Zur Zerlegung unendlicher Gruppen.

Von

Alexander Kurosch in Moskau.

1. Über unendliche Gruppen wissen wir wenig; fast alles, was wir wissen, ist mit dem Begriffe der Zerlegung der Gruppen in direkte Produkte verbunden. Das Ziel dieser Untersuchungen ist hauptsächlich der Beweis von folgendem, für einige Klassen von Gruppen geltenden,

Zerlegungssatz. *Wenn zwei Zerlegungen der Gruppe G in direkte Produkte mit einer endlichen Anzahl unzerlegbarer Faktoren gegeben sind, so haben beide Zerlegungen die gleiche Anzahl Faktoren, die Faktoren sind paarweise zentral isomorph und in jeder Zerlegung kann jeder Faktor durch einen zentral isomorphen der anderen Zerlegung ersetzt werden.*

Ursprünglich haben diesen Satz Remak und O. Schmidt für jede endliche Gruppe bewiesen. Darauf hat Prüfer den Beweis für einige Klassen von primären Abelschen Gruppen gegeben. Krull[1]) hat verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen, d. h. Abelsche Gruppen mit endlichen Unter- und Obergruppenketten, definiert und den Zerlegungssatz für solche Gruppen bewiesen. O. Schmidt[2]) hat den Beweis des Zerlegungssatzes für jede Gruppe mit endlichen Unter- und Obergruppenketten erbracht. Überdies ist in Speisers Buche[3]) der Zerlegungssatz für jede Gruppe ohne Zentrum bewiesen.

Die Zusammenstellung der beiden letzten Resultate legt die Vermutung nahe, daß der Zerlegungssatz für *jede abstrakte Gruppe* gültig ist. Der Beweis dieser Vermutung (oder ihre Widerlegung) hätte eine große Tragweite für die Gruppentheorie, aber er scheint nicht leicht zu sein. Da

---

[1]) Krull, „Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen“, Math. Zeitschr. 23 (1925), S. 161—196. Aus meinem Satze I folgt, daß seine Verallgemeinerung *nur* in der Einführung von Operatoren liegt, welche wir jetzt außerhalb unseres Gesichtsfeldes lassen.

[2]) O. Schmidt, „Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette“, Math. Zeitschr. 29 (1928), S. 34—41. Der Beweis meines Satzes III ist der nur etwas veränderte Beweis des Schmidtschen Satzes.

[3]) Speiser, „Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung“ (Berlin 1923), S. 87.

eine willkürliche Gruppe nicht als direktes Produkt von einer endlichen Anzahl unzerlegbarer Faktoren dargestellt werden kann, so ist notwendig, entweder das direkte Produkt von unendlich vielen Faktoren zu definieren oder den Zerlegungssatz in passender Weise abzuändern. Es ist überdies möglich, daß es zerlegbare Gruppen ohne unzerlegbare direkte Faktoren gibt.

In der vorliegenden Arbeit gebe ich keine Lösung des obengenannten Fundamentalproblems, wohl aber den Beweis des Zerlegungssatzes für einige allgemeine Klassen von Gruppen, und zwar:

1. für allgemeine (kommutative oder nicht-kommutative) Gruppen mit endlichen Untergruppenketten (ohne die Endlichkeit der Obergruppenketten vorauszusetzen),

2. für Gruppen mit unzerlegbarem Zentrum,

3. für freie Abelsche Gruppen mit vollständigen Rationalitätssystemen.

2. Die Gruppe G ist das *direkte Produkt* ihrer Untergruppen H_1, H_2, $G = H_1 H_2$, wenn H_1 und H_2 teilerfremd sind, $h_1 h_2 = h_2 h_1$ für alle Elemente h_i aus H_i und jedes Element g aus G das Produkt von Elementen aus H_1 und H_2 ist, $g = h_1 h_2$. Das eindeutig bestimmte Element h_i ist die *Komponente* von g in H_i. Wenn F eine Untergruppe von G ist, so bilden die Komponenten von sämtlichen Elementen von F in H_i eine Untergruppe — die Komponente von F in H_i.

Zwei Untergruppen F_1, F_2 von G heißen *zentral isomorph*, $F_1 \simeq F_2$, wenn sie isomorph sind, $F_1 \sim F_2$, und wenn, sobald bei diesem Isomorphismus f_1 und f_2 einander zugeordnet und $f_1 = f_2 c$ ist, c immer zum Zentrum von G gehört.

