Einige Sätze über ganzzahlige Lösungen gewisser Gleichungen und Ungleichungen.

Von

Th. Skolem in Oslo (Kristiania).

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit enthält Sätze über die Verteilung der Gitterpunkte teils auf gewissen Kurven, teils in gewissen Bereichen, nämlich Streifen, deren Höhe (Ordinatendifferenz der beiden begrenzenden Kurven) gegen Null abnimmt, wenn die Abszisse unendlich groß wird. Liegt eine Kurve in einem solchen Streifen oder bildet ganz oder teilweise seine Begrenzung, sage ich, daß der Streifen eine asymptotische Umgebung der Kurve ist.

In § 1 wird bewiesen, daß die Gitterpunktdichte $= 0$ wird in jeder asymptotischen Umgebung von Kurven, die einigen sehr umfassenden Klassen angehören. Ich will zwei einfache Ergebnisse besonders hervorheben: Bedeutet $f_n(x)$ die n-te Differenzfunktion von $f(x)$, so ist in folgenden beiden Fällen die Gitterpunktdichte jeder asymptotischen Umgebung der Kurve $y = f(x)$ gleich Null:

1. Es gibt ein solches n, daß $\lim\limits_{x \to \infty} f_n(x) = C$ ist, C irrationale Konstante.

2. Es ist für ein gewisses n $\lim\limits_{x \to \infty} f_n(x) = 0$, dagegen $x f_n(x)$ abs. $>$ Konstante für alle großen x.

In § 2 werden asymptotische Umgebungen von schwierigeren Kurven betrachtet. Es wird bewiesen, daß die Gitterpunktdichte $= 0$ ist, wenn die Höhe des Streifens mit einer gewissen Schnelligkeit gegen 0 abnimmt für unendliches x. Um die Erfüllbarkeit einer Voraussetzung zu zeigen, wird an einer Stelle ein Satz von O. Perron[1]) über Annäherungswerte algebrai-

[1]) Math. Annalen 83.

scher Zahlen benutzt. Es wird in diesen Fällen durch Gegenbeispiele gezeigt, daß die Verteilungsdichte > 0 werden kann, wenn die Höhe des Streifens im Unendlichen nicht hinreichend schnell abnimmt. Für beliebige Funktionen derart, daß $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ für unendlich wachsendes x selbst unendlich wird, wird gezeigt, wie man leicht solche Zahlen ξ finden kann, daß in gewissen asymptotischen Umgebungen von $y = \xi f(x)$ die durchschnittliche Gitterpunktdichte > 0 ist. Zum Schlusse wird ein Satz über die Verteilung ganzer Werte ganzer transzendenter Funktionen für ganze Werte der unabhängigen Veränderlichen bewiesen.

In § 3 behandle ich die Beziehung der hier bewiesenen Verteilungssätze zu den Sätzen über die Gleichverteilung von Zahlen mod 1. Die beiden Gruppen von Sätzen haben untereinander eine weitgehende Verwandtschaft. Die Gleichverteilungssätze sagen mehr aus; soviel ich weiß, sind sie aber nur in spezielleren Fällen und mittels bedeutend komplizierterer Betrachtungen bewiesen.

In § 4 beweise ich einige genauere Sätze für asymptotische Umgebungen der Kurven $y = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Z. B. wird gezeigt, daß die primitiven Gitterpunkte jedes Streifens $|(y - \alpha x) x| <$ Konst., α irrational, mindestens so zerstreut liegen, wie die Glieder einer wachsenden geometrischen Reihe.

In § 5 beweise ich, daß einige Gleichungen nur endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x und y haben. Diese Entwicklungen können als Erweiterungen einiger Sätze von C. Runge[2]) angesehen werden, in dem Sinne, daß man hier auch transzendente Funktionen berücksichtigt. Z. B. wird folgender Satz hier bewiesen:

Die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^{\frac{n-r}{\nu}}$ sei konvergent für hinreichend große x, ν und n seien ganz positiv und α_r Zahlen eines algebraischen Körpers. Ist $y = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^{\frac{n-r}{\nu}}$ eine transzendente oder gebrochen-algebraische Funktion von x, so gibt es nur endlich viele ganze Zahlen x, für welche auch y ganz wird.

Eine Verallgemeinerung hiervon wird angegeben.

Was die Beziehung dieser Arbeit zur übrigen Literatur über Gitterpunkte betrifft, ist noch folgendes zu sagen: Die wichtigsten bisherigen Untersuchungen über Gitterpunkte bestehen entweder in der Abschätzung der Zahl der Gitterpunkte in geschlossenen Bereichen (Landau, van der Corput) oder gründen sich auf die Sätze Minkowskis über konvexe Figuren. Die dabei entwickelten Methoden sind wohl aber kaum brauchbar, wenn man

[2]) Journal für die r. und a. Mathematik **100**.

die Gitterpunktdichte in asymptotischen Streifen beurteilen will; höchstens kann man die Sätze von Minkowski auf asymptotische Umgebungen von Geraden anwenden, was ja schon Minkowski selbst gemacht hat. In diesem speziellen Falle kann man übrigens auch die Kettenbruchtheorie anwenden.

Die Beweise in vorliegender Abhandlung sind ganz elementar. Fast alles ist auf folgendem einfachem Prinzip aufgebaut:

Ist $f(x_1, x_2, \ldots)$ eine Funktion derart, daß sie einen ganzen Wert haben muß für ganze Werte von $x_1, x_2, \ldots$, und hat man

$$0 < f(x_1, x_2, \ldots) < 1,$$

so muß mindestens eine der Zahlen $x_1, x_2, \ldots$ nicht ganz sein.

An einer einzigen Stelle (in § 4) benutze ich die Tatsache, daß zwischen a und $a + 1$, a reell, eine ganze Zahl vorhanden ist.

§ 1.

Über die Verteilungsdichte der Abszissen der Gitterpunkte in gewissen asymptotischen Streifen.

· Definition 1. Es sei $N(\mu, \nu)$ die Zahl der Elemente einer Menge M ganzer positiver Zahlen, die $\geqq \mu$ und $\leqq \nu$ sind, $\mu \leqq \nu$ vorausgesetzt. Dann nenne ich den Quotienten

$$\frac{N(\mu, \nu)}{\nu - \mu + 1}$$

die Dichte der Menge M im Intervalle μ bis ν.

Falls der Quotient

$$\frac{N(1, \nu)}{\nu}$$

sich einer Grenze g nähert, wenn ν ins Unendliche wächst, nenne ich g *die* durchschnittliche Verteilungsdichte der Menge M in der ganzen Zahlenreihe. Falls kein eindeutig bestimmter Grenzwert existiert, müssen doch Häufungswerte für $\nu \to \infty$ vorhanden sein, da die Quotienten $\frac{N(1, \nu)}{\nu}$ alle zwischen 0 und 1 liegen. Jeden solchen Häufungswert kann man *eine* durchschnittliche Dichte der Menge M nennen.

Im folgenden wird oft der folgende Satz benutzt:

Satz 1. *Gibt es zu jeder positiven Zahl m eine andere positive Zahl μ, welche eine Funktion $\mu(m)$ von m ist, derart, daß die Dichte von M im Intervalle μ bis $\mu + l$ für alle hinreichend großen Werte von l, etwa $l > l(m)$, $< \frac{1}{m}$ ist, so hat M die Dichte Null.*

Beweis. Es sei $m \geqq 1$ und

$$l \geqq (2m - 1)\mu(2m).$$

Der Annahme zufolge ist die Dichte $< \frac{1}{2m}$ in jedem Intervalle, das nur Zahlen $\geqq \mu(2m)$ enthält, wenn die Länge $> l(2m)$ ist. Man bekommt also, wenn zugleich $l > l(2m)$ ist,

$$N(1, l) < \mu(2m) + \frac{l - \mu(2m)}{2m} = \frac{(2m-1)\mu(2m) + l}{2m} \leqq \frac{l}{m}$$

und folglich

$$\frac{N(1, l)}{l} < \frac{1}{m}.$$

Die Dichte von M ist also $< \frac{1}{m}$ in jedem hinreichend langen Intervalle 1 bis l. Da m beliebig groß war, kann M nur die durchschnittliche Dichte Null haben.

Definition 2. Unter einem asymptotischen Streifen oder einer asymptotischen Umgebung der Kurve

$$y = f(x)$$

verstehe ich jedes Gebiet

$$y = f(x) + \vartheta \varphi(x), \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1, \quad \lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0.$$

Satz 2. *Besitzt die n-te Differenzfunktion $f_n(x)$ einer Funktion $f(x)$ einen irrationalen Grenzwert C für $x \to \infty$, so hat die Menge der Gitterpunktabszissen jedes asymptotischen Streifens der Kurve $y = f(x)$ die Dichte Null.*

Beweis. Ich schreibe

$$f(\vartheta, x) = f(x) + \vartheta \varphi(x), \quad \lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0,$$

indem der Streifen durch $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ gegeben ist.

Die Zahl m werde $\geqq n$, ganz positiv und sonst beliebig gewählt; weiter seien $r_0, r_1, \ldots, r_n$ solche ganze Zahlen, daß

$$0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_n \leqq m.$$

Endlich seien ϑ_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ Zahlen aus dem Intervall $0 \leqq \vartheta \leqq 1$.

Aus den Gleichungen

$$f(\vartheta_i, x + r_i) = f(x) + f_1(x)\binom{r_i}{1} + \ldots + f_n(x)\binom{r_i}{n} + g_{r_i}(x) + \vartheta_i \varphi(x + r_i)$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n),$$

wo

$$g_r(x) = f_{n+1}(x)\binom{r}{n+1} + f_{n+2}(x)\binom{r}{n+2} + \ldots + f_r(x)$$

gesetzt ist, bekommt man durch Multiplikation mit den Unterdeterminanten A_i, welche zu den Gliedern der letzten Spalte der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \binom{r_1}{1} & \dots & \binom{r_1}{n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \binom{r_n}{1} & \dots & \binom{r_n}{n} \end{vmatrix}$$

gehören, und nachherige Addition aller Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{n} A_i f(\vartheta_i, x + r_i) = D f_n(x) + \sum_{i=0}^{n} A_i g_{r_i}(x) + \sum_{i=0}^{n} \vartheta_i A_i \varphi(x + r_i).$$

Wenn m festgehalten wird, gibt es nur endlich viele mögliche Wahlen der Zahlen r. Dabei kann also auch D nur endlich viele verschiedene Werte haben. Da $\lim_{x \to \infty} f_n(x) = C$ irrational ist, kann man eine so große positive Zahl G_1 finden, daß für alle $x > G_1$ der Unterschied zwischen $D f_n(x)$ und der nächsten ganzen Zahl $> d$ wird für alle Werte von D.

Nun sei

$$\varepsilon = \frac{d \cdot 2^{n-1}}{(n+1) A \cdot 3^m},$$

wobei $A = \max(|A_0|, \dots, |A_n|)$ für alle Wahlen der r gesetzt ist. Dann gibt es eine so große positive Zahl G_2, daß

$$|f_n(x) - C| < \varepsilon$$

für alle $x > G_2$. Aus der Beziehung

$$f_{n+\nu}(x) = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r \binom{\nu}{r} f_n(x + \nu - r) = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r \binom{\nu}{r} (f_n(x + \nu - r) - C)$$

folgt für alle $x > G_2$ und alle ganzen positiven ν

$$|f_{n+\nu}(x)| < 2^\nu \varepsilon$$

und also auch

$$|g_r(x)| < \left(2\binom{r}{n+1} + 2^2 \binom{r}{n+2} + \dots + 2^{r-n}\right) \varepsilon < \frac{3^r}{2^n} \varepsilon.$$

Für $x > G_2$ gilt deshalb, wenn man die angegebene obere Schranke für ε berücksichtigt,

$$|g_r(x)| < \frac{d}{2(n+1) A}.$$

Außerdem gibt es eine so große positive Zahl G_3, daß

$$|\varphi(x)| < \frac{d}{2(n+1) A}$$

bleibt, wenn $x > G_3$. Für alle $x > \max(G_2, G_3)$ ist deshalb

$$\left|\sum_{i=0}^{n} A_i g_{r_i}(x)\right| < \frac{d}{2}, \qquad \left|\sum_{i=0}^{n} \vartheta_i A_i \varphi(x + r_i)\right| < \frac{d}{2}.$$

Dann sieht man aber, daß für alle $x > \max(G_1, G_2, G_3)$ die Summe

$$\sum_{i=0}^{n} A_i f(\vartheta_i, x + r_i)$$

nie ganz sein kann. Da die Zahlen A_i alle ganz sind, muß mindestens eine der Zahlen $f(\vartheta_i, x + r_i)$ nicht ganz sein. Die Dichte der Gitterpunktabszissen in jedem Intervalle x bis $x + m$ ist also höchstens gleich $\frac{n}{m}$, wenn $x > \max(G_1, G_2, G_3)$ ist. Betrachtet man ein Intervall x bis $x + l$, wobei

$$m h \leqq l < m(h + 1), \qquad h \text{ ganz positiv},$$

so wird die Dichte darin offenbar $\leqq \frac{n(h+1)}{m h}$, was für $h \geqq 1$ immer $\leqq \frac{2n}{m}$ ist.

Da in dieser Betrachtung m beliebig groß war, folgt nach Satz 1 die Richtigkeit des Satzes 2.

Korollar. Die Verteilungsdichte der ganzen Zahlen x, für welche die Beziehung

$$0 \leqq y - \sum_{r=0}^{n} a_r x^{n-r} \leqq \varphi(x), \qquad \lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0,$$

für ein ganzes y stattfindet, ist Null, wenn unter den Koeffizienten a_r mindestens ein irrationaler vorkommt.

Hieraus folgt speziell wieder: Ist

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{n-r},$$

und hat die Menge der ganzen positiven Zahlen x, für welche $f(x)$ ganz rational ist, eine Dichte > 0, so muß $f(x)$ ein Polynom sein mit rationalen Koeffizienten[3]).

Ein weiteres Beispiel der Anwendung des Satzes 2 ist: Im Streifen

$$y = a x + b \log x + \vartheta \cdot \varphi(x), \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1, \quad \lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0, \quad a \text{ irrational},$$

sind die Gitterpunkte so verteilt, daß ihre Abszissen nur eine verschwindende Dichte haben.

---

[3]) Diesen Satz habe ich in meiner Abhandlung: Untersuchungen über die möglichen Verteilungen ganzzahliger Lösungen gewisser Gleichungen, S. 11 (Kristiania Vid. selskaps skrifter 1921) bewiesen.

Satz 3. *Nimmt die erste Differenzfunktion* $f_1(x)$ *von* $f(x)$ *für unendlich wachsendes* x *monoton gegen Null ab, aber so, daß*

$$x f_1(x) > C, \qquad C \textit{ positive Konstante,}$$

bleibt, so hat die Menge M *der Gitterpunktabszissen jeder asymptotischen Umgebung der Kurve* $y = f(x)$ *die Dichte Null.*

Beweis. Die Umgebung sei durch die Beziehung

$$y = f(\vartheta, x) = f(x) + \vartheta \varphi(x), \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq 1, \qquad \lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$$

gegeben.

Die Zahlen der Menge M sind gruppenweise mit leeren Zwischenräumen verteilt, wobei jede Gruppe einem bestimmten Werte y entspricht, wenn man nur so große Werte von x berücksichtigt, daß z. B. $|\varphi(x)| < \frac{1}{3}$ und $|f_1(x)| \leqq \frac{1}{3}$ bleiben. Falls nämlich sowohl x wie $x+1$ zu M gehören, die entsprechenden y aber verschieden sind, bekommt man

$$\begin{aligned} f(x) \qquad &+ \vartheta \varphi(x) \qquad = y \\ f(x+1) &+ \vartheta' \varphi(x+1) = y', \end{aligned}$$

woraus

$$f_1(x) = y' - y - \vartheta' \varphi(x+1) + \vartheta \varphi(x)$$

und daraus, falls $|\varphi(x)|$ und $|\varphi(x+1)|$ beide $< \frac{1}{3}$ sind,

$$|f_1(x)| > \frac{1}{3}.$$

Es sei nun x_1 die kleinste und x_2 die größte Zahl in M, für welche y den ganzen Wert y_1 hat. Allgemein sei x_{2n-1} die kleinste und x_{2n} die größte Zahl in M, für welche y den ganzen Wert y_n hat. Dabei soll $y_1 < y_2 < \ldots$ sein. Dann gelten Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} y_n \quad &= f(x_{2n-1}) + \vartheta_1 \varphi(x_{2n-1}), \\ y_n \quad &= f(x_{2n}) \quad + \vartheta_2 \varphi(x_{2n}), \\ y_{n+1} &= f(x_{2n+1}) + \vartheta_3 \varphi(x_{2n+1}). \end{aligned}$$

Daraus bekommt man

$$\begin{aligned} f(x_{2n}) \quad - f(x_{2n-1}) &\leqq \qquad |\varphi(x_{2n})| \quad + |\varphi(x_{2n-1})| \\ f(x_{2n+1}) - f(x_{2n}) \quad &\geqq 1 - |\varphi(x_{2n+1})| - |\varphi(x_{2n})|. \end{aligned}$$

Weil $f_1(x)$ monoton abnehmen soll, wenn x wächst, muß

$$\frac{f(x_{2n}) - f(x_{2n-1})}{x_{2n} - x_{2n-1}} > f_1(x_{2n})$$

sein, woraus

$$x_{2n} - x_{2n-1} < \frac{|\varphi(x_{2n})| + |\varphi(x_{2n-1})|}{f_1(x_{2n})}.$$

Ebenso muß

$$\frac{f(x_{2n+1})-f(x_{2n})}{x_{2n+1}-x_{2n}} \leqq f_1(x_{2n})$$

sein, woraus

$$x_{2n+1}-x_{2n} \geqq \frac{1-|\varphi(x_{2n+1})|-|\varphi(x_{2n})|}{f_1(x_{2n})}.$$

Folglich wird, wenn σ_n die Dichte von M im Intervalle x_{2n-1} bis $x_{2n+1}-1$ bedeutet,

$$\sigma_n = \frac{x_{2n}-x_{2n-1}+1}{x_{2n+1}-x_{2n-1}} < \frac{|\varphi(x_{2n})|+|\varphi(x_{2n-1})|+f_1(x_{2n})}{1-|\varphi(x_{2n+1})|-|\varphi(x_{2n})|}.$$

Weiter sei $\bar{x}$ ein beliebiger ganzer positiver Wert von x und σ die Dichte von M im Intervalle x_1 bis $\bar{x}$. Ist

$$x_{2\nu} \leqq \bar{x} < x_{2\nu+1},$$

so bekommt man

$$\sigma = \frac{\sigma_1(x_3-x_1)+\sigma_2(x_5-x_3)+\ldots+\sigma_{\nu-1}(x_{2\nu-1}-x_{2\nu-3})+x_{2\nu}-x_{2\nu-1}+1}{\bar{x}-x_1+1}$$

und also

$$\sigma < \frac{\sigma_1(x_3-x_1)+\ldots+\sigma_{\nu-1}(x_{2\nu-1}-x_{2\nu-3})}{x_{2\nu}-x_1+1} + \frac{x_{2\nu}-x_{2\nu-1}+1}{x_{2\nu}-x_1+1}.$$

Ist dagegen

$$x_{2\nu-1} \leqq \bar{x} < x_{2\nu},$$

so bekommt man

$$\sigma = \frac{\sigma_1(x_3-x_1)+\ldots+\sigma_{\nu-1}(x_{2\nu-1}-x_{2\nu-3})+\bar{x}-x_{2\nu-1}+1}{\bar{x}-x_1+1}.$$

Nun ist wie früher

$$\frac{x_{2\nu}-x_{2\nu-1}+1}{x_{2\nu}} < \frac{|\varphi(x_{2\nu})|+|\varphi(x_{2\nu-1})|+f_1(x_{2\nu})}{x_{2\nu}f_1(x_{2\nu})}$$

$$< \frac{|\varphi(x_{2\nu})|+|\varphi(x_{2\nu-1})|+f_1(x_{2\nu})}{C}$$

und ebenso

$$\frac{\bar{x}-x_{2\nu-1}+1}{\bar{x}} < \frac{|\varphi(\bar{x})|+|\varphi(x_{2\nu-1})|+f_1(\bar{x})}{C}.$$

Ist nun ε eine beliebig gegebene positive Größe, so kann man eine so große positive Zahl G finden, daß für alle $x > G$

$$|\varphi(x)| < \min\left(\frac{1}{4}, \frac{\varepsilon}{12}, \frac{\varepsilon C}{12}\right), \quad f_1(x) < \min\left(\frac{\varepsilon}{12}, \frac{\varepsilon C}{12}\right).$$

Es werde $x_1 > G$ gewählt. Wählt man außerdem $\bar{x}$ hinreichend groß, so ist

$$x_{2\nu} \geqq 2x_1 - 2 \quad \text{und} \quad \bar{x} \geqq 2x_1 - 2.$$

Man findet dann durch leichte Rechnungen, daß

$$\sigma_n < \frac{\varepsilon}{2} \ (n = 1, 2, \ldots), \quad \frac{x_{2\nu}-x_{2\nu-1}+1}{x_{2\nu}-x_1+1} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{\bar{x}-x_{2\nu+1}+1}{\bar{x}-x_1+1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Folglich wird in allen Fällen offenbar

$$\sigma < \varepsilon.$$

Nach Satz 1 muß also M die Dichte Null haben, w. z. b. w.

Es liegt nahe zu fragen, wie die Sache sich verhält, wenn $f_1(x)$ wohl monoton abnehmend ist, aber so schnell gegen Null strebt, daß $\lim_{x \to \infty} x f_1(x) = 0$ ist. Es ist leicht zu sehen, daß dann in vielen Fällen die Dichte der Gitterpunktabszissen in gewissen asymptotischen Umgebungen > 0 werden kann. Dies ist z. B. der Fall, wenn $f(x)$ für $x \to \infty$ einen ganzen rationalen Grenzwert G hat; denn setzt man dann z. B.

$$\varphi(x) = G - f(x),$$

so ist $\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$, und $f(x) + \vartheta \varphi(x)$ hat immer den ganzen Wert G für $\vartheta = 1$.

Hat $f(x)$ für $x \to \infty$ einen nicht-ganzen Grenzwert, so gibt es in jeder asymptotischen Umgebung bloß endlich viele Gitterpunkte.

Auf die weitere Frage, wie es steht, wenn $\lim_{x \to \infty} x f_1(x) = 0$ ist, andererseits aber $f(x)$ mit x ins Unendliche wächst, will ich hier nicht eingehen.

