Über freie Produkte von Gruppen.

Von

Alexander Kurosch in Moskau.

Die Gruppe G heißt **freies Produkt** *ihrer Untergruppen* H_α, $G = \prod_\alpha H_\alpha$ (α durchläuft eine beliebige Indexmenge), *wenn jedes Element g von G auf eine und nur eine Weise als Produkt*

$$(1) \qquad g = h_1 h_2 \ldots h_n, \quad h_i \neq 1, \quad h_i \subset H_{\alpha_i}, \quad H_{\alpha_i} \neq H_{\alpha_{i+1}}\text{[1]}$$

darstellbar ist; es gibt also in G keine nichtidentische Relationen, welche Elemente von verschiedenen H_α verbinden. (1) ist für g eine einzige *unkürzbare Darstellung* durch Elemente von H_α[2]; n soll die *Länge* von g, $n = l(g)$, heißen.

Jedes freie Produkt kann daher als durch die Gesamtmenge von Erzeugenden und definierenden Relationen aus allen Faktoren H_α definierbar betrachtet werden. Schreier hat bewiesen, daß diese Gruppen wirklich existieren[3].

Sind alle H_α zyklische Gruppen von der Ordnung Null, d. h. gibt es in G eine Menge von Erzeugenden *ohne* Relationen, so heißt G eine **freie Gruppe**. Ihre Bedeutung besteht darin, daß *jede* Gruppe als Faktorgruppe einer freien Gruppe betrachtet werden kann (Satz von Dyck). Die wichtigste Tatsache aus der Theorie der freien Gruppen ist der bemerkenswerte Nielsen-Schreiersche Satz, welcher sagt, daß jede Untergruppe einer freien Gruppe selbst frei ist[4].

Über freie Produkte *beliebiger* Gruppen kommen sogleich zwei Fragen in Betracht. Erstens, welche Beziehungen gibt es zwischen zwei verschiedenen

---

[1]) Obwohl $H_{\alpha_i} = H_{\alpha_j}$ bei $j \neq i + 1$ möglich ist.

[2]) Verschiedene Darstellungen eines Elementes h durch Erzeugende von H_α interessieren uns nicht.

[3]) Vgl. O. Schreier, Die Untergruppen der freien Gruppen, § 1, Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität 5 (1927), S. 161—183.

[4]) O. Schreier, l. c., § 4. Vgl. auch W. Hurewicz, Zu einer Arbeit von O. Schreier, Hamb. Abhandl. 8 (1930), S. 307—314. Siehe einen neuen Beweis bei F. Levi, Über die Untergruppen freier Gruppen, Math. Zeitschr. 32 (1930), S. 315—318.

Zerlegungen einer Gruppe in freie Produkte unzerlegbarer Faktoren? Wird der „*Isomorphiesatz*" richtig sein, d. h. sind diese zwei Zerlegungen von derselben Struktur oder nicht? Im Falle freier Gruppen führt dies zur Invarianz der Mächtigkeit der Menge aller Erzeugenden, was schon von Schreier bewiesen wurde[5]).

Die zweite Frage, welche mit dem Nielsen-Schreierschen Satze in engster Verbindung steht und tiefergehend als die erste ist, ist die Frage nach den *Untergruppen eines freien Produktes.* Für eine freie Gruppe und, wie wir zeigen werden, allgemein für freie Produkte zyklischer Gruppen gilt der Satz (§ 3), daß jede ihrer Untergruppen selbst ein freies Produkt ist, dessen Faktoren entweder zyklische Gruppen von der Ordnung Null sind oder Gruppen, welche mit Untergruppen von einigen Faktoren H_α konjugiert sind[6]). Die Frage, ob das auch immer der Fall ist, bleibt unentschieden, obgleich wir keine Gegenbeispiele kennen.

In der vorliegenden Arbeit beweisen wir den Isomorphiesatz für freie Produkte von kommutativen Gruppen und Gruppen, deren Elemente alle von endlicher Ordnung sind (§§ 1, 2), betrachten freie Produkte von unendlichen zyklischen Gruppen mit einer gemeinsamen Untergruppe (§ 2) und untersuchen darauf die Untergruppen eines freien Produktes beliebiger zyklischer Gruppen (§ 3). Gruppen der in § 2 und 3 behandelten Art treten in der kombinatorischen Topologie und als Gruppen automorpher Funktionen auf. Schließlich betrachten wir in § 4 eine besondere Klasse von Untergruppen beliebiger freier Produkte und eine Zerlegung dieser Untergruppen in freie Produkte.