Ich gebe ohne Beweis die folgenden gebräuchlichen Hilfssätze:

Hilfssatz 1. Ist $G = H_1 F_1 = H_1 F_2$, so ist $F_1 \simeq F_2$.

Hilfssatz 2. Sind g_1 und g_2 vertauschbare Elemente von G, so sind ihre Komponenten in jedem direkten Faktor auch untereinander vertauschbar.

Hilfssatz 3. Ist $G = H_1 H_2$ und enthält eine invariante Untergruppe F von G die Gruppe H_1, so ist $F = H_1 H_2^*$, wo H_2^* den Durchschnitt von F und H_2 bedeutet.

Hilfssatz 4. Ist $G = H_1 H_2$, ist die invariante Untergruppe F von G mit H_2 teilerfremd und H_1' die Komponente von F in H_1, so ist $F \sim H_1'$.

Hilfssatz 5. Das Zentrum eines direkten Produktes ist das direkte Produkt der Zentren der Faktoren.

3. Ich betrachte in diesem und dem folgenden Paragraphen die *Gruppen mit endlichen Untergruppenketten*, d. h. die Gruppen, die keine unendliche Folge von Untergruppen $G_1 = G, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ enthalten, so daß jedes G_n

eine echte invariante Untergruppe von G_{n-1} ist. Jede Gruppe mit endlichen Untergruppenketten wird entweder unzerlegbar sein oder in eine endliche Anzahl von Faktoren zerlegt werden können.

Satz I. *Jede unzerlegbare Abelsche Gruppe G mit endlichen Untergruppenketten ist entweder zyklisch von Primzahlpotenzordnung oder quasizyklisch*[4]).

Unter einer *quasizyklischen* Gruppe verstehen wir eine unendliche Abelsche Gruppe G, die eine solche Folge von Elementen $a_0 = 1, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ enthält, daß $a_n^p = a_{n-1}$[5]) und jedes Element von G eine Potenz von einem a_n ist.

Beweis. Infolge der Endlichkeit der Ketten haben alle Elemente von G eine endliche Ordnung. Infolge der Unzerlegbarkeit sind die Ordnungen der Elemente Potenzen einer einzigen Primzahl p.

Wenn die Ordnungen der Elemente unbegrenzt sind, so bilden wir eine Elementenfolge, beginnend mit $a_0 = 1$. Es seien für jedes $i \leqq k$ (k eine beliebige ganze Zahl) die Elemente a_i von G bereits so ausgewählt, daß $a_i^p = a_{i-1}$ ist und es für jedes n in G ein Element b_n gibt, daß $b_n^{p^n} = a_k$ ist. Dann bestimmen wir auf folgende Weise das Element a_{k+1}. Es sei H die Untergruppe aller Elemente, deren p-te Potenzen zur zyklischen Gruppe $\{a_k\}$ gehören; H_l sei diejenige Untergruppe von H, deren Elemente p^l-te Potenzen irgendwelcher Elemente von G sind. Da die Untergruppen $H_1 > H_2 > \ldots H_l > \ldots$ nicht zunehmen und die Untergruppenketten endlich sind, so gibt es ein solches n, daß $H_{n+s} = H_n$ für jedes s ist. H_n enthält das Element $b_{n+1}^{p^n}$, da $(b_{n+1}^{p^n})^p = a_k$ und $b_{n+1}^{p^n} = (b_{n+1})^{p^n}$ ist. Wir setzen jetzt $b_{n+1}^{p^n} = a_{k+1}$; in der Tat, es ist $a_{k+1}^p = a_k$ und $a_{k+1} < H_{n+s}$ für jedes s, also gibt es für a_{k+1} die b_n entsprechenden Elemente b_n'. Wir erhalten die unendliche Elementenfolge $a_0 = 1, a_1, a_2, \ldots$ mit $a_n^p = a_{n-1}$.

Wenn die Ordnungen von Elementen begrenzt wären, so erhielten wir eine endliche Elementenfolge, indem wir ein beliebiges Element a von maximaler Ordnung p^m genommen und $a_i = a^{p^{m-i}}$ für $i \leqq m$ gesetzt hätten.