Beispiel 1. Als ein Beispiel der Anwendung des Satzes 3 können wir wieder den Streifen

$$y = f(\vartheta, x) = a x + b \log x + \vartheta \varphi(x)$$

betrachten, jetzt aber voraussetzen, daß a eine rationale Zahl $= \frac{a'}{a''}$ ist. Dann kann nicht y ganz sein, ohne daß auch

$$a'' f(\vartheta, x) = a' x + a'' b \log x + a'' \vartheta \varphi(x)$$

ganz wird, und dann wird auch

$$\mathfrak{z} = f_1(\vartheta, x) = a'' f(\vartheta, x) - a' x = a'' b \log x + \vartheta a'' \varphi(x)$$

ganz. Hier erfüllt $\log x$ die für $f(x)$ im Satze 3 erwähnte Bedingung, und außerdem konvergiert $a'' \varphi(x)$ gegen Null, falls dies für $\varphi(x)$ zutrifft. Nach Satz 3 haben also die ganzen positiven Zahlen x, für welche $f_1(\vartheta, x)$ und also auch diejenigen, für welche $f(\vartheta, x)$ ganz wird für ein ϑ zwischen 0 und 1, die Dichte Null.

Beispiel 2. Es sei

$$f(x) = a \log x + b \int_0^x \frac{\sin c x}{x} \, dx,$$

a, b und c reelle Konstanten, $|a| > |b|$.

In jeder asymptotischen Umgebung der Kurve $y = f(x)$ haben die Gitterpunktabszissen die Dichtigkeit 0. Denn es ist

$$f_1(x) = a \log \frac{x+1}{x} + b \int_x^{x+1} \frac{\sin c x}{x} dx$$

und

$$\left| \int_x^{x+1} \frac{\sin cx}{x} dx \right| < \int_x^{x+1} \frac{dx}{x} = \log \frac{x+1}{x}.$$

Folglich ist $\lim_{x \to \infty} f_1(x) = 0$. Andererseits wird

$$x\,|f_1(x)| > (|a| - |b|)\, x \log \frac{x+1}{x} > (|a| - |b|)\left(1 - \frac{1}{2x}\right) > \frac{|a| - |b|}{2}$$

für alle $x > 1$, und $f_1(x)$ behält außerdem immer sein Zeichen für positive x.

Man kann natürlich folgende Erweiterung des Satzes 3 aufstellen:

Sind auf einmal mehrere Kurven gegeben

$$y = f_r(x) \qquad (r = 1, 2, \ldots, \mu),$$

wobei die Funktionen f alle von der im Satze 3 angegebenen Beschaffenheit sind, mit gewissen zugehörigen asymptotischen Umgebungen, so haben die Abszissen der Gitterpunkte, die überhaupt in jenen Umgebungen vorkommen, die Dichte Null.

Dies beruht darauf, daß, wie leicht einzusehen, die Dichte einer Menge M, welche durch Vereinigung einer endlichen Zahl anderer Mengen $M_1, \ldots, M_\mu$ entsteht, gleich Null sein muß, wenn die Dichte jeder Menge M_r $(r = 1, 2, \ldots, \mu)$ gleich Null ist.

Satz 4. *Nimmt die $(n+1)$-te Differenzfunktion $f_{n+1}(x)$ von $f(x)$ bei unendlich wachsendem x monoton gegen Null ab, aber derart, daß*

$$x f_{n+1}(x) > C, \quad C \text{ positive Konstante,}$$

bleibt, so hat die Menge M der Gitterpunktabszissen jeder asymptotischen Umgebung der Kurve $y = f(x)$ die Dichte Null.

Beweis. Die ganze positive Zahl m werde $\geqq n$ und sonst beliebig gewählt. Dann wähle man $r_0, r_1, \ldots, r_n$ als ganze Zahlen, so daß

$$0 \leqq r_0 < r_1 < \ldots < r_n \leqq m.$$

In ähnlicher Weise wie im Beweise des Satzes 2 bekommt man eine Gleichung der Form

$$\sum_{i=0}^{n} A_i f(\vartheta_i, x + r_i) = D f_n(x) + \sum_{i=0}^{n} A_i g_{r_i}(x) + \sum_{i=0}^{n} A_i \vartheta_i \varphi(x + r_i)$$

und

$$|g_r(x)| < \frac{3^r}{2^{n+1}}\varepsilon,$$

wenn x so groß ist, etwa $x > G_1$, daß

$$|f_{n+1}(x)| < \varepsilon.$$

Bei festgehaltenem m hat D bloß endlich viele Werte, den endlich vielen möglichen Wahlen der r entsprechend. Außerdem ist $\lim\limits_{x\to\infty} g_r(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x+r) = 0$. Man kann deshalb für jede Wahl der r

$$\sum_{i=0}^{n} A_i g_{r_i}(x) + \sum_{i=0}^{n} \vartheta_i A_i \varphi(x+r_i) = \Theta\psi(x)$$

schreiben, wobei $0 \leqq \Theta \leqq 1$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \psi(x) = 0$ ist. Zufolge der erwähnten Erweiterung des Satzes 3 haben also die Abszissen der Gitterpunkte, für welche bei irgendeiner Wahl der r die Gleichung

$$y = D f_n(x) + \Theta\psi(x)$$

gilt, die durchschnittliche Dichte Null.

Nun sei M' die Menge der Zahlen x der Reihe $1, 1+m, 1+2m, \ldots$, für welche $\sum\limits_{i=0}^{n} A_i f(\vartheta_i, x+r_i)$ ganz rational wird für irgendeine Wahl der r und der ϑ. So oft x nicht zu M' gehört, muß also mindestens eine der Zahlen $f(\vartheta_i, x+r_i)$ nicht ganz sein, d. h. im Intervall x bis $x+m$ können höchstens n Werte von x zu M gehören.

Es sei δ eine beliebige positive Größe. Da M' auch nur verschwindende Dichte hat, kann man eine von δ und m abhängige Zahl L finden, so daß für $l > L$ die Dichte von M' im Intervall 1 bis $1 + lm$ immer $\leqq \frac{\delta}{m}$ ist. Unter den Zahlen $1, 1+m, \ldots, 1+(l-1)m$, $1+lm$ können also höchstens

$$\frac{\delta}{m}(lm+1) = \delta l + \frac{\delta}{m}$$

zu M' gehören, während wenigstens

$$(1-\delta)l + 1 - \frac{\delta}{m}$$

nicht zu M' gehören. Weiter sei

$$1 + lm \leqq \mu < 1 + (l+1)m, \quad l \text{ ganz positiv.}$$

Wenn $N_{1,\mu}$ bzw. $\sigma_{1,\mu}$ die Anzahl der Elemente bzw. die Dichte der Menge M im Intervalle 1 bis μ bedeuten, bekommt man also

$$N_{1,\mu} \leqq m\left(\delta l + \frac{\delta}{m}\right) + n(1-\delta)l + n - \frac{n}{m}\delta$$

und

$$\sigma_{1,\mu} \leqq \delta + \frac{n}{m}(1-\delta) + \frac{n}{ml} - \frac{n}{m^2 l}\delta < \delta + \frac{n}{m} + \frac{n}{ml}.$$

Setzt man nun z. B.

$$\delta < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad m > \frac{3n}{\varepsilon},$$

so wird offenbar

$$\sigma_{1,\mu} < \varepsilon.$$

Hierdurch ist Satz 4 bewiesen.

Korollar 1. Die Verteilungsdichte der ganzen (positiven) Zahlen x, für welche die Beziehung

$$0 \leqq y - \sum_{r=0}^{n} a_r x^{\frac{n-r}{m}} \leqq \varphi(x), \qquad \lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$$

für eine ganze Zahl y stattfindet, ist Null, wenn die Summe nicht ein Polynom mit rationalen Koeffizienten ist.

Korollar 2. Ist

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{\frac{n-r}{m}},$$

so kann $f(x)$ nicht ganz sein für eine Menge ganzer positiver Zahlen nichtverschwindender Dichte, ohne daß $f(x)$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten ist[4]).

Korollar 3. Es sei $F(x, y)$ ein Polynom derart, daß kein Polynom von x allein, statt y eingesetzt, die Gleichung $F(x, y) = 0$ identisch in x befriedigt. Dann haben die Abszissen der Gitterpunkte, welche auf der Kurve $F(x, y) = 0$ liegen, die Verteilungsdichte Null[5]).

Satz 5. *Es sei*

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x + n - i)$$

und

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i},$$

wobei $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *ganze rationale Zahlen sind. In jeder asymptotischen Umgebung der Kurve*

$$y = f(x)$$

wird die Dichte der Gitterpunktabszissen $= 0$ *sein, wenn* $\psi(x)$ *und* $P(t)$ *folgenden Bedingungen genügen:*

---

[4]) Diesen Satz habe ich schon l. c. S. 13 bewiesen.

[5]) l. c. S. 18.

Ist N eine ganze positive Zahl und sind $A_0, A_1, \ldots, A_N$ solche ganze rationale Zahlen, daß

$$\sum_{l=0}^{N} A_l \neq 0,$$

so ist die Dichte der Gitterpunktabszissen in jeder asymptotischen Umgebung der Kurve

$$y = \sum_{l=0}^{N} A_l \psi(x+l)$$

gleich 0.

Ist $Q(t) = \Sigma b_j t^j$ ein solches Polynom, daß

$$P(t)\,Q(t) = \sum_{k=0}^{n} B_k t^{r_k}, \qquad 0 \leqq r_0 < r_1 < \ldots < r_n,$$

alle B_k ganz rational, und zugleich passend gewählt, falls mehrere solche vorhanden sind[6]*, so soll eine positive Zahl a derart existieren, daß*

$$Q(1) \neq 0,$$

wenn die Differenzen $r_{i+1} - r_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ alle $\geqq a$ sind.

Beweis. Die asymptotische Umgebung der Kurve $y = f(x)$ sei gegeben durch

$$y = f(\vartheta, x) = f(x) + \vartheta\,\varphi(x), \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq 1, \qquad \lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0.$$

M sei die Menge der Abszissen der darin vorkommenden Gitterpunkte. Man bekommt

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f(\vartheta_{n-i}, x+n-i) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x+n-i) + \sum_{i=0}^{n} \vartheta_{n-i} a_i \varphi(x+n-i)$$
$$= \psi(x) + \sum_{i=0}^{n} \vartheta_{n-i} a_i \varphi(x+n-i)$$

und daraus

$$\Sigma b_j \Sigma a_i f(\vartheta_{n-i+j}, x+n-i+j)$$
$$= \Sigma b_j \psi(x+j) + \Sigma b_j \Sigma \vartheta_{n-i+j} a_i \varphi(x+n-i+j)$$

oder nach der Voraussetzung über $Q(t)$

$$\Sigma B_k f(\vartheta_{r_k}, x+r_k) = \Sigma b_j \psi(x+j) + \Theta \cdot \Phi(x),$$
$$0 \leqq \Theta \leqq 1, \qquad \lim_{x \to \infty} \Phi(x) = 0.$$

Nach der über die Funktion $\psi(x)$ gemachten Voraussetzung, und weil $Q(1) \neq 0$ sein soll, wird die Dichte der Menge M' ganzer positiver x, für welche

$$\Sigma B_k f(\vartheta_{r_k}, x+r_k)$$

---

[6]) Bei beliebiger Wahl der Zahlen r gibt es immer solche Polynome $Q(t)$.

ganz sein kann für irgendwelche ϑ zwischen 0 und 1, gleich Null sein, wenn alle Differenzen $r_{i+1} - r_i \geqq a$ und die r sonst irgendwie zwischen 0 und m gewählt sind.

Jetzt wähle ich die ganze positive Zahl $m > an$, setze für x die Zahlen der Reihe $1, 1 + m, 1 + 2m, \ldots$ und wähle für jedes solche x alle möglichen Reihen der r, für welche $r_n < m$ und alle $r_{i+1} - r_i \geqq a$ sind. Die Dichte der Zahlen aus M', die in der Reihe $1, 1 + m, \ldots, 1 + lm$ auftreten, wird dann, wenn l hinreichend groß ist, etwa $l > L(\delta, m)$,

$$\leqq \frac{\delta}{m}$$

sein, wobei δ eine beliebig gewählte positive Zahl ist. Folglich gehören unter den Zahlen $1, 1 + m, \ldots, 1 + lm$ höchstens

$$\frac{\delta}{m}(1 + lm)$$

zu M', während wenigstens

$$(1 - \delta) l + 1 - \frac{\delta}{m}$$

nicht zu M' gehören. So oft aber x nicht zu M' gehört, können im Intervalle x bis $x + m$ höchstens an Zahlen aus M vorkommen; denn sind

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{na}$$

$na + 1$ verschiedene ganze positive Werte von x, so sind die Differenzen

$$x_a - x_0,\ x_{2a} - x_a,\ \ldots,\ x_{na} - x_{(n-1)a}$$

alle $\geqq a$.

Die Anzahl der Elemente von M im Intervalle 1 bis x, wenn

$$1 + ml \leqq x < 1 + m(l + 1),$$

wird also höchstens

$$m \frac{\delta}{m}(1 + ml) + an(1 - \delta) l + an\left(1 - \frac{\delta}{m}\right)$$

und die Dichte von M in demselben Intervalle

$$\sigma(1, x) \leqq \frac{m\delta l + \delta + an(1 - \delta) l + an\left(1 - \frac{\delta}{m}\right)}{1 + ml} < \delta + \frac{an}{m} + \frac{an}{ml}.$$

Wählt man z. B.

$$\delta < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad m > \frac{3an}{\varepsilon},$$

so wird für jeden positiven Wert von l $(> L)$

$$\sigma(1, x) < \varepsilon,$$

wodurch bewiesen ist, daß M nur eine verschwindende Dichte haben kann.

Um über die Tragweite dieses Satzes klar zu werden, ist es wünschenswert zu zeigen, daß große Klassen von Funktionen $\psi(x)$ und $P(t)$ existieren, welche die angegebenen Bedingungen erfüllen.

So ist z. B. $\psi(x)$ von der verlangten Art in folgenden beiden Fällen:

1. Eine Differenzfunktion $\psi_n(x)$ von $\psi(x)$ konvergiert gegen einen irrationalen Grenzwert g, wenn x ins Unendliche wächst.

2. Man hat

$$\lim_{x\to\infty} \psi_n(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\psi_n(x+1)}{\psi_n(x)} = 1,$$

$$x\,\psi_n(x) > C \quad \text{für alle hinreichend großen } x.$$

Setzt man nämlich im ersten Falle

$$F(x) = \Sigma A_l\,\psi(x+l), \qquad F_n(x) = \Sigma A_l\,\psi_n(x+l),$$

so folgt

$$\lim_{x\to\infty} F_n(x) = \lim_{x\to\infty} \psi_n(x)\cdot \Sigma A_l = g\cdot \Sigma A_l.$$

Ist g irrational, alle A_l ganz rational und $\Sigma A_l \neq 0$, so konvergiert also auch $F_n(x)$ gegen einen irrationalen Grenzwert. Nach Satz 2 folgt also, daß $\psi(x)$ in diesem Falle von der verlangten Art ist.

Aus $\lim\limits_{x\to\infty} \psi_n(x) = 0$ im zweiten Falle folgt sofort $\lim\limits_{x\to\infty} F_n(x) = 0$. Wenn $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\psi_n(x+1)}{\psi_n(x)} = 1$ ist, kann man schreiben

$$\frac{\psi_n(x+l)}{\psi_n(x)} = 1 + \varepsilon_l(x),$$

wobei $\lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon_l(x) = 0$. Dann bekommt man

$$x\,F_n(x) = x\,\psi_n(x) \sum A_l\,\frac{\psi_n(x+l)}{\psi_n(x)} = x\,\psi_n(x)\Big(\sum A_l + \sum A_l\,\varepsilon_l(x)\Big).$$

Für alle hinreichend großen x hat man z. B.

$$\Big|\sum A_l\,\varepsilon_l(x)\Big| < \frac{\Sigma A_l}{2},$$

wobei ΣA_l positiv vorausgesetzt ist (man soll ja $\Sigma A_l \neq 0$ haben). Folglich

$$x\,F_n(x) > C\cdot\frac{\Sigma A_l}{2}$$

für alle hinreichend großen x. Nach Satz 4 besitzt also $\psi(x)$ auch in diesem Falle die verlangte Eigenschaft.

Wenn $\psi_1(x)$ von der verlangten Art ist, so ist auch

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$$

von dieser Art, wenn $\psi_2(x)$ für alle hinreichend großen ganzen positiven x entweder ganzwertig ist oder rational mit einem gewissen größten Nenner.

Folgende Bemerkung kann auch gemacht werden: Die Funktion $f(x)$ im Satze 5 erfüllt wieder die für die Funktion $\psi(x)$ aufgestellte Forderung. Es seien nämlich $A_0', \ldots, A_{N'}'$ solche Konstanten, daß

$$\sum_{k=0}^{N'} A_k' \neq 0$$

ist, und man setze

$$F(x) = \sum_{k=0}^{N'} A_k' f(x+k), \qquad \Psi(x) = \sum_{k=0}^{N'} A_k' \psi(x+k).$$

Dann wird

$$\sum_{i=0}^{n} a_i F(x+n-i) = \Psi(x),$$

und außerdem bekommt man

$$\sum_{l=0}^{N} A_l \Psi(x+l) = \sum_{l=0}^{N} A_l \sum_{k=0}^{N'} A_k' \psi(x+k+l) = \sum_{t=0}^{N+N'} C_t \psi(x+t),$$

wobei

$$C_t = \sum_{l=0}^{t} A_l A_{t-l}'$$

gesetzt ist. Dann ist aber

$$\sum_{t=0}^{N+N'} C_t = \sum_{l=0}^{N} A_l \cdot \sum_{k=0}^{N'} A_k' \neq 0,$$

wenn $\sum_{l=0}^{N} A_l \neq 0$ ist.

Nach Satz 5 ist also die Gitterpunktdichte $= 0$ in jedem asymptotischen Streifen der Kurve $y = F(x)$.

Weiter ist $P(t)$ jedenfalls von der verlangten Art im folgenden Falle: Die Wurzeln der Gleichung

$$P(t) = 0$$

sind alle reell und $\neq -1$; außerdem ist der Quotient zweier Wurzeln auch $\neq -1$.

Wahrscheinlich erfüllt $P(t)$ auch sonst die im Satze 5 aufgestellte Bedingung; allein das mag hier dahingestellt werden.

Es soll also bewiesen werden, daß, wenn $Q(t)$ ein solches Polynom ist, daß

$$P(t)\,Q(t) = \sum B_k t^{r_k}, \qquad 0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_n,$$

immer

$$Q(1) \neq 0,$$

wenn alle Differenzen $r_{i+1} - r_i > a$ sind.

Nach der Annahme können die Wurzeln von $P(t) = 0$ ihrem Zahlwerte nach in eine Reihe geordnet werden

$$|t_1| > |t_2| > \ldots > |t_r|.$$

Dabei kann t_i die Multiplizität μ_i haben. Falls $t = 1$ eine Wurzel ist, sei $t_\varrho = 1$. Dann sind $t_1, t_2, \ldots, t_{\varrho-1}, t_{\varrho+1}, \ldots, t_\nu$ Wurzeln der Gleichung $P(t)\,Q(t) = 0$ mindestens von den Multiplizitäten $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{\varrho-1}, \mu_{\varrho+1}, \ldots, \mu_\nu$, während t_ϱ mindestens eine $(\mu_\varrho + 1)$-fache Wurzel der letzteren Gleichung ist, falls $Q(1) = 0$ ist. Wegen $\Sigma \mu_i = n$ bekommt man $D = 0$, wenn D die Determinante

$$\begin{vmatrix}
\frac{r_n!}{(r_n-\mu_1+1)!}\,t_1^{r_n-\mu_1+1} & \frac{r_{n-1}!}{(r_{n-1}-\mu_1+1)!}\,t_1^{r_{n-1}-\mu_1+1} & \ldots \\
\frac{r_n!}{(r_n-\mu_1+2)!}\,t_1^{r_n-\mu_1+2} & \frac{r_{n-1}!}{(r_{n-1}-\mu_1+2)!}\,t_1^{r_{n-1}-\mu_1+2} & \ldots \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
t_1^{r_n} & t_1^{r_{n-1}} & \ldots \\
\frac{r_n!}{(r_n-\mu_2+1)!}\,t_2^{r_n-\mu_2+1} & \frac{r_{n-1}!}{(r_{n-1}-\mu_2+1)!}\,t_2^{r_{n-1}-\mu_2+1} & \ldots \\
\frac{r_n!}{(r_n-\mu_2+2)!}\,t_2^{r_n-\mu_2+2} & \frac{r_{n-1}!}{(r_{n-1}-\mu_2+2)!}\,t_2^{r_{n-1}-\mu_2+2} & \ldots \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
t_2^{r_n} & t_2^{r_{n-1}} & \ldots \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot
\end{vmatrix}$$

bedeutet. Setzt man

$$D_1 = \begin{vmatrix}
\frac{r_n!}{(r_n-\mu_1+1)!}\,t_1^{r_n-\mu_1+1} & \frac{r_{n-1}!}{(r_{n-1}-\mu_1+1)!}\,t_1^{r_{n-1}-\mu_1+1} & \ldots & \\
\frac{r_n!}{(r_n-\mu_1+2)!}\,t_1^{r_n-\mu_1+2} & \frac{r_{n-1}!}{(r_{n-1}-\mu_1+2)!}\,t_1^{r_{n-1}-\mu_1+2} & \ldots & \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
t_1^{r_n} & t_1^{r_{n-1}} & \ldots & t_1^{r_{n-\mu_1+1}}
\end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix}
\frac{r_{n-\mu_1}!}{(r_{n-\mu_1}-\mu_2+1)!}\,t_2^{r_{n-\mu_1}-\mu_2+1} & \frac{r_{n-\mu_1-1}!}{(r_{n-\mu_1-1}-\mu_2+1)!}\,t_2^{r_{n-\mu_1-1}-\mu_2+1} & \ldots & \\
\frac{r_{n-\mu_1}!}{(r_{n-\mu_1}-\mu_2+2)!}\,t_2^{r_{n-\mu_1}-\mu_2+2} & & \ldots & \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
t_2^{r_{n-\mu_1}} & t_2^{r_{n-\mu_1-1}} & \ldots & t_2^{r_{n-\mu_1-\mu_2+1}}
\end{vmatrix}$$

usw., so wird

$$D_1 = T_1\, t_1^{r_n + r_{n-1} + \cdots + r_{n-\mu_1+1} - \binom{\mu_1}{2}}, \qquad D_2 = T_2\, t_2^{r_{n-\mu_1} + r_{n-\mu_1-1} + \cdots + r_{n-\mu_1-\mu_2+1} - \binom{\mu_2}{2}}$$

usw., wobei $T_1, T_2, \ldots, T_\nu$ ganze rationale nicht-verschwindende Zahlen sind, nämlich

$$T_l = \dot{\Pi}(r_i - r_k),$$

wenn hier i und k alle Werte $> n - \mu_1 - \ldots - \mu_l$ und $\leqq n - \mu_1 - \ldots - \mu_{l-1}$ durchlaufen, während immer $i > k$ bleibt. Denkt man sich die Determinante D entwickelt, so erhält man $(n+1)!$ Glieder und darunter

$$\mu_1!\, \mu_2! \ldots \mu_{\varrho-1}!\, (\mu_\varrho + 1)!\, \mu_{\varrho+1}! \ldots \mu_\nu!$$

Glieder, die auch durch Multiplikation der entwickelten Determinanten $D_1, D_2, \ldots, D_\nu$ entstehen.