§ 1.

Es ist klar, daß jede Gruppe ohne Elemente von unendlicher Ordnung[7]) und jede kommutative Gruppe nicht in ein freies Produkt zerlegbar ist. Wir wollen deshalb Untergruppen ohne freie Elemente und kommutative Untergruppen von einem freien Produkte betrachten und machen dabei keine Voraussetzungen über die Struktur von Faktoren dieses Produktes selbst.

Es sei $G = \prod_\alpha H_\alpha$. Dann gilt der

Hilfssatz: *Ist das Element* $g = h_1 h_2 \ldots h_k$[8]) *von endlicher Ordnung und ist* $k > 1$, *so muß* $h_k = h_1^{-1}$ *sein.*

In der Tat, die Gleichheit $g^n = 1$ gibt uns im entgegengesetzten Falle eine nichtidentische Relation in G, da keine Abkürzungen vollzogen würden.

---

[5]) O. Schreier, l. c., § 2.

[6]) Eine Untergruppe von einem freien Produkte kann eventuell nur aus einem einzigen solchen Faktor bestehen, also unzerlegbar sein.

[7]) Wir werden sagen — eine Gruppe ohne freie Elemente.

[8]) Elemente g, f, h_α usw. gehören zu den Gruppen G bzw. F, H_α.

Satz 1. *Jede Untergruppe F ohne freie Elemente von einem freien Produkte $G = \prod_\alpha H_\alpha$ ist mit einer Untergruppe eines Faktors H_α konjugiert.*

Beweis. Es sei l die minimale Länge der Elemente von F. Ist $l = 1$, also enthält F ein $h \subset H_\alpha$, so soll

$$F \subset H_\alpha$$

sein. In der Tat, es sei $f = h_1 h_2 \ldots h_k$ und $k > 1$; dann ist, vermöge des Hilfssatzes, $h_k = h_1^{-1}$. Das Element fh widerspricht aber diesem Hilfssatze, also kann es nicht von endlicher Ordnung sein.

Wir setzen den Satz als bewiesen voraus für jede Untergruppe, deren minimale Länge $< l$ ist. Die unkürzbaren Darstellungen zweier beliebiger Elemente f_1, f_2 von F müssen das nämliche letzte Element haben, $f_1 = h_1 g_1 h_1^{-1}$, $f_2 = h_1 g_2 h_1^{-1}$, um das Element $f_1 f_2$ im Einklang mit dem Hilfssatze beizubehalten. Aber die Untergruppe

$$F_1 = h_1^{-1} F h_1$$

hat die minimale Länge $l - 2$ und es soll deshalb

$$F_1 = g H'_\alpha g^{-1}$$

mit $H'_\alpha \subset H_\alpha$ sein. Daraus ergibt sich, daß

$$F = (h_1 g) H'_\alpha (h_1 g)^{-1}$$

ist und damit ist der Satz bewiesen.

Aus diesem Satze folgt, daß ein freies Produkt nur dann Elemente von endlicher Ordnung enthält, wenn solche Elemente mindestens in einem Faktor H_α enthalten sind.

Satz 2. *Jede kommutative Untergruppe F von einem freien Produkte $G = \prod_\alpha H_\alpha$, die keine zyklische Gruppe von der Ordnung Null ist, ist mit einer Untergruppe eines Faktors H_α konjugiert.*

Beweis. Wir dürfen sogar annehmen, daß F überhaupt keine zyklische Gruppe ist, weil der Fall der endlichen zyklischen Gruppen dem Satze 1 unterliegt.

Es sei f ein Element von F von minimaler Länge. Wir werden dabei annehmen, daß das erste und das letzte Element von der unkürzbaren Darstellung für f keine zueinander inverse Elemente sind. Wäre in der Tat

$$f = g^{-1} \bar{g} g,$$

so hätten wir die Gruppe $F' = gFg^{-1}$ betrachtet; die Richtigkeit des Satzes für F' zöge dieselbe für F nach sich. Bei diesen Voraussetzungen wird unser Satz dann und nur dann richtig sein, wenn die ganze Gruppe F zu einem H_α gehört.