Es sei G_k die Untergruppe aller Elemente aus G, deren Ordnungen p^k nicht übertreffen ($k = 1, 2, \ldots$). Wir wählen aus der Menge $G_1 - \{a_1\} + 1$ eine in dieser Menge maximale Untergruppe F_1: ist 1 keine maximale Untergruppe, so gibt es eine Untergruppe $H_2 > H_1 = 1$ usw.; für eine Limeszahl α nehmen wir $H_\alpha = \sum_{\beta<\alpha} H_\beta$ an. Ist F_{k-1} schon gewählt, so wählen wir aus der Menge $G_k - \{a_k\} + 1$ eine maximale Untergruppe F_k; dabei fangen wir unser transfinites Verfahren mit F_{k-1} an.

[4]) Dieser Satz folgt aus dem Satze in § 10 von Prüfers „Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen", Math. Zeitschr. 17 (1923), S. 35—61. Ich gebe hier einen anderen Beweis.

[5]) p eine Primzahl.

Es sei c ein Element p-ter Ordnung, das zu F_1 nicht gehört; dann gibt es eine solche natürliche Zahl l und ein solches Element $f_1 \subset F_1$, daß $c^l f_1 = a_1^k$ mit $a_1^k \neq 1$ (und somit $(l, p) = 1$) ist, also: $c^l = a_1^k f_1^{-1}$; ist $l\xi \equiv 1 \pmod{p}$, so ist $c = a_1^{k\xi} f_1^{-\xi}$. Hieraus folgt, daß G_1 das direkte Produkt von den Untergruppen $\{a_1\}$ und F_1 ist.

Es sei bereits bewiesen worden, daß $G_k = \{a_k\} F_k$ ist; c ist jetzt ein Element von der Ordnung p^{k+1}. Nach Voraussetzung ist $c^p = a_k^m f_k$ mit $f_k \subset F_k$. In $c = (a_{k+1}^{p^k - m})^{-1} (c\, a_{k+1}^{p^k - m})$ gehört der erste Faktor zu $\{a_{k+1}\}$; wenn der zweite zu F_{k+1} gehört, so ist c das Produkt von einem Element aus $\{a_{k+1}\}$ und einem Element aus F_{k+1}. Wenn aber $c\, a_{k+1}^{p^k - m} \not\subset F_{k+1}$, so gibt es ein solches l und ein solches Element $f_{k+1} \subset F_{k+1}$, daß $(c\, a_{k+1}^{p^k - m})^l f_{k+1} = a_{k+1}^s \neq 1$; hier ist $(l, p) = 1$.[6] Wenn $l\xi \equiv 1 \pmod{p^{k+1}}$, so ist $c = a_{k+1}^{s\xi} a_{k+1}^{m - p^k} f_{k+1}^{-\xi}$, d. h. c ist wieder das Produkt von einem Element aus $\{a_{k+1}\}$ und einem Element aus F_{k+1}.

Wir erhalten für jedes k: $G_k = \{a_k\} F_k$. Sind $\sum\limits_k \{a_k\} = K$, $\sum\limits_k F_k = F$, so sind die Gruppen K, F teilerfremd und $G = KF$. Infolge der Unzerlegbarkeit von G: $F = 1$ und $G = K$.

Satz II. *Für eine Abelsche Gruppe G mit endlichen Untergruppenketten gilt der Zerlegungssatz.*