Weiter sieht man ohne Schwierigkeit, daß in keinem Gliede der entwickelten Determinante D der Exponent von t_1 größer als

$$l_1 = r_n + r_{n-1} + \ldots + r_{n-\mu_1+1} - \binom{\mu_1}{2}$$

werden kann. Ebenso kann die Summe der Exponenten von t_1 und t_2 in keinem Gliede größer als

$$l_1 + l_2 = r_n + r_{n-1} + \ldots + r_{n-\mu_1-\mu_2+1} - \binom{\mu_1}{2} - \binom{\mu_2}{2}$$

werden usw. Betrachtet man alle Glieder, worin t_1 seinen maximalen Exponenten l_1 hat, so kann t_2 nie einen größeren Exponenten als

$$l_2 = r_{n-\mu_1} + r_{n-\mu_1-1} + \ldots + r_{n-\mu_1-\mu_2+1} - \binom{\mu_2}{2}$$

haben usw.

Man sieht deshalb auch leicht ein, daß der Quotient

$$\frac{G}{t_1^{l_1}\, t_2^{l_2} \ldots t_\nu^{l_\nu}},$$

wo G ein beliebiges Glied der entwickelten Determinante D ist, das nicht im Produkte der Determinanten D_i vorkommt, in der Form

$$h\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{R_1}\left(\frac{t_3}{t_1}\right)^{R_2} \cdots \left(\frac{t_\nu}{t_1}\right)^{R_{\nu-1}}\left(\frac{t_3}{t_2}\right)^{S_1} \cdots \left(\frac{t_\nu}{t_{\nu-1}}\right)^{U}$$

darstellbar ist, wobei h eine ganze (von $t_1, \ldots, t_\nu$ unabhängige) rationale Zahl und die $R, S, \ldots U$ Summen der Differenzen $r_{i+1} - r_i$ sind. Infolgedessen werden alle diese Quotienten

$$< \frac{T_1 T_2 \ldots T_\nu}{(n+1)!},$$

wenn alle Differenzen $r_{i+1} - r_i > a$ sind, a eine passend gewählte positive Zahl. Da die Zahl der Glieder G kleiner als $(n+1)!$ ist, kann offenbar die Determinante D dann nicht mehr verschwinden, und folglich muß $Q(1) \neq 0$ sein.

Ich gebe hier einige einfache Beispiele von Kurven, die kraft des Satzes 5 derart sind, daß in jeder asymptotischen Umgebung von ihnen die Dichte der Gitterpunktabszissen $= 0$ ist.

Beispiel 1.

$$y = f(x) = a(1+\sqrt{2})^x + b(1-\sqrt{2})^x + P(x),$$

a und b beliebige reelle Zahlen, $P(x)$ ein Polynom mit mindestens einem irrationalen Koeffizienten. Man bekommt nämlich hier

$$f(x+2) - 2f(x+1) - f(x) = P(x+2) - 2P(x+1) - P(x) = Q(x),$$

und dabei ist $Q(x)$ wieder ein Polynom mit (mindestens) einem irrationalen Koeffizienten. Es gibt deshalb eine Differenzfunktion von $Q(x) - Q_0(x)$, wobei $Q_0(x)$ ein rationalzahliges Polynom bedeutet, welche einen konstanten irrationalen Wert hat.

Beispiel 2.

$$y = f(x) = \left(\frac{a}{b}\right)^x + P(x),$$

$P(x)$ die frühere Bedeutung, a und b (teilerfremde) ganze rationale Zahlen. Hier bekommt man

$$b f(x+1) - a f(x) = b P(x+1) - a P(x) = Q(x),$$

wo $Q(x)$ wieder ein Polynom ist mit einem irrationalen Koeffizienten, wenn man von dem trivialen Fall $a = b = 1$, $P(x)$ selbst die Summe einer irrationalen Konstanten und eines rationalzahligen Polynoms, absieht.

Beispiel 3.

$$y = f(x) = a(1+\sqrt{2})^x + b(1-\sqrt{2})^x + F(x),$$

wobei $F(x)$ eine derartige Differenzfunktion $F_n(x)$ besitzt, daß

$$\lim_{x\to\infty} F_n(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{F_n(x+1)}{F_n(x)} = 1,$$

$$x F_n(x) > C \text{ für alle hinreichend großen } x.$$

Dies ist z. B. der Fall, wenn

$$F(x) = C_\alpha x^\alpha + C_\beta x^\beta + \ldots,$$

wobei $\alpha, \beta, \ldots$ abnehmende reelle Zahlen sind, α nicht-ganz und die Koeffizienten $C_\alpha, C_\beta, \ldots$ solche reelle Zahlen, daß die Reihe für $F(x)$, falls sie überhaupt unendlich ist, für hinreichend große positive x konvergiert.

Beispiel 4.

$$y = \left(\frac{a}{b}\right)^x + F(x),$$

$F(x)$ dieselbe Bedeutung wie im Beispiel 3.

Beispiel 5 (Verallgemeinerung des Beispiels 1).

$$y = f(x) = P_1(x)(1+\sqrt{2})^x + P_2(x)(1-\sqrt{2})^x + P(x),$$

$P(x)$ ein Polynom mit einem irrationalen Koeffizienten, $P_1(x)$ und $P_2(x)$ beliebige Polynome.

Es sei nämlich $n = \max(n_1, n_2)$, wobei n_1 und n_2 die Grade der Polynome P_1 und P_2 sind. Setzt man

$$\Pi(t) = t^2 - 2t - 1, \qquad \Pi(t)^n = \sum_{i=0}^{2n} a_i t^{2n-i},$$

so bekommt man

$$\sum_{i=0}^{2n} a_i f(x + 2n - i) = \sum_{i=0}^{2n} a_i P(x + 2n - i),$$

und da

$$\Pi(1)^n = (-2)^n \neq 0,$$

ist $\sum_{i=0}^{2n} a_i P(x + 2n - i)$ ein Polynom, das mindestens einen irrationalen Koeffizienten hat.

Es liegt nahe zu versuchen, eine Erweiterung des Satzes 5 dadurch zu erhalten, daß man die dort auftretenden Zahlen a_i durch ganzwertige Funktionen ersetzt. Der Satz von der verschwindenden Dichte der Gitterpunktabszissen hört aber dann auf, für *beliebige* asymptotische Streifen gültig zu sein. Ich will einige Sätze jener Art im folgenden Paragraphen aufstellen.

Da die ganzen Zahlen jedes quadratisch imaginären Zahlkörpers auch einen diskontinuierlichen Integritätsbereich bilden, bleiben die hier bewiesenen Sätze mit leichter Modifikation ihrer Formulierung noch gültig, wenn y und die Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ Werte aus einem solchen Körper erhalten, wenn für x noch ganze positive rationale Zahlen eingesetzt werden, während die asymptotische Umgebung dadurch gegeben ist, daß in der Beziehung

$$y = f(x) + \vartheta\varphi(x)$$

ϑ beliebige komplexe Werte, die absolut $\leqq 1$ sind, haben soll.

Auf Grund dieser Tatsache ist es möglich, Satz 5 auch in einem Falle zu beweisen, wo die Funktion $P(t)$ in diesem Satze nur komplexe Wurzeln hat. Hat nämlich

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{2n} a_i f(x + 2n - i)$$

die früher geforderte Eigenschaft, und ist

$$\sum a_i t^{2n-i} = P(t) = P_1(t)^2 + m P_2(t)^2,$$

sind $P_1(t)$ und $P_2(t)$ absolut ganzzahlige Polynome, m eine quadratfreie natürliche Zahl, sind die Wurzeln der Gleichung

$$P_1(t) + \sqrt{-m}\, P_2(t) = 0$$

alle imaginär und derart, daß weder eine der Wurzeln absolut $= 1$ noch der Quotient zweier Wurzeln absolut $= 1$ ist, so haben die Abszissen der Gitterpunkte jeder asymptotischen Umgebung der Kurve $y = f(x)$ die Dichte 0.

Setzt man nämlich

$$\Pi_1(t) = P_1(t) + \sqrt{-m}\, P_2(t) = \sum b_i t^{n-i},$$
$$\Pi_2(t) = P_1(t) - \sqrt{-m}\, P_2(t) = \sum b_i' t^{n-i},$$

so sieht man, daß sowohl die relativ zu $\Pi_1(t)$ gebildeten Funktionen $Q_1(t)$ (siehe den Beweis des Satzes 5) wie die relativ zu $\Pi_2(t)$ gebildeten Funktionen $Q_2(t)$ die Eigenschaft haben, daß $Q_1(1) \neq 0$ bzw. $Q_2(1) \neq 0$ ist, wenn alle Differenzen $r_{i+1} - r_i \geqq a$ sind.

Schreibt man deshalb

$$\sum b_i f(x + n - i) = \chi(x),$$

so daß

$$\sum b_i' \chi(x + n - i) = \psi(x)$$

wird, so bekommt man die Folgerungen:

In jeder asymptotischen Umgebung der Kurve $y = \chi(x)$ haben die ganzen positiven x, für welche y eine ganze Zahl des Körpers $R(\sqrt{-m})$ ist, die Dichte 0. Zugleich sieht man, daß $\chi(x)$ die für $\psi(x)$ im Satze 5 aufgestellte Forderung erfüllt. (Wir haben ja früher gesehen, daß $f(x)$ im Satze 5 immer wieder von derselben Art wie $\psi(x)$ ist.) Hieraus folgt also wieder: In jeder asymptotischen Umgebung der Kurve $y = f(x)$ haben die x, für welche y eine ganze Zahl aus $R(\sqrt{-m})$ ist, die Dichte 0. Daraus folgt a fortiori die Richtigkeit der obigen Behauptung.

Als einfaches Beispiel kann man einen beliebigen asymptotischen Streifen der Kurve

$$y = \xi\left((1 + \sqrt{-2})^x + (1 - \sqrt{-2})^x\right) + R(x)$$

betrachten, wobei ξ eine beliebige reelle Zahl ist und $R(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, unter welchen mindestens ein irrationaler vorkommt. Hier wird

$$P(t) = t^2 - 2t + 3 = (t-1)^2 + 2,$$

d. h.

$$\Pi_1(t) = t - 1 - \sqrt{-2}, \qquad \Pi_2(t) = t - 1 + \sqrt{-2}.$$

§ 2.

Über die Verteilungsdichte der Gitterpunktabszissen in gewissen asymptotischen Umgebungen von Kurven schwierigerer Art.

Satz 6. *Es seien, unter* $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ *ganzwertige Polynome verstanden,*

$$\psi(x) = \sum a_i(x)\, f(x+n-i)$$

und

$$P(t) = \sum a_i(x)\, t^{n-i}.$$

In jedem Gebiete, das durch die Beziehungen

$$y = f(x) + \vartheta\varphi(x),\quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1,\qquad \lim_{x\to\infty} x^{\nu}\varphi(x) = 0 \text{ für jede positive Zahl } \nu,$$

gegeben ist, muß die Dichte der Gitterpunktabszissen $= 0$ *sein, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Sind* $A_l(x)$ *solche Polynome, daß in* $\Sigma A_l(x)$ *die höchste in den Funktionen* $A_l(x)$ *überhaupt vorkommende Potenz von* x *nicht ausfällt, so ist in jedem Gebiete*

$$y = \sum A_l(x)\psi(x+l) + \Theta\cdot\Phi(x),\quad 0 \leqq \Theta \leqq 1,$$
$$\lim_{x\to\infty} x^{\nu}\,\Phi(x) = 0 \text{ für alle } \nu > 0$$

die Dichte der Gitterpunktabszissen $= 0$. *Es genügt also a fortiori, wenn diese Dichte Null ist in jeder asymptotischen Umgebung.*

2. *Ist* $Q(t) = \Sigma\, b_j(x)\, t^j$ *derart, daß*

$$\sum_i \sum_j b_j(x)\, a_i(x+j)\, t^{n-i+j} = \sum B_k(x)\, t^{r_k},$$

alle $B_k(x)$ *ganzwertige Polynome, so gibt es eine positive Größe* g *derart, daß, wenn* b_j *der Koeffizient in* $b_j(x)$ *der höchsten in den Funktionen* $b_j(x)$ *überhaupt vorkommenden Potenz von* x *bedeutet,*

$$\sum b_j' \neq 0$$

ist, wenn alle $r_{i+1} - r_i > g$ *sind.*

Der Beweis ist dem Beweise des Satzes 5 ganz ähnlich, so daß es wohl nicht nötig ist, ihn auszuführen. Es muß aber gezeigt werden, daß Funktionen $\psi(x)$ und $P(t)$ in ausgedehntem Maße existieren, die den angegebenen Bedingungen genügen.

Besitzt $\psi(x)$ für hinreichend große positive x eine Entwicklung der Form

$$\psi(x) = c_0 x^{\alpha_0} + c_1 x^{\alpha_1} + \ldots,\qquad \alpha_0 > \alpha_1 > \ldots,$$

worin entweder c_0 irrational oder α_0 nicht ganz ist, so sieht man wegen der über $\Sigma A_l(x)$ gemachten Voraussetzung, daß

$$\sum A_l(x)\,\psi(x+l) = d_0 x^{\beta_0} + d_1 x^{\beta_1} + \ldots,\quad \beta_0 > \beta_1 > \ldots,$$

wobei entweder d_0 irrational oder β_0 nicht ganz ist, und folglich wird die Dichte der Gitterpunktabszissen jeder asymptotischen Umgebung der Kurve

$$y = \sum A_l(x)\,\psi(x+l)$$

gleich Null sein.

Weiter hat $P(t)$ die geforderte Eigenschaft jedenfalls dann, wenn die verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$\sum a_i t^{n-i} = 0,$$

worin a_i der in $a_i(x)$ auftretende Koeffizient der höchsten in den Funktionen $a_i(x)$ vorkommenden Potenz von x ist, ihrem absoluten Werte nach in eine Reihe geordnet werden können

$$|t_1| > |t_2| > \ldots > |t_\nu|,$$

und außerdem -1 keine Wurzel ist. Man hat nämlich

$$\sum B_k t^{r_k} = \sum a_i t^{n-i} \sum b_j t^j,$$

wenn hier B_k den in $B_k(x)$ auftretenden Koeffizienten der höchsten in den Funktionen $B_0(x), B_1(x), \ldots$ überhaupt vorkommenden Potenz von x bedeutet. Daß $P(t)$ die geforderte Eigenschaft hat, sieht man dann wie früher.

Man kann fragen, ob Satz 6 nicht erweitert werden könnte, so daß man die Dichte Null für die Gitterpunktabszissen auch innerhalb solcher Umgebungen bekäme, deren Höhe nicht so schnell abnimmt. Folgende Betrachtungen zeigen jedoch, daß dies nicht möglich ist.

Es sei

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(\nu n)!},$$

alle a_n und ν ganze positive Zahlen. Außerdem sei a_n für jedes n so gewählt, daß

$$\frac{a_n - 1}{(\nu n - \nu + 1)(\nu n - \nu + 2)\ldots(\nu n)} < \eta < \frac{a_n}{(\nu n - \nu + 1)(\nu n - \nu + 2)\ldots(\nu n)},$$

η eine irrationale Zahl. Dann folgt

$$\xi \cdot (\nu n - \nu)! = h + \frac{a_n \cdot (\nu n - \nu)!}{(\nu n)!} + \frac{a_{n+1}(\nu n - \nu)!}{(\nu n + \nu)!} + \cdots,$$

wobei h eine ganze Zahl, nämlich $= \sum_{r=0}^{n-1} a_r \frac{(\nu n - \nu)!}{(\nu r)!}$. Außerdem kann man offenbar schreiben

$$a_n \cdot \frac{(\nu n - \nu)!}{(\nu n)!} + a_{n+1} \cdot \frac{(\nu n - \nu)!}{(\nu n + \nu)!} + \cdots = \eta + \frac{\Theta}{(\nu n)^\nu}, \qquad 0 < \Theta < C,$$

C eine von n unabhängige positive Größe. In dem durch die Gleichung

$$y = \xi \Gamma(x) - \eta - \vartheta \cdot \frac{C}{x^\nu}, \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq 1,$$

dargestellten Streifen ist also die Dichte der Gitterpunktabszissen $\geqq \frac{1}{\nu}$; denn so oft $x = \nu n - \nu + 1$ ist, wird $\Gamma(x) = (\nu n - \nu)!$ und $\frac{1}{(\nu n)^\nu} \leqq \frac{1}{x^\nu}$.

Andererseits bekommt man aus der Gleichung

$$f(x) = \xi \Gamma(x) - \eta$$

die Gleichung

$$f(x+1) - x f(x) = \eta (x-1) = \psi(x).$$

Hier hat $\psi(x)$ augenscheinlich die im Satze 6 verlangte Eigenschaft. Weiter ist hier $P(t) = t - x$, so daß die Gleichung $\Sigma a_i t^{n-i} = 0$ das Aussehen $1 = 0$ hat; diese Gleichung hat überhaupt keine Wurzel, so daß die über $P(t)$ im Satze 6 gemachte Voraussetzung auch selbstverständlich erfüllt ist.

Bestimmt man die Zahlen a_n in Übereinstimmung mit der Beziehung

$$\frac{a_n - 1}{(\nu n - \nu + 1)^\alpha (\nu n - \nu + 2) \ldots (\nu n - 1) \nu n} < \eta < \frac{a_n}{(\nu n - \nu + 1)^\alpha (\nu n - \nu + 2) \ldots (\nu n - 1) \nu n},$$

η hier beliebige reelle Zahl, $0 < \alpha < 1$, so bekommt man

$$a_n \cdot \frac{(\nu n - \nu)!}{(\nu n)!} + a_{n+1} \frac{(\nu n - \nu)!}{(\nu n + \nu)!} + \ldots = \eta (\nu n - \nu + 1)^{\alpha - 1} + \frac{\Theta}{(\nu n)^\nu}, \quad 0 < \Theta < C.$$

Genau wie oben muß also in dem Streifen

$$y = \xi \Gamma(x) - \eta x^{\alpha-1} - \vartheta \frac{C}{x^\nu}, \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1,$$

die Dichte der Gitterpunktabszissen $\geqq \frac{1}{\nu}$ sein.

Setzt man nun

$$f(x) = \xi \Gamma(x) - \eta x^{\alpha-1},$$

so bekommt man

$$f(x+1) - x f(x) = \eta x^\alpha - \eta (x+1)^{\alpha-1} = \psi(x),$$

und man sieht, daß auch hier $\psi(x)$ und $P(t)$ die angegebenen Bedingungen erfüllen.

Beispiele der Anwendung des Satzes 6:

Beispiel 1. Die Dichte der Gitterpunktabszissen des Streifens

$$y = \frac{2^x - \gamma}{x} + \vartheta \varphi(x), \; 0 \leqq \vartheta \leqq 1, \; \gamma \text{ irrational}, \; \lim_{x \to \infty} x^\nu \varphi(x) = 0 \text{ für jedes } \nu,$$

ist $= 0$. Denn setzt man

$$f(x) = \frac{2^x - \gamma}{x},$$

so bekommt man

$$(x+1)f(x+1)-2xf(x)=\gamma=\psi(x),$$

und $\psi(x)$ genügt der Forderung des Satzes 6, während hier

$$P(t)=(x+1)t-2x,$$

so daß die Gleichung $\Sigma a_i t^{n-i}=0$ hier das Aussehen

$$t-2=0$$

annimmt. Also erfüllt auch $P(t)$ die dafür verlangte Bedingung.

Beispiel 2. Die Dichte der Gitterpunktabszissen des Streifens

$$y=\xi\Gamma(x)+P(x)+\vartheta\varphi(x),\ 0\leqq\vartheta\leqq 1,\ \lim_{x\to\infty}x^\nu\varphi(x)=0 \text{ für jedes } \nu,$$

$P(x)$ ein Polynom, das mindestens einen irrationalen Koeffizienten besitzt, ist $=0$. Dies folgt schon aus dem Satze 2, wenn ξ rational ist. Mit Hilfe des Satzes 6 können wir die Gültigkeit für irrationales ξ zeigen. Wird nämlich

$$f(x)=\xi\Gamma(x)+P(x)$$

gesetzt, so folgt

$$f(x+1)-xf(x)=P(x+1)-xP(x)=\psi(x),$$

und da $\psi(x)$ auch ein Polynom wird, das mindestens einen irrationalen Koeffizienten hat, so sieht man die Richtigkeit der Behauptung kraft Satz 6.

Satz 7. *Es sei der Streifen*

$$y=f(\vartheta,x)=f(x)+\vartheta\varphi(x),\quad 0\leqq\vartheta\leqq 1,\quad \lim_{x\to\infty}f(x)\varphi(x)=0$$

gegeben. Weiter sei $|C|>1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=C$ *und*

$$|f(x+1)-Cf(x)|<\frac{\varepsilon}{f(x)},$$

wenn $x>G_1(\varepsilon)$. *Außerdem sei* C *derart, daß zu jeder ganzen positiven Zahl* r *eine positive Größe* γ_r *existiert, so daß für ganze rationale* p *und* q

$$|p-C^r q|>\frac{\gamma_r}{q},$$

wenn $q>Q(r)$.

Dann haben die Gitterpunktabszissen des Streifens eine verschwindende Dichte.

Beweis. Man hat

$$f(x+1)=Cf(x)+\frac{\varepsilon_1(x)}{f(x)},$$

wo $|\varepsilon_1(x)| < \varepsilon$, wenn $x > G_1(\varepsilon)$. Stellt man diese Gleichung auch für $x+1$, $x+2, \ldots$ auf und kombiniert die erhaltenen Gleichungen, so bekommt man

$$f(x+r) = C^r f(x) + \frac{\varepsilon_r(x)}{f(x)},$$

wo $|\varepsilon_r(x)| < \varepsilon$, wenn $x > G_r(\varepsilon)$. Man hat deshalb, indem

$$\begin{aligned} f(\vartheta_r, x+r) f(x) &- f(\vartheta, x) f(x+r) \\ &= (f(x+r) + \vartheta_r \varphi(x+r)) f(x) - (f(x) + \vartheta\varphi(x)) f(x+r) \\ &= \vartheta_r \varphi(x+r) f(x) - \vartheta\varphi(x) f(x+r), \end{aligned}$$

auch

$$\begin{aligned} f(\vartheta_r, x+r) f(x) - f(\vartheta, x)\left(C^r f(x) + \frac{\varepsilon_r(x)}{f(x)}\right) \\ = \vartheta_r \varphi(x+r) f(x) - \vartheta\varphi(x) f(x+r) \end{aligned}$$

oder

$$f(\vartheta_r, x+r) - C^r f(\vartheta, x) = \frac{f(\vartheta, x)}{f(x)^2}\,\varepsilon_r(x) + \frac{\vartheta_r\varphi(x+r) f(x) - \vartheta\varphi(x) f(x+r)}{f(x)}.$$

Hieraus sieht man, daß für alle hinreichend großen x, etwa $x > g_r$,

$$|f(\vartheta_r, x+r) - C^r f(\vartheta, x)| < \frac{\gamma_r}{f(\vartheta, x)}.$$

Da $|C| > 1$ ist, muß $f(\vartheta, x)$ mit x unendlich groß werden; wir können deshalb g_r so groß gewählt annehmen, daß immer $f(\vartheta, x) > Q(r)$ wird, wenn $x > g_r$. Dann können also nicht beide Zahlen $f(\vartheta, x)$ und $f(\vartheta_r, x+r)$ ganz sein.

