugende von $K_{\nu+1}$. Wir schicken dazu drei Hilfssätze über Nachbarschaften zwischen Primworten von K_ν und Φ_ν voraus; wie früher bedeutet a' ein beliebiges Primwort von K_ν, b' ein Primwort von Φ_ν.

Hilfssatz 8. *Ist $l(a') < l(b')$, so ist zwischen a' und b' Nachbarschaft dritter Art unmöglich.*

In der Tat, ist $b' = b_1 \ldots b_k$, so wäre bei der Nachbarschaft dritter Art

$$l(a' b_1) < l(b_1),$$

also $a' b_1 \varepsilon K_\nu$ und daher $b_1 \varepsilon K_\nu$, entgegen dem § 4.

Hilfssatz 9. *Ist $l(a') = l(b')$, so kann zwischen a' und b' nur Nachbarschaft erster Art vorhanden sein.*

Es seien

$$a' = a_1 a_2 \ldots a_s, \quad b' = b_1 b_2 \ldots b_t$$

und

$$l(a') = l(a_j), \quad \text{aber} \quad l(a') > l(a_i) \quad \text{bei} \quad i > j.$$

Gibt es zwischen a' und b' Nachbarschaft zweiter oder dritter Art, so wird zwischen a' und b_1 auch Nachbarschaft zweiter oder sogar dritter Art vorhanden sein. Das Wort $a_{j+1} \ldots a_s$ ist, nach Hilfssatz 4, ein Primwort, und es ist

$$l(a_{j+1} \ldots a_s) < l(a').$$

Es gibt zwischen den Primworten $a_1 \ldots a_j$ und $a_{j+1} \ldots a_s$ Nachbarschaft zweiter Art, also muß zwischen $a_{j+1} \ldots a_s$ und b_1 auch Nachbarschaft zweiter Art vorhanden sein (die Nachbarschaft dritter Art ist nach Hilfssatz 8 ausgeschlossen). Daraus folgt

$$l(a_{j+1} \dots a_s b_1) = l(b_1).$$

Da zwischen $a_1 \dots a_j$ und $a_{j+1} \dots a_s b_1$ die Nachbarschaft zweiter Art ist, so sind die zweite Hälfte von a_j und die erste Hälfte von $a_{j+1} \dots a_s b_1$ zueinander invers und ihre Zentralfaktoren gehören, bei ungerader Länge, zu derselben Komponente. Daraus folgt aber, entweder nach der Konstruktion der Untergruppen Φ_u oder nach Hilfssatz 2 (letzteres bei $a_j = f_{\mu\sigma}^{-1}$):

$$a_{j+1} \dots a_s b_1 \varepsilon K_\nu, \quad \text{also} \quad b_1 \varepsilon K_\nu.$$

Hilfssatz 10. *Sind zwischen b' und a' und zwischen a' und b'' die Nachbarschaften zweiter Art (also $l(a') < l_1$), so kann zwischen $b'a'$ und b'' nur Nachbarschaft erster Art sein.*

Es seien

$$b' = b_{11} b_{12} \dots b_{1s}, \quad b'' = b_{21} b_{22} \dots b_{2t}.$$

Wäre zwischen $b'a'$ und b'' die Nachbarschaft zweiter oder dritter Art, so müßte zwischen $b_{1s}a'$ und b_{21} (und zwischen b_{1s} und $a'b_{21}$) auch Nachbarschaft zweiter oder sogar dritter Art vorhanden sein.

Dieses ist unmöglich bei der Voraussetzung, daß die zweite Hälfte von b_{1s} gleich g_ν und die erste Hälfte von b_{21} gleich g_ν^{-1} ist; denn die Kürzungen könnten dann nicht das ganze Wort a' vernichten.

Es sei jetzt die erste Hälfte von b_{21} gleich g_ν^{-1}, aber die zweite Hälfte von b_{1s} von g_ν verschieden; dann ist gewiß die erste Hälfte von b_{1s} gleich g_ν^{-1}. Da zwischen $b_{1s}a'$ und b_{21} Nachbarschaft zweiter oder dritter Art vorausgesetzt war, so muß die zweite Hälfte von $b_{1s}a'$ gleich g_ν sein. Daraus folgt aber

$$b_{1s} a' \varepsilon H_\nu^*,$$

also geht b_{1s} selbst in der von K_ν und H_ν^* erzeugten Untergruppe auf, was unmöglich ist. Genau so wird es auch bei der Voraussetzung gehen, daß die zweite Hälfte von b_{1s} gleich g_ν, aber die erste Hälfte von b_{21} von g_ν^{-1} verschieden ist.