Es sei $l(f) > 1$. Man bezeichne mit $\{f\}$ die zyklische Gruppe des Elementes f. Aus der Menge $F - \{f\}$ (sie ist nach Voraussetzung nichtleer) wählen wir ein Element f' von minimaler Länge. Nach über f gemachten Voraussetzungen läßt entweder ff' oder $f^{-1}f'$ keine Abkürzungen zu; wir nehmen das erste an.

Da F kommutativ ist, ist

$$ff' = f'f.$$

Diese Gleichheit soll keine nichtidentische Relation sein, also muß, da $l(f) \leqq l(f')$ ist,

$$f' = ff_1$$

mit $l(f_1) < l(f')$ sein[9]. f_1 muß daher zu $\{f\}$ gehören, aber dann gehört f' auch zu $\{f\}$. Die Voraussetzung $l(f) > 1$ führt also zu einem Widerspruch.

Es sei nun $l(f) = 1$, $f = h_\alpha \subset H_\alpha$, aber F enthalte ein Element f' mit $l(f') > 1$. Wir setzen voraus, daß das erste Element von unkürzbarer Darstellung für f' nicht zum Faktor H_α gehört[10]. Die Relation

$$ff' = f'f$$

ist aber jetzt nichtidentisch.

§ 2.

Es sei G das freie Produkt von Gruppen H, K, $G = HK$, und es sei $\overline{H}$ der kleinste Normalteiler von G, der H enthält. Nach Schreier[11]) erhält man die Faktorgruppe von G nach $\overline{H}$, indem man zu den Relationen von G die Relationen $h = 1$ hinzufügt, wobei h alle Elemente von H durchläuft. Nach der in der Einleitung gemachten Bemerkung ist ein freies Produkt durch die Gesamtheit der Erzeugenden und definierenden Relationen seiner Komponenten gegeben, und hieraus folgt unmittelbar der

Hilfssatz: *K ist mit der Faktorgruppe von G nach $\overline{H}$ isomorph, $K \sim G/\overline{H}$.*

Dieser Hilfssatz und die Sätze 1 und 2 des § 1 erlauben uns Beziehungen zwischen verschiedenen Zerlegungen des freien Produktes von Gruppen ohne freie Elemente und kommutativen Gruppen zu finden. Es gilt nämlich der folgende

Satz 3. **(Der Isomorphiesatz.)** *Ist eine Gruppe G auf zwei Arten als freies Produkt dargestellt,*

$$G = \prod_\alpha H_\alpha = \prod_\beta F_\beta,$$

wo sowohl jedes H_α als auch jedes F_β entweder eine beliebige Gruppe ohne freie Elemente oder eine beliebige kommutative Gruppe ist, so lassen sich die Faktoren

---

[9]) ff_1 ist eine Darstellung ohne Abkürzungen, d. h. das letzte Element von f und das erste Element von f_1 sind keine inversen Elemente, obwohl sie zu demselben Faktor H_α gehören können; in diesem Falle ist die unkürzbare Darstellung für ff_1 die Zusammensetzung derselben für f und f_1 „mit einer Vereinigung".

[10]) Sei im Gegenteil h'_α dieses Element, so hätten wir die Gruppe $F_1 = h'^{-1}_\alpha F h'_\alpha$ betrachtet, denn $l(h'^{-1}_\alpha h_\alpha h'_\alpha) = 1$.

[11]) O. Schreier, l. c., S. 170—171.

dieser beiden Zerlegungen so einander eineindeutig zuordnen, daß entsprechende Gruppen isomorph sind. Sind diese entsprechenden Faktoren keine unendlichen zyklischen Gruppen, so sind sie sogar in G konjugiert.