Ist nun $x > \max(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ eine solche ganze positive Zahl, daß für ein ϑ zwischen 0 und 1 $f(\vartheta, x)$ ganz wird, so können $f(\vartheta_r, x+r)$, $r = 1, 2, \ldots, m$, nie ganz werden, wenn $0 \leqq \vartheta_r \leqq 1$ sein soll. Da hier m beliebig groß war, folgt nach Satz 1 die Richtigkeit des Satzes 7.

Daß Zahlen C der in diesem Satze verlangten Art existieren, ist sicher; denn jedenfalls ist jede reelle quadratisch irrationale Zahl dieser Art, wenn man von denjenigen absieht, die bloße Quadratwurzeln aus positiven rationalen Zahlen sind.

Satz 8. *Es sei $|C| > 1$ und C derart, daß zu beliebigen ganzen positiven Zahlen $r_1, \ldots, r_n$, für welche die Differenzen $r_{i+1} - r_i$ alle $\geqq a$ sind, eine positive Größe $\gamma(r_1, \ldots, r_n)$ existiert, so daß mindestens eine der Größen*

$$|p_1 - C^{r_1} q|, \ldots, |p_n - C^{r_n} q|$$

$> \dfrac{\gamma(r_1, \ldots, r_n)}{\sqrt[n]{q}}$ *ist für beliebige ganze Zahlen $p_1, \ldots, p_n, q$, wenn*

$q > Q(r_1, \ldots, r_n)$ *ist. Weiter sei* $\lim_{x\to\infty} \varphi(x)\cdot\sqrt[n]{f(x)} = 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = C$ *und*

$$|f(x+1) - Cf(x)| < \frac{\varepsilon}{|\sqrt[n]{f(x)}|},$$

wenn $x > G(\varepsilon)$. *Dann haben die Abszissen der Gitterpunkte im Streifen*

$$y = f(\vartheta, x) = f(x) + \vartheta\varphi(x) \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1)$$

die Dichte 0.

Beweis. Man bekommt für jede ganze positive Zahl r die Gleichung

$$f(x+r) = C^r f(x) + \frac{\varepsilon_r(x)}{\sqrt[n]{f(x)}},$$

worin $|\varepsilon_r(x)| < \varepsilon$, wenn $x > G_r(\varepsilon)$.

Weiter ist

$$f(\vartheta_{r_i}, x + r_i) f(x) - f(\vartheta, x) f(x + r_i)$$
$$= \vartheta_{r_i}\varphi(x + r_i) f(x) - \vartheta\varphi(x) f(x + r_i),$$

woraus

$$f(\vartheta_{r_i}, x + r_i) - C^{r_i} f(\vartheta, x) = \frac{f(\vartheta, x)\,\varepsilon_{r_i}(x)}{f(x)^{\frac{n+1}{n}}} + \frac{\vartheta_{r_i}\varphi(x+r_i) f(x) - \vartheta\varphi(x) f(x+r_i)}{f(x)}.$$

Wegen der Voraussetzung $\lim_{x\to\infty} \varphi(x)\sqrt[n]{f(x)} = 0$ sieht man deshalb, daß für alle hinreichend großen x, etwa $x > g(r_1, \ldots, r_n)$, für alle r_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$|f(\vartheta_{r_i}, x + r_i) - C^{r_i} f(\vartheta, x)| < \frac{\gamma(r_1, \ldots, r_n)}{\sqrt[n]{f(\vartheta, x)}}.$$

Da $f(\vartheta, x)$ gleichzeitig mit x unendlich groß wird, kann $g(r_1, \ldots, r_n)$ so groß angenommen werden, daß $f(\vartheta, x) > Q(r_1, \ldots, r_n)$ wird, wenn $x > g(r_1, \ldots, r_n)$.

Es sei jetzt m ganz und $> an$, und man betrachte alle Reihen $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ derart, daß $r_n \leqq m$ und alle $r_{i+1} - r_i \geqq a$ sind. Solcher Reihen gibt es nur endlich viele. Es sei G die größte der Zahlen $g(r_1, \ldots, r_n)$, die überhaupt für irgendwelche Reihen der r vorkommen. Für alle $x > G$ gilt alsdann für alle möglichen Reihen der r

$$|f(\vartheta_{r_i}, x + r_i) - C^{r_i} f(\vartheta, x)| < \frac{\gamma(r_1, \ldots, r_n)}{\sqrt[n]{f(\vartheta, x)}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$f(\vartheta, x) > Q(r_1, \ldots, r_n).$$

Dann muß also immer mindestens eine der Zahlen $f(\vartheta, x), \ldots, f(\vartheta_{r_n}, x + r_n)$ nicht ganz sein.

Ist nun $f(\vartheta, x)$ ganz, so können für $x > G$ im Intervalle x bis $x + m$ höchstens an Werte von x existieren, welche Gitterpunktabszissen des betrachteten Streifens sind. Gesetzt nämlich, es gäbe $an + 1$ solche Werte

$$x_0 = x < x_1 < x_2 < \ldots < x_{na},$$

so müßte $x_{(i+1)a} - x_{ia} \geqq a$ sein, und setzte man $x_{ia} = x + r_i$, so sollten also alle Zahlen $f(\vartheta_{r_i}, x + r_i)$ ganz sein, während alle Differenzen $r_{i+1} - r_i \geqq a$ würden.

Da an eine feste Zahl, m aber beliebig groß gewählt werden kann, ist hierdurch der Satz bewiesen.

Daß Zahlen C von der in diesem Satze verlangten Art existieren, sieht man so: Es befriedige C eine im absoluten Rationalitätsbereich irreduzible Gleichung vom Grade $n + 1$, z. B. derart, daß die Wurzeln ihrem absoluten Werte nach in einer Reihe geordnet werden können:

$$|C_0| > |C_1| > \ldots > |C_n|.$$

Dann ist sicher, daß die Potenzen

$$1,\ C^{r_1},\ C^{r_2},\ \ldots,\ C^{r_n}$$

linear unabhängig sein müssen, jedenfalls wenn die Differenzen $r_{i+1} - r_i$ eine gewisse Größe überschreiten. Denn besteht eine Gleichung der Form

$$h_0 + h_1 C^{r_1} + \ldots + h_n C^{r_n} = 0$$

$$h_0, h_1, \ldots, h_n \text{ alle (ganz) rational und nicht alle Null,}$$

so muß diese Gleichung für jede Wurzel C_i stattfinden, und man bekommt

$$\begin{vmatrix} C_0^{r_n} & C_0^{r_{n-1}} & \ldots & C_0^{r_1} & 1 \\ C_1^{r_n} & C_1^{r_{n-1}} & \ldots & C_1^{r_1} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_n^{r_n} & C_n^{r_{n-1}} & \ldots & C_n^{r_1} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Man sieht leicht, daß dies unmöglich ist, wenn alle Differenzen $r_{i+1} - r_i$ hinreichend groß sind, weil in der entwickelten Determinante das Diagonalglied dabei zuletzt größer als die Summe der übrigen Glieder wird.

Sind aber $1, C^{r_1}, \ldots, C^{r_n}$ linear unabhängige Zahlen eines algebraischen Körpers vom Grade $n + 1$, so gibt es nach einem Satze von O. Perron [7]) eine solche positive Zahl δ, daß für ganze rationale $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$ mindestens eine der Ungleichungen

$$|p_1 - C^{r_1} q| > \frac{\delta}{\sqrt[n]{q}},\ \ldots,\ |p_n - C^{r_n} q| > \frac{\delta}{\sqrt[n]{q}}$$

erfüllt ist, wenn q hinreichend groß ist.

[7]) Math. Annalen 83, S. 79.

Daß die Voraussetzungen $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) f(x) = 0$ in Satz 7 und $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)\sqrt[n]{f(x)}$ in Satz 8 wesentlich sind, damit die betrachteten Verteilungsdichten $= 0$ werden, läßt sich leicht nachweisen. Für Satz 7 ist dies im Beispiel 1 unten gemacht.

Beispiel 1. Nach Satz 7 ist die Dichte der Abszissen der Gitterpunkte im Streifen

$$y = \alpha(1+\sqrt{2})^x + \vartheta\varphi(x), \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1, \quad \lim_{x\to\infty} \varphi(x)(1+\sqrt{2})^x = 0,$$

α beliebige reelle Zahl, $= 0$.

Betrachtet man dagegen den im Unendlichen breiteren Streifen

$$y = \alpha(1+\sqrt{2})^x + \vartheta\varphi(x), \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1, \quad \varphi(x)(1+\sqrt{2})^x > K \text{ für } x > x_0,$$

unter K eine positive Konstante verstanden, so ist leicht nachzuweisen, daß reelle Zahlen α existieren, für welche die Dichte der Gitterpunktabszissen > 0 ist. Es gibt nämlich einen ganzen positiven Exponenten n, so daß

$$K > (\sqrt{2}-1)^n.$$

Wenn also für $x > x_0$ immer $\varphi(x)(1+\sqrt{2})^x > K$ bleibt, so bleibt auch immer

$$\varphi(x)(1+\sqrt{2})^x > (\sqrt{2}-1)^n, \quad \text{d. h.} \quad \varphi(x) > (\sqrt{2}-1)^{n+x}.$$

Folglich wird der betrachtete Streifen

$$y = \alpha(\sqrt{2}+1)^x + \vartheta k(\sqrt{2}-1)^{n+x}, \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1, \ k > 1.$$

Es sei nun $\alpha = (\sqrt{2}+1)^n$. Dann bekommt man

$$y = (\sqrt{2}+1)^{n+x} + \vartheta k(\sqrt{2}-1)^{n+x}.$$

Für $\vartheta = \frac{1}{k}$ wird hier y ganz, so oft x eine ganze Zahl $\equiv n \pmod 2$ ist. Die Verteilungsdichte des Streifens ist alsdann $\geqq \frac{1}{2}$.

Ein ähnliches Resultat bekommt man, wenn $\alpha = \frac{(\sqrt{2}+1)^n}{\sqrt{2}}$ gesetzt wird, indem dann in derselben Weise

$$y = \frac{(\sqrt{2}+1)^{n+x}}{\sqrt{2}} + \vartheta k(\sqrt{2}-1)^{n+x}$$

erhalten wird, und hier ist y immer ganz, wenn $\vartheta = \frac{1}{k\sqrt{2}}$ und x eine ganze Zahl $\equiv n+1 \pmod 2$.

Für spezielle Werte von α wird die Dichte $= 0$ auch in breiteren Streifen. Für $\alpha = 1$ genügt es schon, daß $\varphi(x)(1+\sqrt{2})^x < 1$ bleibt für alle $x > x_0$. Denn man bekommt dann

$$y = (1+\sqrt{2})^x + \vartheta\delta(1-\sqrt{2})^x, \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1, \quad |\delta| < 1,$$

und $(1+\sqrt{2})^x+(1-\sqrt{2})^x$ ist immer ganz für ganzes x, während $(1-\vartheta\delta)(1-\sqrt{2})^x \neq 0$ bleibt und für $x \to \infty$ Null als Grenze hat. Für hinreichend große ganze x ist also y nie mehr ganz.

Beispiel 2. Es sei $\xi = 2\cos 40^0$. Nach Satz 8 ist die Dichte der Gitterpunktabszissen des Streifens

$$y = \alpha \xi^x + \vartheta\varphi(x), \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1, \quad \lim_{x\to\infty} \varphi(x)\xi^{\frac{x}{2}} = 0,$$

$$\alpha \text{ beliebige reelle Zahl},$$

$= 0$; denn ξ ist >1 und befriedigt die kubische Gleichung

$$\xi^3 - 3\xi + 1 = 0,$$

deren Wurzeln, auch ihrem absoluten Werte nach, verschieden sind.

Satz 9. *Es sei*

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x+n-i), \quad \textit{alle } a_i \textit{ ganz},$$

und

$$P(t) = \sum a_i t^{n-i},$$

wobei $\psi(x)$ und $P(t)$ folgenden Bedingungen genügen:

Sind $A_0, A_1, \ldots, A_N$ solche ganze Zahlen, daß $\sum_{l=0}^{N} A_l C^l \neq 0$ ist, so ist die Dichte der Gitterpunktabszissen des Streifens

$$y = \sum A_l \psi(x+l) + \vartheta\varphi(x), \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1, \quad \lim \varphi(x)^\nu \left(\sum A_l \psi(x+l)\right) = 0,$$

$= 0$. *Ist $Q(t)$ ein solches Polynom, daß*

$$P(t)\,Q(t) = \sum B_k t^{r_k}, \quad 0 \leqq r_0 < r_1 < \ldots < r_n, \quad \textit{alle } B_k \textit{ ganz},$$

so ist mindestens für eine Wahl von Q, falls mehrere solche existieren,

$$Q(C) \neq 0,$$

mindestens dann, wenn alle Differenzen $r_{i+1} - r_i$ eine positive Größe a überschreiten.

Unter diesen Umständen ist die Dichte der Gitterpunktabszissen des Streifens

$$y = f(\vartheta, x) = f(x) + \vartheta\varphi(x), \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1,$$

$$\lim \varphi(x)^\nu f(x+k) = 0 \quad \textit{für jede Konstante } k \textit{ und alle positiven } \nu,$$

$= 0$.

Beweis. Aus dem Ausdruck für $f(\vartheta, x)$ bekommt man

$$\sum a_i f(\vartheta_{n-i}, x+n-i) = \sum a_i f(x+n-i) + \sum a_i \vartheta_{n-i}\varphi(x+n-i)$$
$$= \psi(x) + \sum a_i \vartheta_{n-i}\varphi(x+n-i)$$

und hieraus

$$\Sigma b_j \Sigma a_i f(\vartheta_{n-i+j}, x+n-i+j)$$
$$= \Sigma b_j \psi(x+j) + \Sigma b_j \Sigma a_i \vartheta_{n-i+j} \psi(x+n-i+j),$$

oder nach der Voraussetzung über $Q(t)$:

$$\Sigma B_k f(\vartheta_{r_k}, x+r_k) = \Sigma b_j \psi(x+j) + \Theta \Phi(x), \quad 0 \leqq \Theta \leqq 1,$$

wobei $\lim\limits_{x\to\infty} \Phi(x)^{\nu} (\Sigma b_j \psi(x+j)) = 0$, wie man leicht konstatiert.

Weil $Q(C) \neq 0$ sein soll, wenn alle $r_{i+1} - r_i \geqq a$ sind, bekommt man nach der Voraussetzung über ψ, daß die Dichte der Menge M' ganzer positiver x, für welche

$$\Sigma B_k f(\vartheta_{r_k}, x+r_k)$$

ganz sein kann für irgendwelche ϑ zwischen 0 und 1 und alle Wahlen der r zwischen 0 und m mit Differenzen $\geqq a$, $= 0$ sein muß.

Jetzt sei $m > an$, und für jede Zahl x der Reihe

$$1,\ 1+m,\ 1+2m,\ \ldots$$

wähle ich für r_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ alle solche Reihen, für welche $r_n \leqq m$ und alle $r_{i+1} - r_i \geqq a$ sind. Wenn l eine gewisse Größe überschreitet, etwa $l > l(\delta, m)$, wird dann die Dichte der Zahlen aus M', die in der Reihe $1, 1+m, \ldots, 1+lm$ auftreten, $\leqq \frac{\delta}{m}$ sein. Folglich gehören höchstens $\frac{\delta}{m}(1+lm)$ Zahlen der erwähnten Reihe zu M', während wenigstens $(1-\delta)l + 1 - \frac{\delta}{m}$ nicht zu M' gehören. So oft aber x nicht zu M' gehört, können im Intervalle x bis $x+m$ höchstens an Zahlen der Menge M der Gitterpunktsabszissen des Streifens $y = f(\vartheta, x)$ vorkommen.

Die Anzahl der Elemente von M im Intervalle 1 bis x, wenn

$$1 + ml \leqq x < 1 + m(l+1),$$

wird also höchstens

$$m\frac{\delta}{m}(1+ml) + an(1-\delta)l + an\left(1 - \frac{\delta}{m}\right),$$

und die Dichte von M in demselben Intervalle

$$< \delta + \frac{an}{m} + \frac{an}{ml}.$$

Da δ beliebig klein, m beliebig groß gewählt werden kann, wird also die Dichte von M in jedem hinreichend langen Intervalle 1 bis x beliebig klein, wodurch Satz 9 bewiesen ist.

Um eine Vorstellung von der Tragweite dieses Satzes zu bekommen, ist es wünschenswert zu zeigen, daß ausgedehnte Klassen von Funktionen ψ und P existieren, die den aufgestellten Bedingungen genügen.

Erstens kann bemerkt werden, daß $\psi(x)$ von der verlangten Beschaffenheit ist, wenn es sich wie $f(x)$ im Satze 8 verhält. Es sei nämlich

$$\psi(x+1) = C\psi(x) + \eta_1(x), \qquad \lim_{x\to\infty} \psi(x)\eta_1(x)^\nu = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x+1)}{\psi(x)} = C.$$

Dann bekommt man, wie leicht durch Induktion zu zeigen, für jede ganze positive Zahl l

$$\psi(x+l) = C^l\psi(x) + \eta_l(x), \qquad \lim_{x\to\infty} \psi(x)\eta_l(x)^\nu = 0.$$

Setzt man nun

$$g(x) = \sum_{l=1}^{N} A_l\psi(x+l),$$

so erhält man

$$\begin{aligned} g(x+1) &= \Sigma A_l\psi(x+l+1) = \Sigma \dot{A}_l(C\psi(x+l) + \eta_1(x+l)) \\ &= Cg(x) + \Sigma A_l\eta_1(x+l). \end{aligned}$$

Da aber

$$\lim \psi(x+l_1)\eta(x+l_2)^\mu\,\eta(x+l_3)^{\nu-\mu}$$

$$= \lim \frac{\psi(x+l_1)^{\frac{\mu}{\nu}}}{\psi(x+l_2)^{\frac{\mu}{\nu}}} \cdot \frac{\psi(x+l_1)^{\frac{\nu-\mu}{\nu}}}{\psi(x+l_3)^{\frac{\nu-\mu}{\nu}}} \left(\psi(x+l_3)\eta(x+l_2)^\nu\right)^{\frac{\mu}{\nu}} \left(\psi(x+l_3)\eta(x+l_3)^\nu\right)^{\frac{\nu-\mu}{\nu}}$$

$$= C^{(l_1-l_2)\frac{\mu}{\nu}+(l_1-l_3)\frac{\nu-\mu}{\nu}} \cdot 0 = 0,$$

so wird offenbar

$$\lim g(x)(\Sigma A_l\eta_1(x+l))^\nu = \lim \Sigma A_l\psi(x+l)\cdot(\Sigma A_l\eta_1(x+l))^\nu = 0.$$

Weiter ist

$$\lim \frac{g(x+1)}{g(x)} = \lim \frac{\Sigma A_l\psi(x+l+1)}{\Sigma A_l\psi(x+l)} = \lim \frac{\Sigma A_l \dfrac{\psi(x+l+1)}{\psi(x)}}{\Sigma A_l \dfrac{\psi(x+l)}{\psi(x)}},$$

und da

$$\lim \frac{\psi(x+l+1)}{\psi(x)} = C^{l+1}, \qquad \lim \frac{\psi(x+l)}{\psi(x)} = C^l,$$

wird also, wenn

$$\Sigma A_l C^l \neq 0,$$

augenscheinlich

$$\lim \frac{g(x+1)}{g(x)} = C.$$

Zweitens kann bemerkt werden, daß $P(t)$ die verlangte Eigenschaft hat jedenfalls in dem Falle, dass die verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$P(t) = 0$ ihrem absoluten Werte nach in eine Reihe geordnet werden können, während außerdem jede Wurzel von $-C$ verschieden ist. Es ist wohl kaum nötig, dies ausdrücklich zu beweisen; der Beweis würde eine fast genaue Wiederholung der Überlegungen werden, welche die Funktion $P(t)$ in Satz 5 betreffen.

Beispiel der Anwendung des Satzes 9:

In jedem Streifen

$$y = R(x)(1+\sqrt{2})^x + \vartheta\varphi(x), \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq 1, \qquad \lim \varphi(x)(1+\sqrt{2})^x = 0,$$

$R(x)$ beliebiges Polynom, ist die Verteilungsdichte der Gitterpunktabszissen $= 0$.

Ist nämlich $R(x)$ vom Grade n, und setzt man

$$f(x) = R(x)(1+\sqrt{2})^x, \qquad P(t) = (t^2 - 2t - 1)^n = \sum a_i t^{2n-i},$$

wird

$$\sum_{i=0}^{2n} a_i f(x + 2n - i) = K \cdot (1+\sqrt{2})^x, \qquad K \text{ eine Konstante.}$$

Da $\psi(x) = K(1+\sqrt{2})^x$ und $P(t)$ den aufgestellten Forderungen genügen, folgt die Richtigkeit der Behauptung; es muß nämlich $K \neq 0$ sein, da bekanntlich die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung

$$\sum a_i f(x + 2n - i) = 0$$

von der Form $R_1(x)(1+\sqrt{2})^x + R_2(x)(1-\sqrt{2})^x$ ist, worin R_1 und R_2 zwei Polynome, höchstens vom Grade $n-1$, bedeuten.

Ist $R(x)$ ein ganzwertiges Polynom, läßt sich natürlich mehr beweisen. Schon in jedem Streifen

$$y = R(x)(1+\sqrt{2})^x + \vartheta\varphi(x), \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq 1, \qquad \left|\frac{\varphi(x)}{R(x)}\right| (1+\sqrt{2})^x < 1$$
$$\text{für alle hinreichend großen } x,$$

ist dann die Verteilungsdichte Null, indem y sogar, wie man leicht findet, für alle hinreichend großen ganzen x nie mehr ganz werden kann.