Es seien endlich die zweite Hälfte von b_{1s} von g_ν und die erste Hälfte von b_{21} von g_ν^{-1} verschieden. Bei unseren Voraussetzungen über die Nachbarschaft zwischen $b_{1s}a'$ und b_{21} wird das Produkt $b_{1s}a'b_{21}$ entweder eine in H_ν^* enthaltene Transformation oder gleich 1 sein. Da b_{1s} von b_{21} und von b_{21}^{-1} gewiß verschieden ist (die Kürzungen sollen das ganze a' vernichten), so kommen wir in beiden Fällen zum Widerspruch: war das Element b_{21} später als b_{1s} gewählt, so wird es in der von K_ν, H_ν^* und b_{1s} erzeugten Untergruppe aufgehen. Der Hilfssatz 10 ist bewiesen.

Wir befinden uns jetzt in der Lage, die Induktionsvoraussetzung (A) für die Untergruppe $K_{\nu+1}$ zu beweisen. Jedes Wort von $K_{\nu+1}$ läßt sich nämlich, bei geeigneter Gruppierung seiner Faktoren, als Produkt von Worten und daher von Primworten von K_ν und Φ_ν darstellen. Die Hilfssätze 8, 9, 10 zeigen uns, wann zwei nebeneinanderstehende Primworte von K_ν und von Φ_ν zu einem Primworte vereinigt werden können; in dem Falle, der im Hilfssatze 10 betrachtet worden war, soll das Primwort a' entweder mit b' oder mit b'' vereinigt werden. Jedes Wort von $K_{\nu+1}$ ist also als Produkt von Primworten der Gestalt a', b', $a'b'$, $b'a'$ und $a'b'a''$, zwischen denen Nachbarschaften erster Art vorhanden sind, darstellbar.

Die Voraussetzung (A) ist für die Untergruppe $K_{\nu+1}$ bewiesen. Ihre Erfüllung für die Untergruppe K_λ mit einer Limeszahl λ folgt daraus, daß jedes Wort von K_λ schon in einer Untergruppe K_μ mit $\mu < \lambda$ aufgeht. (A) gilt daher in allen Untergruppen K_ν, also in der Untergruppe F selbst, und das beweist den Untergruppensatz.

Zusatz. *Jede unzerlegbare Untergruppe eines freien Produktes* $G = \prod\limits_\alpha H_\alpha$ *ist entweder eine unendliche zyklische Gruppe oder mit einer Untergruppe von einer Komponente* H_α *konjugiert.*

Daraus folgt ohne besondere Schwierigkeiten der

Isomorphiesatz. *Ist eine Gruppe G auf zwei Arten als freies Produkt von unzerlegbaren Komponenten dargestellt,*

$$G = \prod_\alpha H_\alpha = \prod_\beta F_\beta,$$

so lassen sich die Komponenten dieser beiden Zerlegungen so einander eineindeutig zuordnen, daß entsprechende Gruppen isomorph sind. Sind diese entsprechenden Faktoren keine unendlichen zyklischen Gruppen, so sind sie sogar in G konjugiert.

Der Beweis bleibt wörtlich derselbe, wie für den Satz 3 der unter [2]) zitierten Arbeit des Verfassers. Um das Lesen dieses Beweises zu erleichtern, wollen wir nur einige Bemerkungen machen.

Die unkürzbaren Darstellungen und die Längen der Elemente g_1, g_2 betrachtet man dort in bezug auf die *erste* Zerlegung. Da der erste Faktor der unkürzbaren Darstellung von g_2 als nicht zur Komponente H_2 gehörig vorausgesetzt werden kann, ist das Element $h = g_2 g_1$ der letzte Faktor der unkürzbaren Darstellung von g_1, also können im Produkte $g_1 g_2$ überhaupt keine Kürzungen vollzogen werden.

Aus dem Isomorphiesatz für freie Produkte folgen einige Isomorphiesätze für sogenannte *freie Produkte mit vereinigten Untergruppen*, welche wir hier nicht definieren wollen.

(Eingegangen am 22. 6. 1933).