Beweis. Es sei H_1 einer von den Faktoren H_α, der keine zyklische Gruppe von der Ordnung Null ist; er soll nach den Sätzen 1, 2 mit einer Untergruppe F_1' von einem Faktor F_1 der zweiten Zerlegung konjugiert sein,

$$H_1 = g_1^{-1} F_1' g_1. \tag{1}$$

F_1 ist daher auch keine zyklische Gruppe von der Ordnung Null und muß selbst mit einer Untergruppe H_2' von einem Faktor H_2 der ersten Zerlegung konjugiert sein,

$$F_1 = g_2^{-1} H_2' g_2, \tag{2}$$

also ist

$$F_1' = g_2^{-1} H_2'' g_2 \tag{3}$$

mit $H_2'' \subset H_2'$. Wegen (1) und (3) erhalten wir

$$H_1 = g_1^{-1} g_2^{-1} H_2'' g_2 g_1. \tag{4}$$

Diese Relation gibt uns nichtidentische Relationen für G in allen Fällen außer bei $g_1 = g_2^{-1} h$[12]), wo h ein Element von einem H_α ist. In diesem letzten Falle ist

$$H_1 = h^{-1} H_2'' h, \tag{5}$$

was aber auch nur dann möglich ist, wenn h ein Element und H_2'' eine Untergruppe von H_1 ist, also ist $H_2 = H_1$.

H_2' ist jetzt eine Untergruppe von H_1 und wir haben wegen (1)

$$H_2' = g_1^{-1} F_1'' g_1 \tag{6}$$

mit $F_1'' \subset F_1$. Aus (2) und (6) erhalten wir nun

$$F_1 = g_2^{-1} g_1^{-1} F_1'' g_1 g_2. \tag{7}$$

Ist $h \neq 1$, so wird $l(g_1) > l(g_2)$ sein und (7) gibt uns gewiß nichtidentische Relationen für G. Es soll daher $h = 1$, d. h. $g_1 = g_2^{-1}$ sein. Jetzt ist $H_2'' = H_1$ und folglich $H_2' = H_1$, d. h. F_1 und H_1 sind einander konjugiert.

Es bleibt uns nur unendliche zyklische Faktoren zu betrachten. Es sei K_1 das freie Produkt der unendlichen zyklischen Faktoren von der ersten Zerlegung, L_1 dasselbe für alle anderen Faktoren. G ist dann ein freies Produkt von L_1 und K_1, $G = L_1 K_1$; dabei ist K_1 eine freie Gruppe. Desgleichen gibt uns die zweite Zerlegung $G = L_2 K_2$. Nach dem oben Bewiesenen bestimmen L_1 und L_2 denselben kleinsten Normalteiler,

$$\bar{L}_1 = \bar{L}_2,$$

[12]) Darunter ist eine unkürzbare Darstellung für g_1 zu verstehen.

also gilt nach dem Hilfssatz aus § 2 der Isomorphismus

$$K_1 \sim K_2.$$

Für freie Gruppen ist aber die Mächtigkeit der Menge aller Erzeugenden (d. h. die Mächtigkeit der Menge freier Faktoren von einer Zerlegung) invariant[13]).

Der Isomorphiesatz ist damit vollständig bewiesen.

Wir betonen, daß *beide* in diesem Satze in Betracht kommenden Zerlegungen *nur* Faktoren ohne freie Elemente und kommutative Faktoren enthalten. Und zwar wissen wir nicht, ob für ein freies Produkt von Gruppen ohne freie Elemente und kommutative Gruppen eine Zerlegung mit unzerlegbaren Faktoren von einer anderen Struktur möglich ist oder nicht. Für freie Produkte von zyklischen Gruppen wird übrigens die Unmöglichkeit solcher Zerlegungen aus den Betrachtungen des § 3 folgen.

Der Satz 3 erlaubt uns den Invarianzsatz für ein *freies Produkt von zyklischen Gruppen mit einer vereinigten Untergruppe* zu beweisen. Solche Gruppen sind von Schreier[14]) bestimmt worden. Dies ist (in unserem Falle) eine Gruppe G mit Erzeugenden h_α[15]); zu jeder Erzeugenden h_α stellt man eine ganze positive Zahl $n_\alpha (> 1)$ — der *Exponent* von h_α — fest. Dann bilden die Relationen

$$h_\alpha^{n_\alpha} = h_\beta^{n_\beta}$$

für alle α, β ein vollständiges System der definierenden Relationen von G. Die zyklische Untergruppe $\{h_\alpha^{n_\alpha}\}$ ist die vereinigte Untergruppe; sie ist offenbar das Zentrum von G. Die Faktorgruppe von G nach dem Zentrum ist ein freies Produkt von endlichen zyklischen Gruppen. Es gilt also, vermöge des Satzes 3,

Satz 4. *Es sei eine Gruppe G auf zwei Arten als freies Produkt von unendlichen zyklischen Gruppen mit einer vereinigten Untergruppe dargestellt. Dann lassen sich die Erzeugenden dieser beiden Zerlegungen so einander eineindeutig zuordnen, daß die Exponenten von entsprechenden Erzeugenden gleich sind, d. h. die Menge aller Exponenten n_α ist invariant*[16]).