Satz 10. *Es seien*

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{f(n)}, \qquad \varphi(x) = \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{a_n f(x)}{f(n)}, \qquad \sum_{n=0}^{x} \frac{a_n f(x)}{f(n)} \equiv \psi(x) (\operatorname{mod} 1),$$
$$0 \leqq \psi(x) < 1,$$

und die Zahlen a_n *derart, daß* $\sum \frac{a_n}{f(n)}$ *konvergiert und*

$$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0.$$

Dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich eine asymptotische Umgebung der Kurve $y = \xi f(x)$ *finden läßt,* *worin die Dichte der Gitterpunktabszissen* > 0 *ist, die, daß eine Menge* M *ganzer Zahlen mit nicht verschwindender Dichte existiert, so daß* $\psi(x)$ *gegen* 0 *konvergiert, wenn* x *die Elemente von* M *durchläuft.*

Beweis. Man hat

$$\xi f(x) = \sum_{n=0}^{x} \frac{a_n f(x)}{f(n)} + \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{a_n f(x)}{f(n)} \equiv \psi(x) + \varphi(x) \pmod 1.$$

Konvergiert $\psi(x)$ gegen Null in der Menge M, so hat man

$$\lim (\varphi(x) + \psi(x)) = 0,$$

wenn x wachsend die Zahlen in M durchläuft. In dem Streifen

$$y = \xi f(x) - \vartheta(\varphi(x) + \psi(x)), \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1,$$

wird dann für beliebige x in M offenbar y ganz für $\vartheta = 1$.

Ist andererseits

$$y = \xi f(x) - \vartheta \chi(x), \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1, \quad \lim_{x \to \infty} \chi(x) = 0,$$

eine asymptotische Umgebung, worin für jedes x einer Menge M nicht verschwindender Dichte y einmal ganz wird, so hat man für jedes x in M und ein gewisses ϑ zwischen 0 und 1

$$\xi f(x) \equiv \vartheta \chi(x) \pmod 1$$

und also

$$\varphi(x) + \psi(x) \equiv \vartheta \chi(x) \pmod 1$$

oder

$$\psi(x) \equiv \vartheta \chi(x) - \varphi(x) \pmod 1.$$

Da aber sowohl $\lim\limits_{x \to \infty} \chi(x) = 0$ wie $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$, so folgt, daß $\psi(x)$ gegen 0 konvergieren muß, wenn x wachsend die Zahlen aus M durchläuft.

Die Existenz einer Menge M mit einer Dichte > 0, innerhalb welcher $\lim \psi(x) = 0$ ist, ist wieder mit folgendem gleichbedeutend:

Es sei M_ε die Menge aller positiven ganzen Zahlen, für welche $0 \leqq \psi(x) \leqq \varepsilon$ ist. Dann besitzen die Mengen M_ε zugehörige Dichten σ_ε, die alle größer als eine positive Größe σ sind.

Denn ist $\lim \psi(x) = 0$ in M, welche eine Dichte $> \sigma$ hat, so ist $0 \leqq \psi(x) \leqq \varepsilon$ für alle Elemente x von M, die $> G(\varepsilon)$ sind, und diese bilden eine Untermenge M_1, die offenbar auch eine Dichte $> \sigma$ hat. Folglich hat M_ε eine Dichte $> \sigma$.

Es habe andererseits jede Menge M_ε eine Dichte $\sigma_\varepsilon > \sigma$. Dann kann man für ε eine Reihe von Zahlen

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots, \quad \lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$$

wählen. Zuerst kann man ein so langes Intervall 1 bis x_1 wählen, daß die Dichte des Teiles M_1 von M_{ε_1}, der darin fällt, $> \sigma$ ist; dann kann man ein so langes Intervall x_1 bis $x_1 + x_2$ wählen, daß der darinfallende Teil M_2 von M_{ε_2} eine Dichte $> \sigma$ hat usw. Die Vereinigungsmenge $M = M_1 + M_2 + \ldots$ besitzt dann auch eine Dichte $\geqq \sigma$, und zugleich ist darin $\lim \psi(x) = 0$.

Nach diesem Satze kann man jedenfalls für solche Funktionen f, für welche

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{f(x+1)} = 0,$$

sehr leicht eine nicht-abzählbare Menge von Zahlen ξ finden, derart, daß in gewissen asymptotischen Umgebungen der Kurve $y = \xi f(x)$ die Verteilungsdichte > 0 wird. Nach einem Satze von H. Weyl[8]) folgt allerdings (vgl. den Satz 12 in § 3), daß diese Menge das Maß 0 hat. Erstens kann man nämlich eine Menge M ganzer positiver Zahlen wählen mit Dichte > 0 und dann eine Funktion $\psi(x)$, welche darin gegen Null konvergiert, während sie sonst beliebig ist, und endlich die Zahlen a_n mittels der rekurrierenden Beziehung

$$\sum_{n=0}^{x} \frac{a_n f(x)}{f(n)} \equiv \psi(x) \pmod 1$$

bestimmen (sie werden hierdurch nur mod 1 bestimmt) z. B. derart, daß alle $|a_n|$ eine gewisse obere Grenze $\geqq 1$ nicht überschreiten; denn dann wird $\sum \frac{a_n}{f(n)}$ absolut konvergent und $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$. Wenn man will, kann man $\psi(x)$, so oft x nicht zu M gehört, eben derart wählen, daß $a_x = 0$ wird. Dies gibt ein einfaches Mittel, um Umgebungen mit Verteilungsdichte > 0 zu finden, deren Höhen im Unendlichen besonders schnell abnehmen (vgl. die Betrachtungen S. 23—24). Ich gehe hier nicht näher darauf ein.

Folgende Bemerkung kann passend hinzugefügt werden:

Werden die Zahlen a_n so bestimmt, daß, so oft x zu einer Menge M gehört,

$$\sum_{n=0}^{x} \frac{a_n f(x)}{f(n)} \equiv 0 \pmod 1,$$

dagegen wenn x nicht zu M gehört

$$\sum_{n=0}^{x} \frac{a_n f(x)}{f(n)} \equiv c_x \pmod 1,\quad 0 < \alpha < c_x < \beta < 1,\ \alpha \text{ und } \beta \text{ von } x \text{ unabhängig},$$

[8]) Über die Gleichverteilung von Zahlen mod 1, Math. Annalen 77, § 7.

so wird im Streifen

$$y = \xi f(x) - \vartheta \varphi(x), \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1,$$

y einmal ganz, nämlich für $\vartheta = 1$, für jede Zahl x der Menge M, während y für jede nicht zu M gehörende ganze Zahl x nicht ganz wird, jedenfalls wenn x einen gewissen Wert überschreitet.

Zum Schlusse will ich eine gewisse Betrachtung über ganze transzendente Funktionen anstellen. Es sei

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

eine ganze transzendente Funktion. Unter m eine ganze positive Zahl verstanden, sei $f(x)$ ganz für die Werte $x = r_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, wobei

$$0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_n \leqq mn.$$

In ähnlicher Weise wie früher (S. 5) bekommt man dann eine Gleichung der Form

$$\sum_{i=0}^{n} A_i f(r_i) = a_n \Sigma A_i r_i^n + a_{n+1} \Sigma A_i r_i^{n+1} + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n+\nu} D_{n+\nu},$$

wobei

$$D_{n+\nu} = \sum_{i=0}^{n} A_i r_i^{n+\nu} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & r_1 & & \ldots & r_1^{n-1} & r_1^{n+\nu} \\ 1 & r_2 & & \ldots & r_2^{n-1} & r_2^{n+\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & r_n & & \ldots & r_n^{n-1} & r_n^{n+\nu} \end{vmatrix} = \prod_{i>k}(r_i - r_k) \cdot \Sigma\, r_1^{i_1} r_2^{i_2} \ldots r_n^{i_n} \quad \begin{matrix} i_1 + i_2 + \ldots + i_n = \nu, \\ \text{alle } i \text{ nicht-negativ.} \end{matrix}$$

Dann kann man den folgenden Satz aufstellen:

Satz 11. *Gibt es zu jeder ganzen positiven Zahl m eine ganze positive Zahl n, so daß die Reihe $\Sigma\, a_{n+\nu} D_{n+\nu} \not\equiv 0 \pmod 1$ für alle Wahlen der r ist, so haben die ganzen positiven Zahlen x, für welche $f(x)$ ganz rational ist, eine verschwindende Dichte.*

Beweis. Denn wählt man für jede gegebene Zahl m die zugehörige Zahl n, so muß für beliebige Wahl der Zahlen $0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_n$ im Intervalle 0 bis mn mindestens eine der Zahlen $f(r_i)$ nicht ganz sein. Die Dichte derjenigen ganzen x in diesem Intervalle, für welche $f(x)$ ganz ist, muß also $\leqq \frac{1}{m}$ sein. Da m beliebig groß gewählt werden kann, folgt hieraus die Richtigkeit des Satzes. Gibt es für jedes m eine Zahl N, so daß für alle $n > N$ die Reihe $\Sigma\, a_{n+\nu} D_{n+\nu}$ für alle Wahlen der $r \not\equiv 0 \pmod 1$ ist, so haben die x, für welche $f(x)$ ganz ist, sicher die Dichte 0.

Natürlich wird es in den meisten Fällen schwierig sein zu beurteilen, ob die Bedingung des Satzes erfüllt ist. Jedoch geschieht es leicht in einigen Fällen, so z. B. wenn die Koeffizienten a_n alle nicht-negativ sind und so stark abnehmen, daß für jedes m ein n sich finden läßt, so daß

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n+\nu} G(m, n, \nu) < 1$$

wird, wobei $G(m, n, \nu)$ eine obere Schranke der Werte von $D_{n+\nu}$ für die verschiedenen Wahlen der r bedeutet. Solche Schranken sind leicht anzugeben.

Ein anderes Beispiel ist, daß die Koeffizienten a_n wohl verschiedene Vorzeichen haben, aber so schnell abnehmen, daß für jedes m ein n sich finden läßt, so daß

$$|a_n| D_n < 1, \qquad \left|\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n+\nu} G(m, n, \nu)\right| < |a_n| D_n.$$

Satz 11 zeigt also, daß ein zu schnelles Abnehmen der Koeffizienten der Reihe für $f(x)$ bewirkt, daß die Abszissen der Gitterpunkte auf der Kurve $y = f(x)$ eine verschwindende Verteilungsdichtigkeit haben müssen.

Man kann eine Abschätzung der Reihe $\Sigma a_{n+\nu} D_{n+\nu}$ in folgender Weise erhalten. Es ist

$$D_{n+\nu} = \sum A_i r_i^{n+\nu} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Sigma A_i}{x - r_i} x^{n+\nu} dx = \frac{1}{2\pi i}\int x^{n+\nu} dx \cdot \sum \frac{A_i}{x - r_i},$$

wenn längs einem Kreise um den Nullpunkt mit Radius $\varrho > r_n$ integriert wird. Weiter findet man

$$\sum \frac{A_i}{x - r_i} = \frac{D_n}{x(x - r_1)\ldots(x - r_n)}$$

wegen der Gleichungen $\Sigma A_i r_i^{\mu} = 0$, $\mu = 0, 1, \ldots, n-1$, und $\Sigma A_i r_i^n = D_n$.

Folglich wird

$$D_{n+\nu} = \frac{D_n}{2\pi i}\int \frac{x^{n+\nu}\, dx}{x(x - r_1)\ldots(x - r_n)}$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n+\nu} D_{n+\nu} = \frac{D_n}{2\pi i}\int \frac{\left(\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_{n+\nu} x^{n+\nu}\right) dx}{x(x - r_1)\ldots(x - r_n)}.$$

Ist $M(n, \varrho) = \max\left|\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_{n+\nu} x^{n+\nu}\right|$ auf dem Integrationskreis, dann wird also

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n+\nu} D_{n+\nu}\right| < \frac{D_n \cdot M(n, \varrho)}{\varrho(\varrho - r_1)\ldots(\varrho - r_n)}.$$

Gibt es also für ein gegebenes m beliebig große ganze Zahlen n und dazu Zahlen $\varrho > mn$ derart, daß

$$M(n, \varrho) < \frac{\varrho(\varrho - r_1)\ldots(\varrho - r_n)}{D_n}$$

für alle Wahlen der r wird, und weiß man, daß $\Sigma a_{n+\nu} D_{n+\nu} \neq 0$ sein muß (z. B. alle a_n positiv), so muß die Menge M ganzer positiver x, für welche $f(x)$ ganz ist, eine Dichte $< \frac{1}{m}$ haben. Man kann natürlich dies auch so ausdrücken: Falls die Dichte (oder jede Dichte) der Menge M $> \sigma$ ist, können die Koeffizienten a_n nicht zu schnell abnehmen.

Falls die Menge M eine arithmetische Reihe bildet, können die Determinanten A_i durch kleinere Zahlen ersetzt werden, weil sie dann einen gemeinsamen Faktor bekommen. Dadurch hat G. Pólya unter Heranziehung eines funktionentheoretischen Satzes von Jensen schon 1915 den folgenden Satz bewiesen[9]):

Es sei $g(x)$ eine ganze Funktion, und $M(r)$ das Maximum von $|g(x)|$ im Kreise $x \leqq r$. Sind die Werte

$$g(0),\ g(1),\ g(2),\ \ldots,\ g(n),\ \ldots$$

ganze rationale Zahlen, und ist

$$\lim_{x \to \infty} \frac{r^{\frac{1}{2}} M(r)}{2^r} = 0,$$

so ist $g(x)$ ein Polynom.

Dies Resultat ist später dahin verschärft worden, daß unter allen (auf der positiven Seite) ganzwertigen ganzen transzendenten Funktionen 2^x vom kleinsten Wachstum ist[10]). Beschränkt man sich auf ganze transzendente Funktionen mit positiven Koeffizienten, die für alle x einer oder mehrerer arithmetischer Reihen ganz sind, so ist es auch nach dem obigen Verfahren, weil die Determinanten A_i dann einen gemeinsamen Faktor erhalten, möglich, schärfere Resultate zu bekommen als z. B. wenn die Menge M eine Dichte > 0 hat, aber keine arithmetische Reihe enthält. Ich muß mich hier mit diesen Andeutungen begnügen.

§ 3.

Über die Beziehung der hier bewiesenen Verteilungssätze zu den Sätzen über die Gleichverteilung von Zahlen mod 1.

Bekanntlich hat H. Weyl (l. c.) bewiesen, daß gewisse Reihen von Zahlen sich mod 1 überall gleich dicht verteilen[11]). Nimmt man an, daß die Funktionswerte

$$f(1), f(2), \ldots$$

---

[9]) Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **40**.

[10]) G. Pólya, Göttinger Nachr. 1920, S. 1–10. F. Carlson, Math. Zeitschrift **11** (1921), S. 1–23.

[11]) Auch andere Mathematiker wie Bohl, Sierpiński, Bohr, Hardy und Littlewood haben sich mit diesen Problemen beschäftigt.

sich mod 1 überall gleich dicht verteilen, so ist es leicht zu sehen, daß in jeder asymptotischen Umgebung der Kurve $y = f(x)$ die Dichte der Gitterpunktabszissen $= 0$ ist. Die Umkehrung gilt aber nicht, so daß der Satz über die Gleichverteilung einen größeren Inhalt hat. Da aber die Sätze von der Gleichverteilung, soweit mir bekannt, nur in ziemlich komplizierter Art beweisbar sind, während die hier gegebenen Sätze über die Verteilungsdichtigkeit der Gitterpunkte in asymptotischen Streifen in elementarer Weise bewiesen sind, so scheint es mir ein Umweg zu sein, diese letzteren Sätze auf Grund der Gleichverteilung mod 1 abzuleiten. Es ist wohl auch fraglich, ob eine Gleichverteilung in allen denjenigen Fällen beweisbar ist, in welchen ich oben das Verschwinden der durchschnittlichen Verteilungsdichte in asymptotischen Streifen bewiesen habe. Dazu kommt noch, daß die hier gegebenen Beweise ein Mittel geben, bei gegebenem asymptotischen Streifen und beliebig kleinem ε eine so große Zahl g wirklich zu finden, daß die Dichte derjenigen Abszissen der Gitterpunkte des Streifens, welche in das Intervall 1 bis l fallen, immer $< \varepsilon$ ist, so oft $l > g$ ist, und derartiges ist wohl auf Grund der Sätze über die Gleichverteilung in den meisten Fällen schwer, wenn überhaupt, möglich. Auch ist es unzweifelhaft oft möglich, mit Hilfe der hier benutzten elementaren Mittel Verschärfungen der Verteilungssätze zu beweisen (vgl. § 4); solche Verschärfungen sind aber nicht aus der Gleichverteilung mod 1 ableitbar (vgl. die Überlegungen später in § 3).

Daß die Funktionswerte $f(1), f(2), \dots$ mod 1 gleich dicht verteilt sind, kann auch in folgender Art ausgedrückt werden, wenn man die folgende Definition aufstellt:

Definition 3. Jedes Gebiet

$$y = f(x) + a + \vartheta(b - a), \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1, \quad a < b,$$
$$a \text{ und } b \text{ von } x \text{ unabhängig},$$

nenne ich einen zur Kurve $y = f(x)$ gehörigen *Parallelstreifen*; $b - a$ heißt die *Höhe* des Streifens.

Dann besagt die Gleichverteilung:

In jedem Parallelstreifen der Höhe h haben die Abszissen der Gitterpunkte die durchschnittliche Dichte h.

Satz 12. *Daß die Gitterpunktabszissen jeder asymptotischen Umgebung der Kurve $y = f(x)$ die Dichte 0 haben, ist damit gleichbedeutend, daß die Dichte dieser Abszissen in jedem Parallelstreifen*

$$y = f(x) + \vartheta\lambda, \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1$$

$< \varepsilon$ *wird, ε beliebig klein, wenn λ hinreichend klein ist.*

Beweis. Erstens gehe ich davon aus, daß die Dichte im Parallelstreifen

$$y = f(x) + \vartheta\lambda$$

$< \varepsilon$ ist, wenn $\lambda < \delta$, und betrachte den asymptotischen Streifen

$$y = f(x) + \Theta\varphi(x), \quad 0 \leqq \Theta \leqq 1, \quad \lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 0, \quad \varphi(x) \text{ immer } > 0.$$

Wie klein λ sein mag, gilt für alle $x > x_0$, wenn x_0 hinreichend groß ist,

$$\varphi(x) < \lambda.$$

Nun sei n_0 die Zahl der Gitterpunktabszissen des Streifens $y = f(x) + \Theta\varphi(x)$, die > 0 und $< x_0$ sind, während $n(x)$ die Zahl derjenigen desselben Streifens ist, die $\geqq x_0$ und $\leqq x$ sind. Die entsprechenden Zahlen für den Parallelstreifen $y = f(x) + \vartheta\lambda$ seien n_0' und $n'(x)$. Weiter sei $\sigma(x)$ die Dichtigkeit der Abszissen > 0 und $\leqq x$ der Gitterpunkte des asymptotischen Streifens und $\sigma'(x)$ die entsprechende Dichtigkeit im Parallelstreifen. Dann bekommt man für alle hinreichend großen x, etwa $x > g(\lambda)$, $\sigma'(x) < \varepsilon$, und es ist

$$\sigma'(x) = \frac{n_0' + n'(x)}{x}, \qquad \sigma(x) = \frac{n_0 + n(x)}{x}, \qquad n(x) \leqq n'(x),$$

woraus für alle $x > g(\lambda)$

$$\sigma(x) = \frac{n_0 - n_0'}{x} + \sigma'(x) < \frac{n_0 - n_0'}{x} + \varepsilon.$$

Da ε beliebig klein und x nachher unabhängig von ε beliebig groß gewählt werden kann, wird deshalb $\sigma(x)$ kleiner als eine beliebig gegebene positive Größe für alle hinreichend großen x, d. h. die durchschnittliche Dichte ist Null im asymptotischen Streifen.

Zweitens gehe ich von der Existenz einer solchen positiven Zahl σ aus, daß die durchschnittliche Dichte im Parallelstreifen $y = f(x) + \vartheta\lambda$ für beliebiges λ größer als σ ist. Dann gibt es also für jeden Wert von λ eine positive Größe ξ derart, daß

$$\sigma'(\lambda, x) > \sigma$$

für alle $x > \xi$; dabei soll $\sigma'(\lambda, x)$ die Dichte derjenigen Gitterpunktabszissen des Streifens $y = f(x) + \vartheta\lambda$ bedeuten, welche > 0 und $\leqq x$ sind. Diese Zahl ξ kann man für jedes λ so klein als möglich gewählt denken; man kann dann $\xi = \xi(\lambda)$ setzen. Die hierdurch definierte Funktion $\xi(\lambda)$ kann nie abnehmen, wenn λ abnimmt. Ist nämlich $\lambda_1 > \lambda_2$, so ist für jedes x

$$\sigma'(\lambda_2, x) \leqq \sigma'(\lambda_1, x),$$

und weil $\sigma'(\lambda_2, x) > \sigma$ ist für alle $x > \xi(\lambda_2)$, folgt auch

$$\sigma'(\lambda_1, x) > \sigma$$

für alle $x > \xi(\lambda_2)$. Nach der Definition von $\xi(\lambda_1)$ muß also $\xi(\lambda_2) \geqq \xi(\lambda_1)$ sein.

Schreibt man nun z. B.

$$\psi(\lambda) = \xi(\lambda) + \frac{1}{\lambda},$$

so wächst $\psi(\lambda)$ ins Unendliche, wenn λ gegen Null abnimmt. Bedeutet φ die inverse Funktion von ψ, so ist also $\varphi(x)$ eine bei wachsendem x monoton abnehmende Funktion und $\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$. Außerdem ist

$$\sigma'(\lambda, x) > \sigma$$

für alle $x \geqq \psi(\lambda)$.

In dem Streifen

$$y = f(x) + \Theta \varphi(x), \qquad 0 \leqq \Theta \leqq 1,$$

besitzen dann die Gitterpunktabszissen eine durchschnittliche Dichte $> \sigma$. Wählt man nämlich λ beliebig und setzt $x = \psi(\lambda)$ und also $\lambda = \varphi(x)$, so wird

$$\sigma(x) \geqq \sigma'(\lambda, x) > \sigma,$$

wenn $\sigma(x)$ die Dichte in diesem Streifen für das Intervall 1 bis x ist. Hierdurch ist Satz 12 bewiesen.

Man sieht hieraus, daß, wenn die Funktionswerte $f(1), f(2), \ldots$ mod 1 überall gleich dicht verteilt sind, die Verteilungsdichte in jeder asymptotischen Umgebung der Kurve $y = f(x)$ gleich Null ist; umgekehrt folgt aber aus dem letzteren nur, daß im Parallelstreifen $y = f(x) + \vartheta\lambda$ die Gitterpunktdichte beliebig klein wird bei hinreichend kleinem λ.

Nun könnte man vermuten, weil der Satz von der Gleichverteilung einen größeren Inhalt hat, mit dessen Hilfe genauere Sätze zu erhalten über die Schnelligkeit, mit der die Gitterpunktdichte eines asymptotischen Streifens gegen Null abnimmt, wenn man ins Unendliche geht. Dies ist jedoch nicht der Fall, wie die folgenden Überlegungen zeigen.