Beweis. Es seien $G = H_1 H_2 \dots H_k = F_1 F_2 \dots F_l$ zwei Zerlegungen von G in direkte Produkte von unzerlegbaren Faktoren. Nach Satz I wird der Faktor H_1 mit einer endlichen oder unendlichen Elementenfolge $1, a_1, a_2, \dots,$ wo $a_n^p = a_{n-1}$, definiert. Jedes $a_n = f_n' \cdot f_n'' \dots f_n^{(l)}$ ist mit $f_n^{(i)} \subset F_i$. Die Komponente von $f_n^{(i)}$ in H_1 ist $h_n^{(i)}$; mindestens ein $h_n^{(i)}$ hat die Ordnung p^n, also hat das entsprechende $f_n^{(i)}$ auch dieselbe Ordnung; dann hat $f_{n-1}^{(i)} = (f_n^{(i)})^p$ die Ordnung p^{n-1}, und dieselbe Ordnung hat seine Komponente $h_{n-1}^{(i)} = (h_n^{(i)})^p$ in H_1. Somit kann mühelos in einem F_i eine Elementenfolge $1, f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \dots$ desselben Ordnungstypus, wie solche in H_1, ausgewählt werden; $(f_n^{(i)})^p = f_{n-1}^{(i)}$ und die Komponente jedes $f_n^{(i)}$ in H_1 hat die Ordnung p^n. Diese Elementenfolge definiert eine zu H_1 isomorphe Untergruppe F_i^* von F_i. Jedes von der 1 verschiedene Element von F_i^* hat die von der 1 verschiedene Komponente in H_1, also ist F_i^* mit $H_2 \dots H_k$ teilerfremd und $G = F_1 F_2 \dots F_l = F_1^* H_2 \dots H_k$.[7] Infolge der Unzerlegbarkeit von F_i: $F_i^* = F_i$. Der Ersatz der Faktoren der ersten Zerlegung eines nach dem andern bringt unseren Beweis zum Schluß.

---

[6] Da $a_{k+1}^p = a_k$, so ist $(c\, a_{k+1}^{p^k - m})^p = f_k$; ist jetzt $l = qp$, so ist

$$(c\, a_{k+1}^{p^k - m})^l f_{k+1} = f_k^q f_{k+1} = a_{k+1}^s,$$

also $a_{k+1}^s = 1$.

[7] Da die Gruppe mit endlichen Untergruppenketten mit keiner ihrer (invarianten) Untergruppen isomorph ist.

4. Satz III. *Für jede Gruppe G mit endlichen Untergruppenketten gilt der Zerlegungssatz.*

Beweis. Wir konstruieren für G die Untergruppenmenge $\mathfrak{M}$, die aus sämtlichen invarianten Untergruppen von G, deren invarianten Untergruppen usw. besteht. Wir wollen annehmen, daß die zu $\mathfrak{M}$ gehörende Einheitsuntergruppe den Index 1 hat. Es seien zu jeder Ordnungszahl α ($\alpha < \beta$, β eine Ordnungszahl) die Elemente von $\mathfrak{M}$ mit dem Index α gewählt worden; diese Elemente bilden die Teilmenge $\mathfrak{M}_\alpha$ von $\mathfrak{M}$. Diejenigen Gruppen von $\mathfrak{M} - \sum\limits_{\alpha<\beta} \mathfrak{M}_\alpha$, welche in dieser Menge keine echten invarianten Untergruppen haben (es gibt solche infolge der Endlichkeit der Ketten), erhalten den Index β. Jede Gruppe von $\mathfrak{M}$ hat jetzt einen gewissen Index; wenn F_1, F_2 zu $\mathfrak{M}$ gehören und F_1 eine echte invariante Untergruppe von F_2 ist, so ist der Index von F_1 kleiner als der von F_2. Es ist klar, daß G dadurch den maximalen Index enthält.

Wir nehmen an, daß G nicht-kommutativ ist und daß für alle Gruppen von $\mathfrak{M}$ außer G unser Satz schon bewiesen ist, da diese Gruppen kleineren Index haben. Es seien $G = H_1 H_2 \ldots H_k = F_1 F_2 \ldots F_l$ zwei Zerlegungen von G in direkte Produkte von unzerlegbaren Faktoren. Die Komponente von H_1 in F_i ist eine Gruppe F_i'; dann ist $G^* = F_1' F_2' \ldots F_l' = H_1 \bar{H}$ mit $\bar{H} \subset H_2 \ldots H_k$. Wenn auch nur für ein i F_i' eine echte invariante Untergruppe von F_i ist, so gilt bereits der Satz für G^*, also muß H_1 z. B. durch einen unzerlegbaren Faktor F_1'' von F_1' ($F_1'' \simeq H_1$ in G^*) ersetzbar sein. Somit ist F_1'' mit $\bar{H}$ teilerfremd, also hat jedes von der Einheit verschiedene Element aus F_1'' die von der Einheit verschiedene Komponente in H_1, also ist F_1'' mit $H_2 \ldots H_k$ auch teilerfremd. Nach Hilfssatz 2 ist jedes Element von F_1'' mit jedem Elemente von $H_2 \ldots H_k$ vertauschbar, und somit ist $G = F_1 F_2 \ldots F_l = F_1'' H_2 \ldots H_k$.[8]) Daraus ergibt sich, infolge der Unzerlegbarkeit von F_1, daß $F_1'' = F_1$, also $H_2 \ldots H_k \simeq F_2 \ldots F_l$. Der Satz gilt bereits für die Gruppe $H_2 \ldots H_k = H_2^* \ldots H_l^*$ ($H_i^* \simeq F_i$), also ist $k = l$ und $H_i \simeq H_i^* \simeq F_i$ ($i = 2, 3, \ldots, k$). Daß $H_1 \simeq F_1$ nicht nur in G^*, sondern auch in G gilt, kann mühelos bewiesen werden.