Dieser Satz läßt sich ohne weiteres auf einige andere freie Produkte mit einer vereinigten Untergruppe übertragen.

§ 3.

Wir wollen jetzt die Struktur der Untergruppen von einem freien Produkte untersuchen. Wir müssen uns dabei auf einen sehr speziellen Fall

---

[13]) Vgl. Fußnote [5]).

[14]) Vgl. Fußnote [3]).

[15]) α durchläuft eine beliebige Indexmenge.

[16]) Dieser Satz ist, im Falle zweier Erzeugenden, von Schreier bewiesen. Vgl. O. Schreier, Über die Gruppen $A^a B^b = 1$, Hamb. Abhandl. 3 (1924), S. 167—169.

beschränken — der Fall des freien Produktes von zyklischen Gruppen; für geometrische und funktionentheoretische Anwendungen ist dieser Fall dennoch am wichtigsten.

Unsere Betrachtungen stützen sich auf folgenden

Satz von Schreier[17]. Es sei eine Gruppe G mit Erzeugenden $\{s\}$ und definierenden Relationen $\varphi(s) = 1$[18]) und eine ihrer Untergruppen F gegeben. In jeder Restklasse $F \cdot g$ soll ein Element $\bar{g}$ als Repräsentant gewählt werden, wobei $\bar{g}$ nicht nur ein festes Element aus $F \cdot g$ bedeutet, sondern auch dessen festgewählte Darstellung als Potenzprodukt in s andeuten soll. Gehört das Element $\bar{g} = \prod_{i=1}^{n} s_i^{\varepsilon_i}$ $(\varepsilon_i = \pm 1)$ zu den Repräsentanten, so soll auch jeder Abschnitt $\prod_{i=1}^{k} s_i^{\varepsilon_i}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ unter den Repräsentanten vorkommen[19]). Alle Elemente $\bar{g}\, s\, \overline{gs}^{-1}$, welche $\neq 1$ sind, bilden ein erzeugendes System für F.

In der Tat, ist $f = s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \ldots s_n^{\varepsilon_n} \subset F$ $(\varepsilon_i = \pm 1)$ und sei $k_i = \prod_{t=0}^{i} s_t^{\varepsilon_t}$, $k_0 = 1$, so hat man

$$f = \prod_{i=1}^{n} \overline{k_{i-1}}\, s_i^{\varepsilon_i}\, \overline{k_i}^{-1}. \tag{1}$$

Aber

$$\overline{k_{i-1}}\, s_i\, \overline{k_i}^{-1} = \overline{k_{i-1}}\, s_i\, \overline{k_{i-1} s_i}^{-1}, \quad \overline{k_{i-1}}\, s_i^{-1}\, \overline{k_i}^{-1} = (\overline{k_i}\, s_i\, \overline{k_i s_i}^{-1})^{-1}.$$

Die Darstellung (1) des Elementes f durch Erzeugende $\bar{g}\, s\, \overline{gs}^{-1}$ soll mit f^* bezeichnet werden.

Die Untergruppe F wird jetzt durch die Relationen $(\bar{g}\, \varphi(s)\, \bar{g}^{-1})^* = 1$ für alle $\bar{g}$ und φ bestimmt.

Dieser Satz erlaubt uns die Untergruppen des freien Produktes von zyklischen Gruppen ohne Mühe zu untersuchen. Es gilt nämlich folgender Satz:

Satz 5. *Jede Untergruppe des freien Produktes G von beliebigen zyklischen Gruppen kann in ein freies Produkt zerlegt werden, dessen jeder Faktor entweder eine zyklische Gruppe von der Ordnung Null oder mit einer Untergruppe von einem Faktor von G konjugiert ist.*

Beweis. Es sei $G = \prod_{\alpha} H_\alpha$ und jeder Faktor H_α eine zyklische Gruppe mit dem erzeugenden Element h_α und der definierenden Relation $h_\alpha^{n_\alpha} = 1$ (n_α ist eine ganze positive Zahl $\geqq 2$ oder Null). Wir betrachten eine beliebige Untergruppe F von G und setzen voraus, daß die Repräsentanten $\bar{g}$ im Ein-

[17]) O. Schreier, l. c. [3]); W. Hurewicz, l. c. [4]).