Es ist klar, daß man $f(x)$ so wählen kann, daß die Funktionswerte

$$f(1), f(2), \ldots$$

mod 1 einer Reihe beliebig gewählter Zahlen $\geqq 0$ und < 1

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots$$

kongruent werden. Nun sei die Zahlenreihe in zwei Teile geteilt; die Teilmengen seien M_1 mit den Elementen $a_1, a_2, \ldots$ und M_2 mit den Elementen $b_1, b_2, \ldots$. Die Dichte von M_2 soll 0 sein. Weiter setze ich

$$\gamma_{a_n} = \alpha_n, \qquad \gamma_{b_n} = \beta_n.$$

Die Zahlen α_n können natürlich auf unendlich viele Weisen derart gewählt werden, daß sie mod 1 überall gleich dicht verteilt sind. Weiter kann man die Zahlen β_n so wählen, daß für ein gewisses ϑ zwischen 0 und 1

$$\beta_n \equiv -\vartheta\varphi(b_n) \pmod 1,$$

wobei $\varphi(x)$ eine beliebige Funktion ist, derart, daß $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x) = 0$ ist.

In dem asymptotischen Streifen

$$y = f(x) + \vartheta\varphi(x)$$

muß dann die Verteilungsdichte $= 0$ sein; denn die Gitterpunktabszissen a_n, für welche die Funktionswerte $f(a_n)$ mod 1 gleich dicht verteilt sind, haben natürlich darin die Dichte 0, und die Zahlen b_n haben der Annahme zufolge überhaupt die Dichte 0. Zugleich sind aber die Zahlen

$$f(1), f(2), \ldots$$

mod 1 überall gleich dicht verteilt; denn die Dichte der Zahlen b_n ist ja 0, so daß sie keinen Einfluß auf das Verhältnis der Dichten der Gitterpunkte in zwei gleich hohen Parallelstreifen ausüben können.

Dies zeigt also, daß in beliebigen asymptotischen Streifen, deren Höhen also im Unendlichen so schnell gegen 0 abnehmen können, wie man will, die Dichte der Gitterpunktabszissen beliebig langsam gegen 0 abnehmen kann, während trotzdem die Werte $f(1), f(2), \ldots$ mod 1 gleich dicht verteilt sind.

In § 4 werde ich einen anderen Dichtigkeitsbegriff einführen, nämlich die Flächendichte (Def. 5). Mit Hilfe dieses Begriffs kann die Gleichverteilung mod 1 auch so ausgedrückt werden:

In jedem Parallelstreifen ist die durchschnittliche Flächendichte $= 1$. Betrachtet man aber wieder asymptotische Streifen, so läßt sich aus der Gleichverteilung nichts in bezug auf die Flächendichte ableiten; das sieht man sofort aus den Sätzen in § 4.

§ 4.

Verschärfungen der Verteilungssätze in einigen besonders einfachen Fällen.

Obwohl die unten angegebenen genaueren Verteilungssätze zum Teil auch mit Hilfe anderer bekannter Mittel zu erhalten sind, wie Kettenbruchentwicklungen, Sätze über Gitterpunkte in konvexen Figuren usw., möchte ich doch gern zeigen, wie sie in ähnlicher Art wie die früheren Resultate beweisbar sind.

Satz 13a. *Sind* (x_1, y_1) *und* (x_2, y_2) *zwei Gitterpunkte des Streifens*

$$0 \leqq y - \alpha x \leqq \frac{1}{\varphi(x)},$$

$\varphi(x)$ monoton ins Unendliche wachsend, wenn x ins Unendliche wächst, und $\frac{y_1}{x_1} \neq \frac{y_2}{x_2}$, $x_2 > x_1$, so ist immer

$$x_2 \geqq \varphi(x_1).$$

Beweis. Aus den Gleichungen

$$y_1 - \alpha x_1 = \frac{\vartheta_1}{\varphi(x_1)},$$

$$y_2 - \alpha x_2 = \frac{\vartheta_2}{\varphi(x_2)}$$

bekommt man

$$x_2 y_1 - x_1 y_2 = \vartheta_1 \frac{x_2}{\varphi(x_1)} - \vartheta_2 \frac{x_1}{\varphi(x_2)},$$

woraus, da $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$ sein soll, und beide $\vartheta \geqq 0$ sind,

$$\text{entweder} \quad \vartheta_1 \frac{x_2}{\varphi(x_1)} \geqq 1 \quad \text{oder} \quad \vartheta_2 \frac{x_1}{\varphi(x_2)} \geqq 1.$$

Da beide $\vartheta \leqq 1$ sind, und außerdem $x_2 > x_1$, $\varphi(x_2) > \varphi(x_1)$, bekommt man in allen Fällen

$$x_2 \geqq \varphi(x_1).$$

Ist $\frac{\varphi(x)}{x} > 1$, jedenfalls für alle hinreichend großen x, so ist $\vartheta_2 \frac{x_1}{\varphi(x_2)} < 1$ und also

$$x_2 > \frac{\varphi(x_1)}{\vartheta_1}.$$

Dies kann vielleicht am schönsten so ausgedrückt werden:

Sind (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei Gitterpunkte derart, daß $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$ ist, und

$$0 \leqq x_1(y_1 - \alpha x_1) \leqq 1, \qquad 0 \leqq x_2(y_2 - \alpha x_2) \leqq 1,$$

so ist

$$x_2(y_1 - \alpha x_1) \geqq 1 \quad \text{oder} \quad x_1(y_2 - \alpha x_2) \geqq 1$$

entsprechend den beiden Möglichkeiten $x_2 > x_1$ bzw. $x_1 > x_2$.

Satz 13b. *Gehören (x_1, y_1) und (x_2, y_2) beide zum Streifen*

$$|y - \alpha x| \leqq \frac{1}{\varphi(x)},$$

so ist, wenn sie auf verschiedenen Seiten der Geraden $y = \alpha x$ liegen,

$$\frac{x_2}{\varphi(x_1)} + \frac{x_1}{\varphi(x_2)} \geqq 1.$$

Der Beweis ist äußerst leicht, wenn man nur bemerkt, daß die ϑ hier verschiedene Vorzeichen bekommen.

Einen wichtigen Spezialfall dieser Sätze erhält man, wenn $\varphi(x) = Cx$ gesetzt wird. Für den Streifen

$$0 \leqq y - \alpha x \leqq \frac{1}{Cx}, \qquad C > 1$$

wird

$$x_2 > C x_1 \quad \text{oder sogar} \quad x_2 > \frac{C x_1}{\vartheta_1}.$$

Für den Streifen

$$|y - \alpha x| \leqq \frac{1}{Cx}, \qquad C > 2$$

bekommt man

$$\frac{x_2}{x_1} > \frac{C + \sqrt{C^2 - 4}}{2}.$$

Denn man hat ja nach Satz 13b

$$\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} > C,$$

woraus man durch Auflösung die angegebene untere Schranke für $\frac{x_2}{x_1}$ erhält.

Daß es nicht möglich sein kann, die angegebene untere Schranke für $\frac{x_2}{x_1}$ allgemein zu vergrößern, jedenfalls nicht wesentlich, wenn sie von den x unabhängig sein soll, ist leicht nachzuweisen. Man kann z. B. $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ setzen und die Gitterpunkte mit positiven Koordinaten des Streifens

$$\left| y - \frac{\sqrt{5}+1}{2} x \right| < \frac{1}{(\sqrt{5} - \varepsilon)\, x}, \qquad \varepsilon \text{ beliebig kleine positive Größe,}$$

betrachten. Man findet leicht, daß unter diesen Gitterpunkten alle hinreichend großen ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$y^2 - xy - x^2 = \pm 1$$

vorkommen. Der n-te dieser Gitterpunkte ist

$$x_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}, \qquad y_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}},$$

folglich

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Nach der oben gefundenen unteren Schranke des Quotienten $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ hat man

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{\sqrt{5} - \varepsilon + \sqrt{1 - 2\sqrt{5}\,\varepsilon + \varepsilon^2}}{2},$$

dessen Grenzwert für $\varepsilon = 0$ eben $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ist.

In ähnlicher Weise kann man zeigen, daß die Abschätzung $\frac{x_2}{x_1} > C$ für den Streifen $0 \leqq y - \alpha x \leqq \frac{1}{Cx}$ nicht allgemein verbessert werden kann.

Satz 13c. *Liegen die Gitterpunkte* (x_1, y_1) *und* (x_2, y_2) *beide im Streifen*

$$\frac{m}{Cx} \leqq y - \alpha x \leqq \frac{m+1}{Cx}, \quad m \text{ ganz positiv}, \quad C > 1,$$

während $x_2 > x_1$ *und* $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$ *ist, so muß*

$$\frac{x_2}{x_1} > \frac{2m+C}{2m+1}$$

sein.

Beweis: Schreibt man

$$y_1 - \alpha x_1 = \frac{\vartheta_1}{Cx_1}, \qquad y_2 - \alpha x_2 = \frac{\vartheta_2}{Cx_1}, \qquad \text{beide } \vartheta \geqq m \text{ und } \leqq m+1,$$

so wird

$$C(x_2 y_1 - x_1 y_2) = \vartheta_1 \frac{x_2}{x_1} - \vartheta_2 \frac{x_1}{x_2}$$

$$= (\vartheta_1 - m)\frac{x_2}{x_1} - (\vartheta_2 - m)\frac{x_1}{x_2} + m\left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2}\right).$$

Gesetzt nun, es sei

$$\frac{x_2}{x_1} \leqq \frac{2m+C}{2m+1},$$

so erhielte man

$$\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2} \leqq \frac{2m+C}{2m+1} - \frac{2m+1}{2m+C} = \frac{(2m+C)^2 - (2m+1)^2}{(2m+1)(2m+C)}$$

$$= \frac{(4m+C+1)(C-1)}{(2m+1)(2m+C)} < \frac{2(C-1)}{2m+1},$$

woraus

$$m\left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2}\right) < \frac{2m(C-1)}{2m+1}$$

und

$$\left|(\vartheta_1 - m)\frac{x_2}{x_1} - (\vartheta_2 - m)\frac{x_1}{x_2}\right| > C(x_2 y_1 - x_1 y_2) - \frac{2m}{2m+1}(C-1)$$

$$\geqq \frac{2m+C}{2m+1}.$$

Da $\vartheta_1 - m$ und $\vartheta_2 - m$ beide < 1, $x_2 > x_1$ und $\frac{2m+C}{2m+1} > 1$ sind, folgt

$$\frac{x_2}{x_1} > \frac{2m+C}{2m+1}$$

entgegen der Voraussetzung.

Man kann auch Sätze aufstellen, die eine untere Grenze der Dichtigkeit der Gitterpunkte in Umgebungen einer Geraden angeben; ich erwähne hier ein paar derartige Sätze.

Definition 4. Ich nenne einen Gitterpunkt *primitiv*, wenn die beiden Koordinaten relativ prim sind.

Satz 14a. *Ist (x, y) ein primitiver Gitterpunkt, so daß*

$$y - \alpha x = \frac{\vartheta}{x}, \qquad |\vartheta| < \frac{1}{2},$$

so gibt es einen primitiven Gitterpunkt (x', y') derart, daß

$$y' - \alpha x' = \frac{\vartheta'}{x'}, \qquad |\vartheta'| < 1,$$

während

$$x < x' < \frac{x}{|\vartheta|}.$$

Beweis. Es seien u und v solche ganze Zahlen, daß für $\vartheta > 0$ bzw. $\vartheta < 0$

$$yu - xv = 1 \quad \text{bzw.} \quad yu - xv = -1.$$

Setzt man

$$x' = u + xt$$

und für $\vartheta > 0$ bzw. $\vartheta < 0$

$$\frac{x}{\vartheta} - x \leqq u + xt < \frac{x}{\vartheta} \quad \text{bzw.} \quad -\frac{x}{\vartheta} - x \leqq u + xt < -\frac{x}{\vartheta},$$

so ist hierdurch t als ganze rationale Zahl eindeutig bestimmt. Man erhält

$$-\vartheta x \leqq \vartheta x' - x < 0 \quad \text{bzw.} \quad 0 < \vartheta x' + x \leqq -\vartheta x.$$

Setzt man dann

$$(\vartheta x' - x)x' = \vartheta' x^2 \quad \text{bzw.} \quad (\vartheta x' + x)x' = \vartheta' x^2,$$

so bekommt man in beiden Fällen

$$|\vartheta'| < 1.$$

Setzt man weiter

$$y' = v + yt,$$

so wird

$$yx' - xy' = +1 \quad \text{bzw.} \quad yx' - xy' = -1$$

und in beiden Fällen

$$x'\left(y - \alpha x - \frac{\vartheta}{x}\right) - x\left(y' - \alpha x' - \frac{\vartheta'}{x'}\right) = 0.$$

Aus der Gleichung $y - \alpha x = \frac{\vartheta}{x}$ folgt also

$$y' - \alpha x' = \frac{\vartheta'}{x'}.$$

Zugleich ist offenbar

$$x < x' < \frac{x}{|\vartheta|}.$$

Der Satz ist hierdurch bewiesen.

Mittels ähnlicher Betrachtungen kann man auch folgenden Satz beweisen:

Satz 14b. *Ist (x, y) ein solcher primitiver Gitterpunkt, daß*

$$y - \alpha x = \frac{\vartheta}{x}, \qquad |\vartheta| < \frac{2}{3},$$

so gibt es einen primitiven Gitterpunkt (x', y') derart, daß

$$y' - \alpha x' = \frac{\vartheta'}{x'}, \qquad |\vartheta'| < \frac{2}{3}.$$

während

$$x < x' < \left(\frac{1}{|\vartheta|} + \frac{1}{2}\right) x.$$

Definition 5. Ist $n(x_1, x_2)$ die Zahl der Gitterpunkte eines Streifens, deren Grenzabszissen $> x_1$ und $\leqq x_2$ sind, während $A(x_1, x_2)$ der Flächeninhalt dieses Streifenstückes ist, so kann man den Quotienten

$$s(x_1, x_2) = \frac{n(x_1, x_2)}{A(x_1, x_2)}$$

passend die *Flächendichte* der Gitterpunkte im Gebiete nennen. Hat dieser Quotient einen bestimmten Grenzwert, wenn das Intervall x_1 bis x_2 unendlich lang wird, so kann dieser Grenzwert die durchschnittliche Flächendichte in dem unendlichen Intervalle heißen.

Satz 15a. *In jedem Streifen*

$$0 \leqq y - \alpha x < \frac{k}{x}$$

bleibt die Flächendichte $s_p(1, x)$ der primitiven Gitterpunkte für alle x unterhalb einer endlichen Schranke.

Beweis. Ist $l = [k]$, so ist $C > 1$, wenn $C = \frac{l+1}{k}$ gesetzt wird. Es genügt dann offenbar zu zeigen, daß die Flächendichte nach oben beschränkt ist in jedem Gebiete

$$\frac{m}{Cx} \leqq y - \alpha x < \frac{m+1}{Cx}.$$

Es sei (x_n, y_n) der n-te primitive Gitterpunkt. Dann muß nach Satz 13c

$$x_{n+1} > \frac{2m + C}{2m + 1} x_n$$

sein. Folglich wird die Zahl n_p der primitiven Gitterpunkte

$$n_p(1, x) \leqq \frac{\log x}{\log \frac{2m + C}{2m + 1}},$$

während andererseits

$$A(1, x) = \frac{m+1}{C} \log x - \frac{m}{C} \log x = \frac{1}{C} \log x.$$

Folglich

$$s_p(1, x) \leqq \frac{C}{\log \frac{2m + C}{2m + 1}},$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung ersichtlich ist.

Man findet leicht, daß ein solcher Satz nicht besteht für Umgebungen, deren Höhe schneller gegen Null konvergiert, wenn x ins Unendliche wächst. Man braucht nur α derart zu wählen, daß die Teilnenner seines Kettenbruches hinreichend schnell wachsen. Andererseits gibt es aber auch irrationale Zahlen α derart, daß die Flächendichte in jeder Umgebung der erwähnten Art $= 0$ ist. Dies ist nämlich jedenfalls so, wenn die Teilnenner nach oben beschränkt sind.

Im allgemeinen werden die Gitterpunkte eines Streifens nicht alle primitiv sein. Sind (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ die nach wachsenden Abszissen geordneten primitiven Gitterpunkte, so sind die Gitterpunkte überhaupt in der Form $(x_n \mu_n, y_n \mu_n)$ enthalten, wobei μ_n für jedes n gewisse Werte $1, 2, \ldots, \nu_n$ durchläuft.

Betrachtet man den Streifen

$$0 \leqq y - \alpha x \leqq \frac{1}{Cx},$$

so sieht man, weil $(x_n \nu_n, y_n \nu_n)$ noch darin vorkommt, dagegen $(x_n(\nu_n + 1), y_n(\nu_n + 1))$ nicht darin vorkommt, daß

$$\vartheta_n \nu_n^2 \leqq 1, \qquad \vartheta_n (\nu_n + 1)^2 > 1$$

sein muß, indem $y_n - \alpha x_n = \frac{\vartheta_n}{C x_n}$ gesetzt ist, d. h.

$$\nu_n = \left[\frac{1}{\sqrt{\vartheta_n}}\right].$$

Betrachtet man das Gebiet

$$|y - \alpha x| \leqq \frac{1}{Cx},$$

bekommt man in derselben Weise

$$\nu_n = \left[\frac{1}{\sqrt{|\vartheta_n|}}\right].$$

Satz 13d. *Im Streifen*

$$0 \leqq y - \alpha x \leqq \frac{1}{Cx}, \qquad C > 1,$$

ist

$$x_{n+1} \geqq \frac{C \nu_n^2 x_n}{\vartheta_n} \geqq C \nu_n^4 x_n \quad \left(\text{oder auch} > \frac{C}{\vartheta_n}\left(\frac{1}{\sqrt{\vartheta_n}} - 1\right)^2 x_n\right).$$

Beweis. Da die Quotienten $\frac{x_n}{y_n}$ und $\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$ verschieden sind, bekommt man durch Betrachtung der beiden Gitterpunkte $(x_n \nu_n, y_n \nu_n)$ und (x_{n+1}, y_{n+1}) in derselben Weise wie früher

$$C\nu_n \leqq C \,|\, x_{n+1} \nu_n y_n - y_{n+1} \nu_n x_n \,| = \left| \vartheta_n \frac{x_{n+1}}{\nu_n x_n} - \vartheta_{n+1} \frac{\nu_n x_n}{x_{n+1}} \right|;$$

dabei sind ϑ_n und ϑ_{n+1} beide $\geqq 0$ und $\leqq 1$. Weiter muß $x_{n+1} > x_n \nu_n$ sein; denn sonst würde folgen

$$\frac{\nu_n x_n}{x_{n+1}} > C\nu_n > \nu_n,$$

woraus $x_n > x_{n+1}$, was ein Widerspruch ist. Deshalb wird

$$\vartheta_n \frac{x_{n+1}}{\nu_n x_n} \geqq C\nu_n,$$

d. h.

$$x_{n+1} \geqq \frac{C\nu_n^2 x_n}{\vartheta_n},$$

w. z. b. w.

Sind $(x_1, y_1), \ldots, (x_\mu, y_\mu)$ diejenigen primitiven Gitterpunkte z. B. des Streifens $0 \leqq y - \alpha x < \frac{1}{Cx}$, deren Abszissen $\geqq 1$ und $\leqq m$ sind, so bekommt man

$$x_\mu > C^{\mu-1} (\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{\mu-1})^4 x_1$$

und also auch

$$m > C^{\mu-1} (\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{\mu-1})^4 x_1.$$

Die Zahl $n(1, m)$ der Gitterpunkte ist $\leqq \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\mu$. Für die Dichte $\sigma(1, m)$ der Gitterpunktabszissen (man könnte sie die lineare Dichte nennen) bekommt man deshalb die Ungleichung

$$\sigma(1, m) < \frac{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\mu}{C^{\mu-1} (\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{\mu-1})^4 x_1}.$$

Der Flächeninhalt des betrachteten Gebietes ist

$$\int_1^m \frac{dx}{Cx} = \frac{1}{C} \log m.$$

Folglich hat man für die Flächendichte die Ungleichung

$$s(1, m) < \frac{C(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\mu)}{(\mu - 1) \log C + 4 (\log \nu_1 + \ldots + \log \nu_{\mu-1}) + \log x_1}.$$

Satz 15b. *Sind die Zahlen ϑ nach unten beschränkt, so bleibt im Gebiete*

$$0 \leqq y - \alpha x < \frac{1}{Cx}, \quad C > 1, \quad 1 \leqq x \leqq m,$$

die Flächendichte für alle m nach oben beschränkt.

Beweis. Aus der oben gefundenen Beziehung zwischen ν_n und ϑ_n folgt, daß die Zahlen ν nach oben beschränkt sein müssen, wenn die ϑ nach unten beschränkt sind. Die Richtigkeit der Behauptung sieht man dann fast unmittelbar aus der gefundenen oberen Schranke für $s(1, m)$. Natürlich gilt der Satz auch, wenn man einen Streifen $|y - \alpha x| < \frac{1}{Cx}$ betrachtet.

Sind aber die ϑ nicht nach unten beschränkt, können unendlich große Flächendichten vorhanden sein. Dies ist z. B. sicher der Fall, wenn $\lim\limits_{n \to \infty} \vartheta_n = 0$ ist, wie ich zeigen will.

Ich betrachte die Gitterpunkte (x, y), für welche

$$y - \alpha x = \frac{\vartheta}{x}, \qquad |\vartheta| < 1,$$

und nehme an, daß die ϑ_n gegen 0 konvergieren. Es seien dann $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$ diejenigen primitiven Gitterpunkte, nach wachsenden Abszissen geordnet, für welche schon alle $\vartheta < \frac{1}{2}$ sind. Dann folgt aus Satz 14a, daß immer

$$x_{n+1} < \frac{x_n}{|\vartheta_n|}, \quad \text{und also} \quad x_{n+1} < (\nu_n + 1)^2 x_n.$$

Betrachtet man nun das Gebiet

$$|y - \alpha x| < \frac{1}{x}, \qquad x_1 \leqq x \leqq \nu_m x_m,$$

so ist die Zahl der darin vorkommenden Gitterpunkte $= \sum\limits_{r=1}^{m} \nu_r$, während der Flächeninhalt des Gebietes gleich

$$2 \int\limits_{x_1}^{\nu_m x_m} \frac{dx}{x} = 2 \log \frac{\nu_m x_m}{x_1} < 2 \log \nu_m \prod_{r=1}^{m-1} (\nu_r + 1)^2.$$

Folglich wird die Flächendichte in diesem Gebiete

$$s(x_1, \nu_m x_m) > \frac{\sum\limits_{r=1}^{m} \nu_r}{2 \log \nu_m + 4 \sum\limits_{r=1}^{m-1} \log(\nu_r + 1)}.$$

Da aber die Zahlen ν_n ins Unendliche wachsen müssen, wegen $\lim\limits_{n \to \infty} \vartheta_n = 0$, sieht man, daß $s(x_1, \nu_m x_m)$ unendlich groß wird für $m \to \infty$.