Wenn aber die Komponente von H_1 in jedem F_i mit diesem F_i übereinstimmt, erhalten wir nach Hilfssatz 2, daß jeder von den Faktoren $H_2, \ldots, H_k$ kommutativ ist, also ist H_1 ein einziger nicht-kommutativer Faktor der ersten Zerlegung. Die entsprechende Betrachtung für H_2 bringt uns gewiß zum ersten Fall, also erhalten wir wieder die Invarianz des Zerlegungstypus; F_1 wird der einzige nicht-kommutative Faktor der zweiten Zerlegung sein. Der aufeinanderfolgende Ersatz der kommutativen Faktoren von der zweiten Zerlegung gibt uns $G = F_1 F_2 \ldots F_k = F_1 H_2 F_3 \ldots F_k$

[8]) Vgl. Fußnote [7]).

$= F_1 H_2 H_3 F_4 \ldots F_k = \ldots = F_1 H_2 H_3 \ldots H_k$, also kann H_1 in der ersten Zerlegung durch F_1 ersetzt werden.

Es wäre interessant, den Beweis des Zerlegungssatzes für jede Gruppe mit endlichen Obergruppenketten zu suchen; dieser Satz gilt für Abelsche Gruppen.

5. Ich werde jetzt zeigen, daß beim Beweise des Zerlegungssatzes für eine willkürliche Gruppe ihre direkten Faktoren *ohne Zentrum* weggelassen werden können, und zwar gilt der

Satz IV. *Wenn $G = H_1 H_2 \ldots H_k$ eine Zerlegung von G in direktes Produkt von unzerlegbaren Faktoren ist und H_1 ohne Zentrum ist, so gibt es in jeder anderen Zerlegung $G = F_1 F_2 \ldots F_l$ in direktes Produkt von unzerlegbaren Faktoren einen Faktor F_1, der zu H_1 zentral isomorph ist und diesen ersetzen kann, und $H_2 \ldots H_k = F_2 \ldots F_l$.*

Beweis. Es sei H_1^i die Komponente von F_i in H_1. H_1^i und H_1^j sind bei $i \neq j$ teilerfremd, da jedes ihnen gemeinsame Element zum Zentrum gehört; jedes Element von H_1^i ist mit jedem Elemente von H_1^j vertauschbar. Somit erhalten wir die Zerlegung von H_1 in direktes Produkt, $H_1 = H_1' H_1^2 \ldots H_1^l$, was nur dann möglich sei, wenn z. B. $H_1' = H_1$ und $H_1^i = 1$ bei $i \neq 1$, also $F_2 \ldots F_l < H_2 \ldots H_k$. Nach Hilfssatz 3, wenn D der Durchschnitt von F_1 und $H_2 \ldots H_k$ ist, so $H_2 \ldots H_k = D F_2 \ldots F_l$, also ist $G = H_1 H_2 \ldots H_k = H_1 D F_2 \ldots F_l = F_1 F_2 \ldots F_l$, also, nach Hilfssatz 1, $F_1 \simeq H_1 D$. Wegen der Unzerlegbarkeit von F_1: $D = 1$, $F_1 \simeq H_1$ und $H_2 \ldots H_k = F_2 \ldots F_l$.

Folgerung 1. (Der Speisersche Satz.) *Der Zerlegungssatz gilt für jede Gruppe ohne Zentrum.*

Folgerung 2. *Der Zerlegungssatz gilt für jede Gruppe mit unzerlegbarem Zentrum.*

Es ist möglich, daß der Zerlegungssatz für jede Gruppe G gilt, wenn er für das Zentrum von G gilt.