[18]) $\varphi(s)$ bedeuten Potenzprodukte in s.

[19]) $\bar{f} = \bar{1} = 1$.

klang mit den Bedingungen des Schreierschen Satzes gewählt werden. Die Gruppe F wird nun durch die Erzeugenden $\bar{g} h_\alpha \overline{g h_\alpha}^{-1}$ $(\neq 1)$ und die Relationen

$$(2) \qquad \left(\bar{g}\, h_\alpha^{n_\alpha} \bar{g}^{-1}\right)^* = 1$$

für alle α und $\bar{g}$ bestimmt.

Wir bezeichnen mit h eines von den Elementen h_α, $h^n = 1$, und mit g einen von den Repräsentanten, $\bar{g} = g$. Die Relation (2) lautet nun:

$$(3) \qquad (g\, h\, \overline{g h}^{-1})\, (\overline{g h}\, h\, \overline{g h^2}^{-1}) \ldots (\overline{g h^{n-1}}\, h\, g^{-1}) \;=\; 1^{20)}.$$

Das Element $(\overline{g h^k}\, h\, \overline{g h^{k+1}}^{-1})$ tritt außerdem in allen Relationen

$$(4) \qquad (\overline{g h^p}\, h^n\, \overline{g h^p}^{-1})^* = 1$$

auf, aber diese sind mit (3) gleichwertig, denn ist $\overline{g h^p} = f g h^p$, $f \subset F$, so gilt

$$(5) \qquad \overline{\overline{g h^p}\, h} = \overline{f g h^p h} = \overline{f g h^{p+1}} = \overline{g h^{p+1}}.$$

Keine andere von den Relationen (2) enthält diese Erzeugende, da für einen Repräsentanten g' aus $\overline{g h^k} = \overline{g' h^l}$

$$(6) \qquad g' = f g h^{k-l} = \overline{g h^{k-l}}$$

folgt.

Behält man nur eine von diesen gleichwertigen Relationen (4), z. B. (3), bei, so wird eine Erzeugende $\bar{g} h \overline{g h}^{-1}$ in keinen zwei von den übriggebliebenen definierenden Relationen enthalten sein.

Man betrachte jetzt die Relation (3) näher; wenn ihre linke Seite nicht verschwindet, so sollen mindestens zwei ihrer Faktoren verschieden von 1 sein, also wird (3) wirklich Erzeugende von F enthalten.

Wenn alle g, $\overline{g h}$, ..., $\overline{g h^{n-1}}$ voneinander verschieden sind, so sind alle in (3) enthaltenen, von 1 verschiedenen Erzeugende auch voneinander verschieden. Wirft man eine von diesen Erzeugenden ab, so gibt es unter den übriggebliebenen Erzeugenden *keine* Relationen; die von ihnen bestimmten zyklischen Gruppen sind unendlich und treten als freie Faktoren von F auf.

Es sei nun $g = \overline{g h^k}$, aber von $\overline{g h}$, ..., $\overline{g h^{k-1}}$ verschieden. Für alle l, p gilt

$$(7) \qquad \overline{g h^l} = \overline{g h^{l+pk}}.$$

In der Tat, auf Grund $g = f g h^k$ ist

$$(8) \qquad \overline{g h^{pk}} = \overline{f' g\, h^{pk}} = \overline{f'' g\, h^{(p-1)k}} = \ldots = g,$$

also ist

$$(9) \qquad \overline{g\, h^{l+pk}} = \overline{f_1\, g\, h^{l+pk}} = \overline{(f_1\, g\, h^{pk})\, h^l} = \overline{f_2\, g\, h^l} = \overline{g h^l}.$$

Daraus folgt, daß k ein Teiler von n, $n = km$, sein muß.

[20]) Die Faktoren, welche durch g selbst entstehen, sind alle gleich 1, denn jeder Abschnitt von g ist selbst ein Repräsentant.