Genau ebenso geht es natürlich, wenn man einen Streifen $|y - \alpha x| < \frac{1}{Cx}$ betrachtet.

Satz 16. *Es gebe unendlich viele rationale Annäherungswerte* $\frac{y}{x}$ *der irrationalen Zahl* α *derart, daß*

$$|y - \alpha x| < \frac{1}{\varphi(x)},$$

wobei $\varphi(x)$ *eine monoton wachsende Funktion ist. Es sei* $\bar{\varphi}$ *die inverse Funktion von* φ, $\psi(x)$ *derart, daß* $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\bar{\varphi}(x)}{\psi(x)} = 0$ *ist, und* $\bar{\psi}$ *die inverse Funktion von* ψ. *Weiter seien* (p_r, q_r) $(r = 1, 2, \ldots)$ *die nach wachsenden Abszissen geordneten primitiven Gitterpunkte, für welche*

$$|q - \alpha p| < \frac{1}{\psi(p)}.$$

Dann kommt zwischen $\frac{\varphi(x)}{2}$ und $\bar{\psi}(2x)$ *höchstens ein* p_r *vor.*

Beweis. Aus den Gleichungen

$$q - \alpha p = \frac{\delta}{\psi(p)}, \qquad -1 < \delta < +1,$$

$$y - \alpha x = \frac{\varepsilon}{\varphi(x)}, \qquad -1 < \varepsilon < +1,$$

bekommt man

$$qx - py = \frac{\delta}{\psi(p)} x - \frac{\varepsilon}{\varphi(x)} p.$$

Setzt man nun für p und q zwei aufeinanderfolgende Wertepaare (p_r, q_r) und (p_{r+1}, q_{r+1}), so muß

$$\text{entweder} \quad q_r x - p_r y \neq 0 \quad \text{oder} \quad q_{r+1} x - p_{r+1} y \neq 0$$

sein; denn sonst bekäme man auch $\frac{p_r}{q_r} = \frac{p_{r+1}}{q_{r+1}}$, was unmöglich ist, weil (p_r, q_r) und (p_{r+1}, q_{r+1}) zwei verschiedene primitive Gitterpunkte sind. Ist aber

$$qx - py \neq 0,$$

so wird

$$\left| \frac{\delta}{\psi(p)} x - \frac{\varepsilon}{\varphi(x)} p \right| \geqq 1,$$

woraus

$$\text{entweder} \quad \frac{|\delta| x}{\psi(p)} \geqq \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{|\varepsilon|}{\varphi(x)} p \geqq \frac{1}{2},$$

d. h.

$$\text{entweder} \quad p \leqq \bar{\psi}(2x) \quad \text{oder} \quad p \geqq \frac{\varphi(x)}{2}.$$

Die Beziehung

$$\frac{\varphi(x)}{2} > p > \bar{\psi}(2x)$$

ist also entweder für $p = p_r$ oder für $p = p_{r+1}$ unmöglich.

Hierdurch ist der Satz bewiesen.

Weiß man umgekehrt, daß primitive Gitterpunkte (p_r, q_r), für welche $|q - \alpha p| < \frac{1}{\psi(p)}$, so dicht verteilt sind, daß für jedes $x > A$ zwischen $\bar{\psi}(2x)$ und $\frac{\varphi(x)}{2}$ mindestens zwei Werte von p vorkommen, so kann die Ungleichung

$$|y - \alpha x| < \frac{1}{\varphi(x)}$$

nur eine endliche Zahl von Lösungen in ganzen positiven Zahlen x und y haben; denn x muß $\leqq A$ sein.

Offenbar ist es nicht nötig, daß die Gitterpunkte (p, q) primitiv sind, wenn nur $p_r q_{r+1} - p_{r+1} q_r \neq 0$ ist für jedes r.

Dies Prinzip ist — mit kleinen Modifikationen — von A. Thue in den Beweisen seiner berühmten Sätze über Annäherungswerte algebraischer Zahlen benutzt worden, obwohl er das Prinzip selbst, soweit mir bekannt, nie allgemein formuliert hat [12]).

Zum Schlusse will ich einige genauere Abschätzungen der Verteilungsdichtigkeit der Gitterpunkte des Streifens

$$0 < y - \sum_{r=0}^{n} a_r x^{n-r} < \frac{1}{\varphi(x)}, \quad \varphi(x) \text{ monoton wachsend,}$$

erwähnen. Sind $(x_1, y_1), \ldots, (x_{n+2}, y_{n+2})$ darin vorkommende Gitterpunkte, $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$, so erhält man

$$\begin{vmatrix} y_1 & x_1^n & \ldots & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2^n & \ldots & x_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n+2} & x_{n+2}^n & \ldots & x_{n+2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\vartheta_1}{\varphi(x_1)} & x_1^n & \ldots & x_1 & 1 \\ \frac{\vartheta_2}{\varphi(x_2)} & x_2^n & \ldots & x_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\vartheta_{n+2}}{\varphi(x_{n+2})} & x_{n+2}^n & \ldots & x_{n+2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= D_1 \frac{\vartheta_1}{\varphi(x_1)} + D_2 \frac{\vartheta_2}{\varphi(x_2)} + \ldots + D_{n+2} \frac{\vartheta_{n+2}}{\varphi(x_{n+2})},$$

alle $\vartheta > 0$ und < 1. Falls also die $n + 2$ Gitterpunkte nicht auf derselben Kurve $y = \sum_{r=0}^{n} a_r x^{n-r}$ liegen, muß

$$\left| D_1 \frac{\vartheta_1}{\varphi(x_1)} + D_2 \frac{\vartheta_2}{\varphi(x_2)} + \ldots + D_{n+2} \frac{\vartheta_{n+2}}{\varphi(x_{n+2})} \right| \geqq 1$$

sein. Hieraus folgt, da die Unterdeterminanten D abwechselnde Zeichen

---

[12]) Vgl. z. B. seine Abhandlung: Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen (Journal f. d. r. u. a. Math. 135).

haben, daß mindestens ein Glied links $\geqq \dfrac{1}{\left[\frac{n+3}{2}\right]}$ sein muß, d. h. für ein r zwischen 1 und $n+2$

$$|D_r| \geqq \frac{\varphi(x_r)}{\left[\frac{n+3}{2}\right]}.$$

Weiter ist

$$(x_{n+2}-x_1)^{\binom{n+1}{2}} > |D_r|,$$

woraus

$$x_{n+2}-x_1 > \sqrt[\binom{n+1}{2}]{\frac{\varphi(x_r)}{\left[\frac{n+3}{2}\right]}}.$$

Folglich hat man auch in jedem Falle

$$x_{n+2}-x_1 > \sqrt[\binom{n+1}{2}]{\frac{\varphi(x_1)}{\left[\frac{n+3}{2}\right]}}.$$

Durch genauere Überlegungen kann man natürlich bessere Abschätzungen bekommen, besonders wenn man nicht verlangt, $x_{n+2}-x_1$ nur mit Hilfe von x_1 abzuschätzen. In dem folgenden Satze läßt sich ein besseres Resultat erreichen.

Satz 17. *Es seien* $(x_1, y_1), \ldots, (x_{n+2}, y_{n+2})$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$, *Gitterpunkte der Kurve* $y = \sum\limits_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^{n-r}$, *die Reihe konvergent für hinreichend große* x_1. *Dann gilt für alle hinreichend großen* x *immer eine Ungleichung der Form*

$$x_{n+2}-x_1 > \beta\, x_1^{\frac{2(m+n+1)}{(n+1)(n+2)}}, \quad \beta > 0,$$

wenn α_{m+n} *der erste der Koeffizienten* $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots$ *ist, der* $\neq 0$ *ist.*

Beweis. Es ist

$$\pm \begin{vmatrix} y_1 & x_1^n & \ldots x_1 & 1 \\ y_2 & x_2^n & \ldots x_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ y_{n+2} & x_{n+2}^n & \ldots x_{n+2} & 1 \end{vmatrix} = \sum_{r=0}^{\infty} \begin{vmatrix} x_1^n \ldots x_1 & 1 & \frac{\alpha_{m+n+r}}{x_1^{m+r}} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n+2}^n \ldots x_{n+2} & 1 & \frac{\alpha_{m+n+r}}{x_{n+2}^{m+r}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^n & \ldots x_1 & 1 & \frac{1}{x_1} \\ x_2^n & \ldots x_2 & 1 & \frac{1}{x_2} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n+1}^n & \ldots x_{n+2} & 1 & \frac{1}{x_{n+2}} \end{vmatrix} (\alpha_{m+n} S_{m-1} + \alpha_{m+n+1} S_m + \ldots),$$

wobei

$$S_l = \sum \frac{1}{x_1^{j_1} \dots x_{n+2}^{j_{n+2}}},$$

wenn die Summation über alle nicht-negativen j ausgedehnt wird, für welche $\sum_{r=1}^{n+2} j_r = l$ ist. Da augenscheinlich

$$S_{m-1} \geqq \frac{1}{x_1^{m-1}}, \quad S_{m+r} < \frac{\binom{m+n+r+1}{m+r}}{x_1^{m+r}} \qquad (r = 0, 1, 2, \dots),$$

kann man, wenn η eine beliebige Zahl > 1 ist, eine so große positive Zahl g finden, daß, wenn x_1 (und also auch $x_2, x_3, \dots, x_{n+2}) > g$ ist,

$$|\alpha_{m+n+1} S_m + \alpha_{m+n+2} S_{m+1} + \dots| < \frac{|\alpha_{m+n}| S_{m-1}}{\eta}.$$

Wenn $x_1 > g$ ist, kann deshalb die Determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & x_1^n & \dots x_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n+2} & x_{n+2}^n & \dots x_{n+2} & 1 \end{vmatrix}$$

nie verschwinden und muß also absolut $\geqq 1$ sein. Hieraus folgt

$$\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) |\alpha_{m+n}| \cdot \frac{\Pi(x_i - x_k)}{x_1 x_2 \dots x_{n+2}} \cdot S_{m-1} \geqq 1,$$

woraus, da $\quad S_{m-1} \leqq \dfrac{\binom{m+n}{m-1}}{x_1^{m-1}}$,

$$\Pi(x_i - x_k) > \frac{\eta \cdot x_1^m x_2 \dots x_{n+2}}{(\eta + 1) |\alpha_{m+n}| \cdot \binom{m+n}{m-1}},$$

und hieraus wieder, wenn $\left[\dfrac{\eta}{(\eta+1)|\alpha_{m+n}| \binom{m+n}{m-1}}\right]^{\frac{2}{(n+1)(n+2)}} = \beta$ gesetzt wird,

$$x_{n+2} - x_1 > \beta \cdot x_1^{\frac{2(m+n+1)}{(n+1)(n+2)}},$$

w. z. b. w.

Man findet leicht hieraus, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{x_\nu}$$

konvergent sein muß (falls überhaupt unendlich viele Gitterpunkte auf der Kurve liegen). Dies drückt natürlich mehr aus als die frühere Aussage (Satz 2), nach welcher die x_ν eine verschwindende Dichte haben; denn die Verteilungsdichte 0 einer Menge ganzer positiver Zahlen t_ν reicht ja nicht hin, um behaupten zu können, daß die Reihe $\sum \frac{1}{t_\nu}$ konvergent ist. Man denke z. B. an die Reihe der Primzahlen.

Schreibt man

$$x_{i+\nu(n+1)} = J_{\nu,i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

so beweist man leicht durch Induktion, daß für jedes ν und i jedenfalls

$$J_{\nu,i} > (\nu - c_i)^{\frac{(n+1)(n+2)}{n^2+n-2m} - \delta}$$

ist, wobei δ eine beliebig kleine positive Größe ist, und die c_i gewisse positive Konstanten sind.

Betrachtet man z. B. den speziellen Fall $m = \binom{n+1}{2}$, so bekommt man

$$x_{n+2} > C x_1, \quad C > 1,$$

woraus folgt, daß die Gitterpunkte auf der Kurve wenigstens so zerstreut liegen wie die Glieder von $n+1$ wachsenden geometrischen Reihen [13]).

Betrachten wir wieder den Streifen

$$0 < y - \sum_{r=0}^{n} \alpha_r x^{n-r} < \frac{1}{\varphi(x)},$$

so ist übrig geblieben zu untersuchen, wie es geht, wenn $n+2$ oder mehr Gitterpunkte auf derselben Kurve $y = \sum_{r=0}^{n} a_r x^{n-r}$ liegen. Obwohl ich nicht weiß, ob die folgenden Abschätzungen viel wert sind, will ich sie doch angeben.

Es mögen $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ auf der Kurve $y = \sum_{r=0}^{n} a_r x^{n-r}$ liegen, (x_{m+1}, y_{m+1}) dagegen nicht, $x_1 < x_2 < \ldots < x_{m+1}$. Für beliebige Zahlen r und s der Reihe $n+1, n+2, \ldots, m$ müssen dann die Unterdeterminanten

$$D_{1,r}, \ldots, D_{n+2,r}$$

der letzten Zeile der Determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2^n & x_2^{n-1} & \ldots & x_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & x_n & 1 \\ y_r & x_r^n & x_r^{n-1} & \ldots & x_r & 1 \\ y_s & x_s^n & x_s^{n-1} & \ldots & x_s & 1 \end{vmatrix}$$

[13]) Für den speziellen Fall $n = 1$ habe ich dies schon l. c. S. 44 bewiesen.

immer proportional bleiben. Bedeutet also f_r den gr. gem. Teiler der Zahlen $D_{s,r}$ $(s=1,2,\ldots,n+2)$, so müssen die Quotienten $\frac{D_{s,r}}{f_r}$ für alle r dieselben Zahlen d_s bleiben. Also

$$D_{s,r}=d_s f_r,$$

und weil augenscheinlich $D_{1,r}>D_{1,r'}$ ist, wenn $r>r'$, folgt, daß auch

$$f_r>f_{r'}$$

sein muß.

Da (x_{m+1}, y_{m+1}) nicht auf der Kurve $y=\Sigma\, a_r x^{n-r}$ liegt, ist

$$D=\begin{vmatrix} y_1 & x_1^n & \ldots & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2^n & \ldots & x_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & x_n^n & \ldots & x_n & 1 \\ y_m & x_m^n & \ldots & x_m & 1 \\ y_{m+1} & x_{m+1}^n & \ldots & x_{m+1} & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Die Unterdeterminanten $D_{1,m},\ldots,D_{n+2,m}$ der Glieder der letzten Zeile sind alle durch f_m teilbar, und zugleich muß nach dem oben gefundenen

$$f_m \geqq m-n.$$

sein, woraus

$$|D|\geqq m-n.$$

Hieraus bekommt man in ähnlicher Weise wie früher

$$x_{m+1}-x_1>\left[\frac{m-n}{\left[\frac{n+3}{2}\right]}\varphi(x_1)\right]^{\frac{2}{(n+1)(n+2)}}.$$

Betrachtet man die Punkte $(x_t, y_t), (x_{t+1}, y_{t+1}), \ldots, (x_{t+n-1}, y_{t+n-1})$, (x_m, y_m), (x_{m+1}, y_{m+1}), bekommt man ebenso

$$x_{m+1}-x_t>\left[\frac{m-n-t+1}{\left[\frac{n+3}{2}\right]}\varphi(x_t)\right]^{\frac{2}{(n+1)(n+2)}}.$$

Folglich wird

$$x_{m+1}>\max\left(x_t+\left[\frac{m-n-t+1}{\left[\frac{n+3}{2}\right]}\varphi(x_t)\right]^{\frac{2}{(n+1)(n+2)}}\right),\quad (t=1,2,\ldots,m-n).$$

§ 5.

Über einige ziemlich umfassende Fälle, in denen nur endlich viele ganzzahlige Lösungen einer Gleichung oder Ungleichung vorhanden sind.

Bisweilen ist es möglich, nachzuweisen, daß die Zahl der ganzzahligen Lösungen einer Gleichung oder Ungleichung nur eine endliche sein kann. Bisher ist es aber — soweit mir bekannt — bloß gelungen, zwei allgemeinere derartige Fälle zu finden. Erstens ist es A. Thue (l. c.) gelungen, zu beweisen, daß in jedem Streifen

$$|y - \alpha x| < \frac{\delta}{x^{\frac{n}{2}+\varepsilon}}, \quad \delta \text{ und } \varepsilon \text{ beliebige positive Größen,}$$

α algebraisch irrationale Zahl n-ten Grades, nur endlich viele Gitterpunkte vorkommen können. Dieser Satz ist später von C. Siegel verschärft und verallgemeinert worden[14]). Zweitens hat C. Runge[15]) bewiesen, daß gewisse Klassen von algebraischen Gleichungen — z. B. solche mit zwei Unbekannten, deren höchster homogener Teil durch mindestens zwei verschiedene irreduzible Funktionen teilbar ist — nur endlich viele ganzzahlige Lösungen haben; für diese Sätze habe ich in einer kleinen Abhandlung[16]) einen anderen Beweis gegeben. Während die Beweise der Sätze von Thue und Siegel sehr kompliziert sind, sind dagegen die Beweise der Rungeschen Sätze sehr einfach. Ich will hier einige Sätze beweisen, die mit den Rungeschen verwandt, aber nicht auf algebraische Gleichungen beschränkt sind.

Satz 18. *Es sei*

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^{\frac{n-r}{q}}, \text{ die Reihe abs. konvergent für hinreichend große } |x|,$$

wobei n und q positive ganze Zahlen sind, und die Koeffizienten α_r einem algebraischen Körper K vom Grade m angehören. Ist dann y eine transzendente Funktion, so gibt es nur endlich viele ganze positive x, für welche y rational $= \frac{z}{u}$ wird, wenn zugleich

$$u < x^{\varrho}, \ \varrho \text{ im voraus gegebene positive Zahl,}$$

sein soll.

---

[14]) Math. Zeitschr. 10.

[15]) Journal für d. r. u. a. Math. 100.

[16]) Über ganzzahlige Lösungen einer Klasse unbestimmter Gleichungen (Norsk matematisk forenings skrifter, Serie 1, Nr. 10).

Beweis. Es sei $\omega_1 = 1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ eine Basis des Körpers K. Dann kann man

$$\alpha_r = \sum_{s=1}^{m} \alpha_{r,s}\,\omega_s, \quad \text{alle } \alpha_{r,s} \text{ absolut rational,}$$

schreiben, wodurch man

$$y = \omega_1 \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_{r,1}\, x^{\frac{n-r}{q}} + \ldots + \omega_m \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_{r,m}\, x^{\frac{n-r}{q}}$$

erhält. Durch Potenzieren dieser Gleichung bekommt man weiter Gleichungen der Form

$$y^\nu = \omega_1 \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_{r,1}^{(\nu)}\, x^{\frac{\nu n-r}{q}} + \ldots + \omega_m \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_{r,m}^{(\nu)}\, x^{\frac{\nu n-r}{q}}$$

und also auch

$$x^\mu y^\nu = \sum_{s=1}^{m} \omega_s \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_{r,s}^{(\nu)}\, x^{\frac{\mu q+\nu n-r}{q}},$$

wo alle $\alpha_{r,s}^{(\nu)}$ absolut rational sind.

Man kann nun die letzte Gleichung für alle ganzen Zahlen μ und ν bilden, für welche $\mu \geqq 0$, $\nu > 0$ und $\mu + \nu \leqq N$ ist. Dabei hat $\mu q + \nu n$ einen Maximumswert M, der $\leqq N \max(q, n)$ ist. Man bekommt hierdurch $\frac{(N+1)N}{2}$ Gleichungen; darin kommen folgende Potenzen von x mit Exponenten $\geqq -N\varrho$ vor (der Einfachheit halber nehme ich an, daß ϱ ganz ist, was augenscheinlich erlaubt ist):

$$x^{-N\varrho},\ x^{-N\varrho+\frac{1}{q}},\ x^{-N\varrho+\frac{2}{q}},\ \ldots,\ x^{-\frac{1}{q}},\ x^0,\ x^{\frac{1}{q}},\ \ldots,\ x^{\frac{M}{q}},$$

deren Zahl $= N\varrho q + 1 + M$ ist. Wählt man N so groß, daß

$$\frac{(N+1)N}{2} \geqq (N\varrho q + 1 + M)m - \left[\frac{M}{q}\right],$$

was wegen der erwähnten Beziehung zwischen den Zahlen M und N sicher möglich ist, so sieht man, daß sowohl alle Potenzen von x mit gebrochenen Exponenten $> -N\varrho$ wie die Potenzen mit ganzen Exponenten $\geqq -N\varrho$, ausgenommen die mit Exponenten $\geqq 0$ und zugleich rationalen Koeffizienten, zwischen den Gleichungen eliminiert werden können. Wird gleichzeitig mit einer passenden ganzen Zahl multipliziert, erhält man das Eliminationsresultat in der Form

$$\Sigma\, C_{\mu,\nu}\, x^\mu y^\nu = P(x) + R(x),$$

wo die $C_{\mu,\nu}$ ganze rationale, nicht sämtlich verschwindende Zahlen sind, $P(x)$ ein ganzzahliges Polynom, $R(x)$ nicht identisch Null, weil y sonst algebraisch sein würde, und außerdem $R(x)$ nur Potenzen von x mit Exponenten

$< -\varrho N$ enthält. Es gibt dann bekanntlich eine so große Zahl g_1, daß $R(x) \neq 0$ ist, wenn $x > g_1$. Außerdem gibt es eine Zahl g_2 derart, daß

$$|R(x)| < \frac{1}{x^{\varrho N}},$$

wenn $x > g_2$. Für alle $x > \max(g_1, g_2)$ ist also

$$0 < x^{N\varrho} |R(x)| < 1,$$

und folglich können nicht gleichzeitig x ganz und $y = \frac{z}{u}$, z und u ganz und $u < x^\varrho$, sein.

Hierdurch ist Satz 18 bewiesen.

Man kann den Inhalt dieses Satzes auch anschaulich in folgender Weise ausdrücken: Gibt es unendlich viele ganze (positive) x, für welche y rational $= \frac{z}{u}$ ist, so muß der Nenner u (selbst wenn die Brüche in irreduzibler Gestalt geschrieben werden) schneller als jede Potenz von x ins Unendliche wachsen, wenn man die betreffenden x durchläuft.

Korollar. *Wenn y die Bedingungen des Satzes 18 erfüllt, gibt es nur endlich viele ganze x, für welche y ganz ist.*

Dies bleibt aber noch gültig, wenn y algebraisch ist, wenn es nur gebrochen-algebraisch ist, wie ich jetzt zeigen will.

Übrigens bekommt man dies nach dem obigen Eliminationsverfahren auch dann noch, wenn y ganz-algebraisch ist, wenn nur die algebraische Gleichung niedrigsten Grades in x und y mindestens vom Grade $N_0 + 1$ ist, wobei N_0 die kleinste ganze positive Zahl N bedeutet, für welche

$$\frac{(N+1)N}{2} \geqq (M+1)m - \left[\frac{M}{q}\right]$$

ist.