6. Ich betrachte endlich eine sehr enge, aber wichtige Klasse von freien Abelschen Gruppen [9]); sie enthält z. B. die additiven Gruppen von allen reellen, allen algebraischen und allen rationalen Zahlen.

Es sei a ein von 1 verschiedenes Element der freien Abelschen Gruppe G. Ein Element b *gehört zum Rationalitätssystem* von a, wenn es solche ganze Zahlen $k, l \neq 0$ gibt, daß $a^k = b^l$. Da G die freie Gruppe ist, so gibt es nur ein solches b für gegebene a, k, l, also ist die Bezeichnung $b = a^{\frac{k}{l}}$ rechtmäßig. Die Menge aller von 1 verschiedenen Ele-

---

[9]) G ist die *freie* Abelsche Gruppe, wenn 1 ihr einziges Element von endlicher Ordnung ist.

mente von G verteilt sich in elementenfremde Teilmengen, die mit Einschluß der Einheit unzerlegbare Untergruppen — die *Rationalitätssysteme* — bilden.

Die freie Abelsche Gruppe G soll *Gruppe mit vollständigen Rationalitätssystemen* heißen, wenn es in G für jedes Element $a \neq 1$ und jede $k, l \neq 0$ das Element $a^{\frac{k}{l}}$ gibt.

Es sei G die Gruppe mit vollständigen Rationalitätssystemen, H eine Untergruppe, die mit jedem ihrer Elemente auch das ganze Rationalitätssystem von diesem enthält, H_1 ein mit H teilerfremdes Rationalitätssystem. Dann *enthält HH_1 mit jedem seiner Elemente das ganze Rationalitätssystem von diesem.* In der Tat, wenn $a \subset HH_1$, also $a = hh_1$, $h \subset H$, $h_1 \subset H_1$, so $(h^{\frac{k}{l}} h_1^{\frac{k}{l}})^l = h^k h_1^k = a^k$, also $a^{\frac{k}{l}} = h^{\frac{k}{l}} h_1^{\frac{k}{l}}$.

Wir beweisen jetzt den Zerlegungssatz in abgeschwächter Form:

Satz V. *Ist die freie Abelsche Gruppe G mit vollständigen Rationalitätssystemen selbst kein Rationalitätssystem, so ist sie zerlegbar; die Rationalitätssysteme und nur diese sind ihre unzerlegbaren direkten Faktoren.*

Beweis. R sei ein willkürliches Rationalitätssystem von G. In der Menge $\mathfrak{M} = G - R + 1$ wählen wir ein Rationalitätssystem aus; diese Untergruppe soll K_1 heißen. Wenn die zunehmenden Untergruppen K_α zu jedem $\alpha < \beta$ schon gewählt sind, so wählen wir in $\mathfrak{M} - \sum_{\alpha<\beta} K_\alpha + 1$ ein solches Rationalitätssystem R' aus, daß $K_\beta = R' \sum_{\alpha<\beta} K_\alpha$ mit R teilerfremd, also eine Teilmenge von $\mathfrak{M}$ ist. Somit erhalten wir in $\mathfrak{M}$ zu einer Ordnungszahl γ eine maximale Gruppe K ($K = K_\gamma$ oder $K = \sum_{\alpha<\gamma} K_\alpha$, wenn γ eine Limeszahl ist), und nach dem oben Gesagten ist $G = RK$.

Es sei umgekehrt $G = G_1 G_2$, wo G_1 der unzerlegbare Faktor ist. Wenn $g_1 \subset G_1$ und $g_1^{\frac{k}{l}} = g_1' g_2'$ ist mit $g_i' \subset G_i$ und $k, l \neq 0$, so ist $g_1^k = g_1'^l g_2'^l$, also $g_2' = 1$, d. h. $g_1^{\frac{k}{l}} \subset G_1$. Infolge der Unzerlegbarkeit von G_1 ist diese das Rationalitätssystem.

Wahrscheinlich wird dieser Satz den Beweis des Zerlegungssatzes für jede freie Abelsche Gruppe erleichtern.

VII.—IX. 1930.

(Eingegangen am 25. 2. 1931.)