Das Element

$$(10) \qquad (g\,h\,\overline{g\,h}^{-1})\,(\overline{g\,h}\,h\,\overline{g\,h^2}^{-1})\ldots(\overline{g\,h^{k-1}}\,h\,\overline{g\,h^k}^{-1}) = g\,h^k\,g^{-1}$$

gehört zur Gruppe F und die Relation (3) lautet nun

$$(11) \qquad (g\,h^k\,g^{-1})^m = 1.$$

Wir werden jetzt dieses Element zu den Erzeugenden rechnen und eine in (3) enthaltene Erzeugende abwerfen[21]). Die von diesen neuen Erzeugenden bestimmten zyklischen Gruppen treten nun als freie Faktoren von F auf. Die Gruppe $\{g^{-1}h^k g\}$ ist mit einer Untergruppe von H ($= H_\alpha$, wenn $h = h_\alpha$ ist) konjugiert (ist $k = 1$, so ist sie mit H selbst konjugiert); alle anderen hier betrachteten zyklischen Gruppen sind von der Ordnung Null.

Der Satz 5 ist hiermit bewiesen.

Aus diesem Satze folgt unter anderem, daß jede unzerlegbare (in freies Produkt) Untergruppe des freien Produktes von zyklischen Gruppen entweder eine zyklische Gruppe von der Ordnung Null ist oder mit einer Untergruppe von einem H_α konjugiert sein muß. Der Isomorphiesatz, welcher von uns in § 2 bewiesen worden ist, gilt daher für *beliebige* Zerlegungen des freien Produktes von zyklischen Gruppen, Zerlegungen in ein freies Produkt von unzerlegbaren Faktoren.

Aus dem Satze 5 folgt auch

Satz 6. *Die Kommutatorgruppe eines freien Produktes von zyklischen Gruppen ist eine freie Gruppe*[22]).

In der Tat, die Exponentensumme von einem jeden Elemente h_α in jedem Elemente von der Kommutatorgruppe ist $\equiv 0 \pmod{n_\alpha}$, also enthält diese Gruppe kein Element, welches mit einem h_α^k konjugiert wäre.

§ 4.

Im vorhergehenden Paragraphen betrachteten wir die freien Produkte von zyklischen Gruppen. Ist jetzt $G = \prod_\alpha H_\alpha$ ein freies Produkt von *beliebigen* Gruppen, so werden wir nur einige von seinen Untergruppen untersuchen, und zwar:

Es sei F eine Untergruppe von G. Sie enthält im allgemeinen einige mit h_α konjugierte Elemente, welche *Transformationen* heißen sollen. Wir werden nun annehmen, daß *F von seinen Transformationen erzeugt wird*, es ist also jedes Element von F gleich einem Produkte von zu F gehörenden Trans-

[21]) Dies ist möglich, denn man kann das abgeworfene Element durch neue Erzeugende darstellen.

[22]) Den Fall einer Gruppe mit zwei Erzeugenden a, b und definierenden Relationen $a^2 = b^3 = 1$ betrachtet W. Magnus, Untersuchungen über einige unendliche diskontinuierliche Gruppen, § 5, Math. Annalen **105** (1931), S. 52—74.

formationen; der kleinste Normalteiler $\bar{H}_\alpha$ über H_α ist ein Beispiel solcher Untergruppen.

Satz 7. *Es sei F eine Untergruppe von einem freien Produkte $G = \prod\limits_\alpha H_\alpha$, die von ihren Transformationen erzeugt wird. Dann ist F ein freies Produkt von Untergruppen, welche mit Untergruppen von einigen H_α konjugiert sind.*

Beweis. Wir sagen, daß die Transformation $f = g^{-1} h_\alpha g \subset F$ einer anderen Transformation $f' \subset F$ vorangeht, wenn

$$l(f) < l(f')$$

ist und f' in Gestalt von

$$f' = g^{-1} h_\alpha^{-1} g_1 h_\alpha g$$

geschrieben werden kann; g_1 soll dabei dieses h_α nicht als sein erstes (und h_α^{-1} nicht als sein letztes) Element haben.