Definition 6. Ich nenne eine algebraische Funktion y von x ganzalgebraisch, wenn eine Gleichung

$$y^n + P_1(x)y^{n-1} + \ldots + P_n(x) = 0$$

stattfindet, worin $P_1, P_2, \ldots, P_n$ Polynome sind. Alle anderen algebraischen Funktionen nenne ich gebrochen-algebraisch. Entprechendes für mehrere Variablen.

Satz 19. *Es seien x und y durch die Gleichung verbunden*

$$y^n = A_1(x)y^{n-1} + \ldots + A_n(x),$$

worin

$$A_r(x) = a_{-\mu_r, r} x^{\mu_r} + \ldots + a_{0,r} + \frac{a_{1,r}}{x} + \ldots, \textit{ konv., wenn } |x| > g_r,$$

die Koeffizienten $a_{s,r}$ alle rational. Gibt es keine ganz-algebraische Funk-

tion von x, welche, statt y eingesetzt, die Gleichung identisch befriedigt, so gibt es nur endlich viele ganze x, für welche y ganz ist.

Beweis. Durch Multiplikation der gegebenen Gleichung beiderseits mit $y, y^2, \ldots$ und darauffolgende Elimination von $y^n, y^{n+1}, \ldots$ rechts bekommt man Gleichungen der Form

$$y^{n+\nu} = A_1^{(\nu)}(x)\, y^{n-1} + \ldots + A_n^{(\nu)}(x),$$

worin

$$A_r^{(\nu)}(x) = P_r^{(\nu)}(x) + \frac{a_{1,r}^{(\nu)}}{x} + \frac{a_{2,r}^{(\nu)}}{x^2} + \ldots,$$

$P_r^{(\nu)}(x)$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten und alle $a_{s,r}^{(\nu)}$ rational.

Nun läßt sich jede Wurzelfunktion y der gegebenen Gleichung für alle hinreichend großen x nach fallenden Potenzen einer Wurzel von x, etwa $\sqrt[q]{x}$, entwickeln; also

$$y = \alpha_0 x^{\frac{p}{q}} + \alpha_1 x^{\frac{p-1}{q}} + \ldots.$$

Zwischen den Ausdrücken für $y^n, y^{n+1}, \ldots, y^{n+m}$ können nun, wenn m hinreichend groß ist, alle Quotienten

$$\frac{y^r}{x^s} \qquad \left(r = 1, 2, \ldots, n-1;\ r \geqq \frac{q}{p} s\right)$$

eliminiert werden. Das Eliminationsresultat läßt sich schreiben

$$\sum_{\nu=0}^{m} C_\nu y^{n+\nu} = P(x, y) + R(x, y),$$

wobei alle C_ν ganze rationale Zahlen sind, die nicht alle $= 0$ sind, $P(x, y)$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten, das höchstens vom Grade $n-1$ in bezug auf y ist, und

$$R(x, y) = y^{n-1}\left(\frac{k_0}{x^{s_{n-1}}} + \frac{k_1}{x^{s_{n-1}+1}} + \ldots\right) \\ + y^{n-2}\left(\frac{l_0}{x^{s_{n-2}}} + \frac{l_1}{x^{s_{n-2}+1}} + \ldots\right) + \ldots,$$

wobei s_λ die kleinste ganze positive Zahl ist, für welche $\frac{p}{q}\lambda < s_\lambda$. Setzt man für y seine Entwicklung ein, so erhält man $R(x, y)$ nach fallenden Potenzen von $x^{\frac{1}{q}}$ mit ganzen negativen Exponenten entwickelt. Zugleich ist sicher, daß $R(x, y)$ nicht identisch $= 0$ sein kann; denn dann erhielte man die Gleichung

$$\sum C_\nu y^{n+\nu} - P(x, y) = 0,$$

woraus folgen würde, daß y eine ganz-algebraische Funktion von x wäre entgegen der Voraussetzung. Bekanntlich gibt es also eine so große positive Zahl g_1, daß für alle $x > g_1$

$$R(x, y) \neq 0$$

ist. Außerdem hat man für alle $x > g_2$, g_2 hinreichend große positive Zahl,

$$|R(x, y)| < 1.$$

Für alle $x > \max(g_1, g_2)$ können also x und y nicht gleichzeitig ganz sein.

Da bloß endlich viele, nämlich n, Wurzeln y existieren, ist der Satz hierdurch bewiesen.

Satz 19 fällt mit dem Korollar des Satzes 18 teilweise zusammen. Gibt es nämlich überhaupt keine algebraische Funktion von x, welche, statt y in die gegebene Gleichung eingesetzt, diese identisch befriedigt, so erfüllt offenbar jede Wurzel y die Bedingungen des Satzes 18, und es gibt also nach eben diesem Satze nur endlich viele ganzzahlige Lösungen (x, y). Satz 19 geht aber insofern über das Korollar des Satzes 18 hinaus, als y eine gebrochen-algebraische Funktion sein kann.

Daß aber Satz 18 selbst für gebrochen-algebraische Funktionen y nicht gültig bleiben kann, sieht man schon aus dem Beispiel $y = \frac{1}{x}$. Man kann aber für algebraische Gleichungen folgenden Satz aufstellen:

Satz 20. *Es seien x und y durch die irreduzible algebraische Gleichung*

$$A_0(x)\, y^n + \ldots + A_n(x) = 0$$

verbunden, worin $A_0, \ldots, A_n$ ganzzahlige Polynome sind, $A_0(x)$ vom Grade μ. Es gibt dann bloß endlich viele ganze x, für welche y rational $= \frac{z}{u}$ ist, wenn zugleich $u \leqq x^{\frac{\mu - \delta}{n}}$ sein soll, $\delta > 0$.

Beweis. Man bekommt

$$y^{n+\nu} = B_1^{(\nu)}(x)\, y^{n-1} + \ldots + B_n^{\nu}(x),$$

wobei

$$B_r^{(\nu)}(x) = P_r^{(\nu)}(x) + \frac{a_{r,1}^{(\nu)}}{x} + \frac{a_{r,2}^{(\nu)}}{x^2} + \ldots,$$

$P_r^{(\nu)}(x)$ rationalzahliges Polynom, alle $a_{r,s}^{(\nu)}$ rationale Zahlen. Jede Wurzel y besitzt für hinreichend große x eine Entwicklung der Form

$$y = \alpha_0 x^{\frac{p}{q}} + \alpha_1 x^{\frac{p-1}{q}} + \ldots.$$

Man betrachte die Gleichungen

$$x^r y^{n+\nu} = x^r B_1^{(\nu)}(x)\, y^{n-1} + \ldots + x^r B_n^{(\nu)}(x)$$
$$(r = 0, 1, \ldots, \mu - 1;\ \nu = 0, 1, \ldots, m).$$

Wählt man m hinreichend groß, z. B. so groß, daß

$$\mu(m+1) > (\mu-\delta)(m+n) + \frac{p}{q}\frac{n(n-1)}{2},$$

so können zwischen den $\mu(m+1)$ Gleichungen alle Quotienten $\frac{y^t}{x^s}$, wo t und s der Beziehung

$$0 < s \leqq \frac{p}{q}t + \frac{(n+m)(\mu-\delta)}{n} \qquad (t = 0, 1, \ldots, n-1)$$

genügen, eliminiert werden. Das Eliminationsresultat kann in der Form

$$\sum_{r=0}^{\mu-1}\sum_{\nu=0}^{m} C_{r,\nu}\, x^r y^{n+\nu} = P(x, y) + R(x, y)$$

geschrieben werden, wobei alle $C_{r,\nu}$ ganz rational und nicht alle 0 sind, $P(x, y)$ ein ganzzahliges Polynom, das höchstens vom Grade $n-1$ in bezug auf y ist, während $R(x, y)$, wenn für y seine Entwicklung nach fallenden Potenzen von $x^{\frac{1}{q}}$ eingesetzt wird, die Form hat:

$$R(x, y) = \frac{\beta_1}{x^{\frac{\gamma}{q}}} + \frac{\beta_2}{x^{\frac{\gamma+1}{q}}} + \cdots, \qquad \gamma > \frac{(n+m)(\mu-\delta)}{n}q.$$

Außerdem kann $R(x, y)$ nicht identisch $= 0$ sein. Es läßt sich nämlich leicht beweisen [17], daß in dem Integritätsbereiche, der aus x und y erzeugt wird, wenn y einer Gleichung der im Satze 20 erwähnten Form genügt, jede Funktion auf eine und nur eine Weise in der Form

$$\sum Q_\nu(x)\, y^{n+\nu} + Q(x, y)$$

geschrieben werden kann, wobei $Q_\nu(x)$ Polynome sind, die höchstens vom Grade $\mu-1$ sind, und $Q(x, y)$ ein Polynom vom Grade $n-1$ in y. Speziell kann ein solcher Ausdruck nicht $= 0$ sein, ohne identisch $= 0$ zu sein, sowohl in bezug auf x wie in bezug auf y.

Es gibt deshalb eine positive Größe g, so daß immer

$$x^{\frac{(n+m)(\mu-\delta)}{n}} R(x, y) \neq 0 \quad \text{und} \quad x^{\frac{(n+m)(\mu-\delta)}{n}} R(x, y)| < 1$$

ist, wenn $x > g$. Hieraus folgt die Richtigkeit des Satzes 20, wenn man bemerkt, daß höchstens n reelle, ins unendliche gehende Zweige der Kurve vorhanden sein können.

---

[17]) Vgl. z. B. meine Abhandlung: Integritätsbereiche in algebraischen Zahlkörpern, S. 33 (Kristiania Vid. selskaps skrifter 1923), wo das Analoge für Zahlringe bewiesen ist.

Folgende Bemerkung kann passend hinzugefügt werden:

Sollen in der speziellen Gleichung

$$x y^2 = 2x + 1$$

x ganz und y rational sein, so muß xy ganz sein, und da x und $2x+1$ relativ prim sind, muß

$$x = u^2, \quad 2x + 1 = v^2$$

für ganze u und v stattfinden. Hieraus folgt

$$v^2 = 2u^2 + 1,$$

und so oft u, v eines der unendlich vielen ganzzahligen Lösungspaare dieser Gleichung ist, ist $x = u^2$, $y = \frac{v}{u}$ eine Lösung der gegebenen Gleichung. Man sieht hieraus, daß der Exponent $\frac{\mu - \delta}{n}$ im Satze 20 nicht allgemein durch einen größeren ersetzt werden kann. Übrigens sieht man dies auch bei Betrachtung einer Gleichung, welche vom ersten Grade in bezug auf y ist.

Satz 21. *Es sei*

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^{\frac{n-r}{q}},$$

wobei alle α_r algebraische Zahlen sind, aber nicht alle einem algebraischen Körper endlichen Grades angehören. Es sei $m(M)$ der Grad des Körpers

$$R_M = R(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_M),$$

wo M die frühere Bedeutung hat. Gibt es dann einen solchen Wert von N, daß

$$\frac{(N+1)N}{2} \geqq (M+1)\, m(M) - \left[\frac{M}{q}\right],$$

so gibt es nur endlich viele ganze x, für welche auch y ganz ist.

Beweis. Die Funktion y von x muß hier transzendent sein. Wäre sie nämlich algebraisch, hätte man eine Gleichung

$$P_0(x)\, y^l + \ldots + P_l(x) = 0,$$

worin alle P Polynome sind, und die Koeffizienten dieser Polynome müßten offenbar algebraische Zahlen sein. Da sie aber in endlicher Zahl vorhanden sind, gehörten sie alle einem Körper von endlichem Grade an, und dasselbe müßte also mit den Koeffizienten der Entwicklung jeder Wurzel y der Fall sein.

Schreibt man nun

$$y^\nu = \sum \alpha_r^{(\nu)} x^{\frac{\nu n - r}{q}},$$

so sieht man, daß für alle ν die Koeffizienten $\alpha_0^{(\nu)}, \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \alpha_M^{(\nu)}$ alle im Körper R_M enthalten sind. Jetzt bedeute N eine derartige Zahl, daß

$$\frac{(N+1)N}{2} \geqq (M+1)\,m(M) - \left[\frac{M}{q}\right],$$

und man betrachte die Gleichungen

$$x^\mu y^\nu = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r^{(\nu)} x^{\frac{\mu q + \nu n - r}{q}}, \quad \mu + \nu \leqq N,\ \mu \geqq 0,\ \nu > 0.$$

Dann kann man eine Basis $\omega_1 = 1, \omega_2, \ldots, \omega_L$ des Körpers R_M finden, wobei $L \leqq m(M)$. Man kann also schreiben

$$x^\mu y^\nu = \sum_{s=1}^{L} \omega_s \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_{r,s}^{(\nu)} x^{\frac{\mu q + \nu n - r}{q}},$$

wo alle $\alpha_{r,s}^{(\nu)}$, für welche $r \leqq \mu q + \nu n$ ist, absolut rationale Zahlen sind, weil dies nämlich sogar gilt, wenn $r \leqq M$ ist. Zwischen diesen Gleichungen können aber alle Potenzen von x mit gebrochenen positiven Exponenten und auch alle mit nichtnegativen ganzen Exponenten, aber irrationalen Koeffizienten, eliminiert werden. Das Eliminationsresultat kann in der Form

$$\sum C_{\mu,\nu} x^\mu y^\nu = P(x) + R(x)$$

geschrieben werden, wobei die $C_{\mu,\nu}$ ganze rationale, nicht alle verschwindende, Zahlen sind, $P(x)$ ganzzahliges Polynom, $R(x)$ nicht identisch Null, weil y eine transzendente Funktion war, und außerdem $\lim\limits_{x \to \infty} R(x) = 0$. Hieraus sieht man die Richtigkeit unseres Satzes.

Anmerkung. Man kann diesem Satze eine allgemeinere Fassung geben. Für jedes ganze positive ν sei μ_ν eine ganze positive Zahl. Die Summe $\mu_\nu q + \nu n$ hat dann für alle $\nu \leqq N$ und $\geqq 1$ einen Maximalwert M. Weiter bedeute wie früher $m(M)$ den Grad des Körpers $R_M = R(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_M)$. Gibt es dann einen solchen Wert von N, daß

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mu_\nu + N \geqq (M+1)\,m(M) - \left[\frac{M}{q}\right],$$

so gibt es nur endlich viele ganze x, für welche auch y ganz ist. Allgemein bekommt man durch ein ähnliches Verfahren wie beim Beweise des Satzes 18, daß, wenn ein solches N gefunden werden kann, daß

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mu_\nu + N \geqq (N\varrho q + M + 1)\,m(M) - \left[\frac{M}{q}\right],$$

es nur endlich viele ganze x gibt, für welche y rational $= \frac{z}{u}$ ist, wenn $u < x^\varrho$ sein soll. Weiter kann man folgenden Satz beweisen:

Satz 22. *Ist*

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^{\frac{n-r}{q}},$$

alle α_r *algebraische Zahlen, die nicht einem Körper endlichen Grades angehören,* $m(M)$ *der Grad des Körpers* $R(\alpha_0, \ldots, \alpha_M)$, M *mit der früher* (Satz 21) *angegebenen Bedeutung, und ist*

$$\lim_{M \to \infty} \frac{m(M)}{M} = 0,$$

so gibt es nur endlich viele ganze x, *für welche* y *rational* $= \frac{z}{u}$ *ist, wenn* $u < x^{\varrho}$ *sein soll,* ϱ *beliebig große positive Zahl.*

Beweis. Denn wenn $\lim\limits_{M \to \infty} \frac{m(M)}{M} = 0$ ist, so kann man augenscheinlich, wie groß ϱ sein mag, N so groß wählen, daß

$$\frac{(N+1)N}{2} \geqq (N\varrho q + M + 1)\, m(M + N\varrho q) - \left[\frac{M}{q}\right]$$

wird. Man betrachte dann die Gleichungen

$$x^{\mu} y^{\nu} = \sum \alpha_r^{(\nu)} x^{\frac{\mu q + \nu n - 1}{q}}, \quad \mu + \nu \leqq N, \ \mu \geqq \nu, \ \nu > 0,$$

die in der Form

$$x^{\mu} y^{\nu} = \sum_{s=1}^{L} \omega_s \sum \alpha_{r,s}^{(\nu)} x^{\frac{\mu q + \nu n - 1}{q}}$$

geschrieben werden können, wobei $\omega_1 = 1, \omega_2, \ldots, \omega_L$, $L \leqq m(M + N\varrho q)$, eine Basis des Körpers $R(\alpha_0, \ldots, \alpha_{M+N\varrho q})$ ist, und verfahre weiter wie im Beweise des Satzes 18.

In gewissem Sinne ein Gegenstück zu diesen Sätzen ist der folgende sehr einfache Satz:

Satz 23. *Es sei*

$$\xi_0, \xi_1, \ldots$$

eine beliebige unendliche Reihe reeller Zahlen. Weiter seien

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_l, y_l)$$

l *beliebige reelle Wertepaare. Dann gibt es unendliche Reihen*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$$

derart, daß für jedes n

$$R(a_0, \ldots, a_n) = R(\xi_0, \ldots, \xi_n)$$

ist, die Reihe konvergent ist für alle x, *die absolut* $\geqq \min(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ *sind, und, wenn man will, auch für kleinere Werte von* x, *während* y *für* $x = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ *eben den Wert* y_i *annimmt.*

Beweis. Man setze

$$f_i(x) = \left(1 - \frac{x_1}{x}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_{i-1}}{x}\right)\left(1 - \frac{x_{i+1}}{x}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_l}{x}\right)\left(\alpha_{0,i}\xi_0 + \frac{\alpha_{1,i}\xi_1}{x} + \cdots\right).$$

$$(i = 1, 2, \ldots, l)$$

und bestimme die Zahlen $\alpha_{0,i}, \alpha_{1,i}, \ldots$ derart, daß

$$f_i(x_i) = y_i$$

wird, und zugleich

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_{0,i} \neq 0$$

und jedes $\alpha_{r,i}$ mit $r \geqq 1$ dasselbe Vorzeichen wie ξ_r erhält, was offenbar alles möglich ist. Man kann auch die α so schnell abnehmend wählen, daß die unendliche Reihe für jedes i absolut konvergent ist, wenn $|x| > \varrho$, ϱ beliebig kleine positive Größe, die wir also jedenfalls $< \min(x_1, \ldots, x_l)$ annehmen können. Setzt man dann

$$y = \sum_{i=1}^{l} f_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n},$$

so ist diese Reihe auch absolut konvergent, wenn $|x| > \varrho$. Außerdem ist augenscheinlich $y = y_i$ für $x = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$. Weiter ist

$$a_n = A_{n,n}\xi_n + A_{n,n-1}\xi_{n-1} + \cdots + A_{n,0}\xi_0,$$

wobei alle A rationale Zahlen sind und $A_{n,n} = \sum_{i=1}^{l} \alpha_{n,i} \neq 0$. Daraus folgt, daß immer $R(a_0, \ldots, a_n) = R(\xi_0, \ldots, \xi_n)$ sein muß.

Aus diesem Satze folgt, daß man für beliebige ganze positive Zahlen n und q die Koeffizienten α der Reihe $\Sigma \alpha_r x^{\frac{n-r}{q}}$ so bestimmen kann, daß die Kurve

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^{\frac{n-r}{q}}$$

durch beliebig *endlich* viele im voraus gegebene Gitterpunkte $(x_1, y_1) \ldots (x_l, y_l)$ geht, während zugleich $R(\alpha_0, \ldots, \alpha_\nu) = R(\xi_0, \ldots, \xi_\nu)$ ist für jedes ν, und die Reihe konvergent ist für alle x, die absolut $\geqq \min(x_1, \ldots, x_l)$ sind.

Man kann versuchen, die Sätze 18—22 zu verallgemeinern. Ich begnüge mich hier damit, die folgende Verallgemeinerung zu erwähnen:

Satz 24. *Es sei $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ die Basis eines algebraischen Körpers K. Weiter seien für $r = 0, 1, 2, \ldots$*

$$T_r(x) = \sum_{s=1}^{m} T_{r,s}(x)\,\omega_s, \qquad N_r(x) = \sum_{s=1}^{m} N_{r,s}(x)\,\omega_s,$$

wobei alle $T_{r,s}$ und $N_{r,s}$ ganzwertige Funktionen sind. Der Funktions-

ring, der aus allen $T_{r,s}$ *und* $N_{r,s}$ *erzeugt wird, heiße* J. $X(x)$ *sei eine derartige für große positive* x *ganzwertige Funktion von* x, *daß für jede Funktion* $F(x)$ *aus* J

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x)}{X(x)} = 0.$$

Weiter sei immer $F(x) \neq 0$ *für alle hinreichend großen ganzen (positiven)* x, *wenn* $F(x)$ *zu* J *gehört und nicht identisch* 0 *ist. Ist dann*

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{T_r(x)}{N_r(x)} X(x)^{\frac{n-r}{q}},$$

n *und* q *ganz positiv, die Reihe konvergent für alle hinreichend großen* x, *und besteht keine Gleichung der Form*

$$P_0 y^l = \sum_{t=1}^{l} P_t(X) y^{l-t},$$

alle P_t *Polynome mit Koeffizienten aus* J *sind,* P_0 *Element von* J, *so gibt es nur endlich viele ganze* x, *für welche* y *auch ganz ist.*

Der Beweis kann ganz analog den Beweisen der Sätze 18 (für $\varrho = 0$) und 19 geführt werden, wenn die Rolle der Konstanten jener Beweise hier von den Funktionen aus J übernommen wird, und man bemerkt, daß kraft der Voraussetzung über die Funktionen F aus J eine Reihe

$$R(X) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{A_r(x)}{B_r(x)} X^{-\frac{r}{q}},$$

alle A_r und B_r Elemente von J, nicht alle A_r identisch 0,

für alle hinreichend großen ganzen (positiven) x nie mehr verschwinden kann.

Ein bemerkenswerter einfacher Fall dieses Satzes ist der, daß die Funktionen $T_{r,s}$ und $N_{r,s}$ ganzwertige Polynome sind, während $X(x)$ für $x \to \infty$ stärker unendlich wird als jede Potenz von x, z. B. $X(x) = 2^x$.

Schlußbemerkung.

Natürlich ist es möglich, die in dieser Arbeit entwickelten Betrachtungen auch auf den Fall mehrerer Variablen auszudehnen, und man wird dadurch gewiß viele interessante Resultate erhalten können. Ich gehe hier nicht darauf ein. Ebensowenig gehe ich hier auf die interessanten Anwendungen ein, die man daraus auf die Theorie der Reduzibilitätseigenschaften algebraischer Funktionen machen kann, wie ich in der S. 6 zitierten Abhandlung gezeigt habe.

Kristiania, 31. Juli 1924.

(Eingegangen am 20. 9. 1924.)