Hat eine Transformation $f = g^{-1} h_\alpha g$ keine vorangehenden, so soll sie *Elementartransformation* von F heißen. Zugleich mit $g^{-1} h_\alpha g$ ist auch jedes Element von dem Durchschnitt $F \frown g^{-1} H_\alpha g = H_{\alpha, g}$ eine Elementartransformation von F. Wir wollen beweisen, daß *alle von* 1 *verschiedenen* $H_{\alpha, g}$ *ein freies Produkt bilden.*

Dazu genügt es, wie leicht zu sehen ist, zu beweisen, daß jedes Produkt

$$\prod_{i=1}^{k} (g_i^{-1} h_i g_i),$$

wo jeder Faktor eine Elementartransformation von F ist und je zwei benachbarte Faktoren zu verschiedenen $H_{\alpha, g}$ gehören, die unkürzbare Darstellung

$$\prod_{i=1}^{k} (g_i^{-1} h_i g_i) = g_1^{-1} h_1 g' h_2 g'' \ldots h_k g_k$$

hat; hier ist $g^{(i)}$ ein Element von G, welches, falls h_i und h_{i+1} zu derselben Gruppe H_α gehören, von 1 gewiß verschieden sein muß. Für alle Produkte von $k-1$ Faktoren setzen wir unsere Behauptung als richtig voraus, d. h.

$$\prod_{i=1}^{k-1} (g_i^{-1} h_i g_i) = g_1^{-1} h_1 g' h_2 \ldots h_{k-1} g_{k-1};$$

wir wollen nun zu diesem Produkte einen Faktor $g_k^{-1} h_k g_k$ hinzufügen.

Ist $g_{k-1} = g_k$, so müssen, da benachbarte Faktoren zu verschiedenen $H_{\alpha, g}$ gehören, h_{k-1} und h_k zu verschiedenen H_α gehören; unsere Behauptung ist daher in diesem Falle bewiesen.

Ist $g_{k-1} = g^* g$, $g_k = g^{**} g$ [23]), wo $g^* \neq 1$, $g^{**} \neq 1$ und g^*, g^{**} verschiedene letzte Elemente haben, so erhalten wir

$$\prod_{i=1}^{k} (g_i^{-1} h_i g_i) = g_1^{-1} h_1 g' \ldots h_{k-1} (g^* g^{**-1}) h_k g_k$$

mit $g^* g^{**-1} = g^{(k-1)} \neq 1$.

[23]) Unkürzbare Darstellung.

Ist endlich $g_k = g g_{k-1}$[23]), so ist

$$\prod_{i=1}^{k} (g_i^{-1} h_i g_i) = g_1^{-1} h_1 g' \ldots h_{k-1} g^{-1} h_k g_k.$$

Hätte g ein Element h'_{k-1}, das mit h_{k-1} zu derselben Gruppe H_α gehört, als sein letztes Element, wäre also

$$g_k = g^* h'_{k-1} g_{k-1} = g^* h''_{k-1} h_{k-1} g_{k-1},$$

so ginge das Element $g_{k-1}^{-1} h_{k-1} g_{k-1}$ dem Elemente $g_k^{-1} h_k g_k$ voran, also wäre dieses letztere keine Elementartransformation.

Unsere Behauptung ist jetzt in allen Fällen bewiesen. Es gibt also keine nichtidentischen Relationen, welche Elemente von verschiedenen $H_{\alpha, g}$ verbinden.

Jede Transformation von F gehört zu $\Pi H_{\alpha, g}$. (F wird von seinen Transformationen erzeugt und wir erhalten daher die Gleichung $F = \Pi H_{\alpha, g}$.)

Es sei f eine Transformation von F, aber keine Elementartransformation; es gibt also eine solche Transformation $f' = g_1^{-1} h_1 g_1$ von F, $l(f') < l(f)$, daß die Darstellung

$$f = g_1^{-1} h_1^{-1} \bar{g} h_1 g_1$$

gilt. Das Element $f' f f'^{-1} = g_1^{-1} \bar{g} g_1$ hat eine kleinere Länge als f, und wir setzen voraus, indem wir vollständige Induktion anwenden, daß $f' f f'^{-1}$ und f' schon zu $\Pi H_{\alpha, g}$ gehören; dann gehört f auch zu $\Pi H_{\alpha, g}$.

Der Satz 7 ist bewiesen.

(Eingegangen am 12. 5. 1932.)