

## Werk

**Titel:** CLASSE DES SCIENCES

**Jahr:** 1889

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?129323659\\_0047|log6](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?129323659_0047|log6)

## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

**SECONDE NOTE**

SUR

**LES FONCTIONS  $X_n$ ;**

PAR

**E. CATALAN,**

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

---

(Présentée à la Classe des sciences, dans la séance du 7 août 1886.)

---



## SECONDE NOTE

# SUR LES FONCTIONS $X_n^{(*)}$ .

---

### 1. De la relation

$$(1 - x) \left( \frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n-1}}{dx} \right) = n(X_{n-1} - X_n) (**), \quad \dots \dots \dots (1)$$

résulte

$$\int_{-1}^{+1} (x^p - x^{p+1})(dX_n + dX_{n-1}) = n \int_{-1}^{+1} (x^p X_{n-1} - x^p X_n) dx,$$

ou

$$\int_{-1}^{+1} (x^p dX_n + x^p dX_{n-1} - x^{p+1} dX_n - x^{p+1} dX_{n-1}) = n \int_{-1}^{+1} (x^p X_{n-1} - x^p X_n) dx. \quad (2)$$

Supposons que les nombres  $n, p$  soient de même parité, et que le premier ne surpasse pas le second. Les intégrales

$$\int_{-1}^{+1} x^p dX_n, \quad \int_{-1}^{+1} x^{p+1} dX_{n-1}, \quad \int_{-1}^{+1} x^p X_{n-1} dx$$

seront nulles.

En effet, dans la première, par exemple, tous les termes de  $\frac{dX_n}{dx}$  sont de même parité que  $n - 1$ ;  $x^p \frac{dX_n}{dx}$  est une fonction impaire, etc.

(\*) *Recherches sur les fonctions  $X_n$ , de Legendre* : premier Mémoire (in-8°), octobre 1879; première Note (in-4°), octobre 1880; deuxième Mémoire (in-4°), août 1881; troisième Mémoire (in-4°), octobre 1885; seconde Note (in-4°), novembre 1886.

(\*\*) Premier Mémoire, p. 5.

L'égalité (2) se réduit donc à

$$\int_{-1}^{+1} x^p dX_{n-1} - \int_{-1}^{+1} x^{p+1} dX_n = -n \int_{-1}^{+1} x^p X_n dx. \quad (3)$$

Il est visible que :

$$\int_{-1}^{+1} x^p dX_{n-1} = -p \int_{-1}^{+1} x^{p-1} X_{n-1} dx,$$

$$\int_{-1}^{+1} x^{p+1} dX_n = -(p+1) \int_{-1}^{+1} x^p X_n dx.$$

Par conséquent, l'égalité (3) devient

$$\int_{-1}^{+1} x^p X_n dx = \frac{p}{p+n+1} \int_{-1}^{+1} x^{p-1} X_{n-1} dx. \quad (A)$$

Cette relation (peut-être nouvelle) en fait connaître d'autres, assez importantes.

2. D'abord, si l'on fait attention que

$$\int_{-1}^{+1} x^{p-n+1} X_1 dx = \frac{2}{p-n+3} (*), \quad (4)$$

on conclut, de (A) :

$$\int_{-1}^{+1} x^p X_n dx = 2 \frac{p(p-1)(p-2) \dots (p-n+2)}{(p+n+1)(p+n-1) \dots (p-n+3)}, \quad (B)$$

$$\int_{-1}^{+1} x^n X_n dx = 2 \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n+1}; \quad (5)$$

formules dues à Dirichlet (\*\*).

(\*) A cause de  $X_1 = x$ .

(\*\*) La première est démontrée, d'une autre manière, dans notre deuxième Mémoire (p. 45).

[De même que (B) est une conséquence immédiate de (A), (A) est une conséquence immédiate de (B). — Remarque faite par le Rapporteur, M. De Tilly.]

3. Multiplions, par  $z^n$ , les deux membres de (B), puis faisons croître indéfiniment  $n$ . A cause de l'égalité

$$\sum_0^\infty X_n z^n = \frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}}, \dots \dots \dots (6)$$

qui définit  $X_n$  (\*), nous aurons, en désignant par  $K_n$  le second membre de (B):

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^p dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} K_n z^n (**).$$

Mais, si  $n$  surpasse  $p$ ,  $K_n = 0$  (\*\*\*) ; donc, simplement,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^p dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = 2 \sum_{n=0}^{n=p} \frac{p(p-1) \dots (p-n+2)}{(p+n+1)(p+n-1) \dots (p-n+3)} z^n. \dots (C)$$

Ainsi, l'intégrale se réduit à un polynôme entier, du degré  $p$ , dont tous les termes sont de même parité (iv).

4. Les considérations exposées à la fin du *deuxième* Mémoire (v) permettent d'établir, autrement que nous venons de le faire, l'égalité (C).

Posons

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^p dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = f(z), \dots \dots \dots (7)$$

et

$$x^p = A_p X_p + A_{p-2} X_{p-2} + \dots \dots \dots (8)$$

(\*) Premier Mémoire, p. 4.

(\*\*) La somme doit être prise à partir de  $n=0$ , ou de  $n=1$ , selon que  $p$  est pair ou impair.

(\*\*\*) Cette propriété, évidente d'après la formule (B), résulte aussi d'un théorème fondamental, dû à Jacobi.

(iv) Cette conclusion est d'accord avec la formule 167 du *deuxième* Mémoire; mais, en outre, le coefficient de  $z^n$  est connu.

(v) Pages 88 et suivantes.

D'après la formule (B) et les propriétés des fonctions  $X_n$  (\*) :

$$\begin{aligned} \frac{2}{2p+1} \cdot A_p &= 2 \cdot \frac{2 \cdot 5 \dots p}{5 \cdot 5 \dots 2p+1}, \\ \frac{2}{2p-5} \cdot A_{p-2} &= 2 \cdot \frac{4 \cdot 5 \dots p}{5 \cdot 7 \dots 2p-1}, \\ \frac{2}{2p-7} \cdot A_{p-4} &= 2 \cdot \frac{6 \cdot 7 \dots p}{7 \cdot 9 \dots 2p-3}, \\ &\dots \end{aligned}$$

De plus,

$$f(z) = A_p \int_{-1}^{+1} \frac{X_p dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}} + A_{p-2} \int_{-1}^{+1} \frac{X_{p-2} dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}} + \dots,$$

ou (\*\*)

$$f(z) = \frac{2}{2p+1} A_p z^p + \frac{2}{2p-5} A_{p-2} z^{p-2} + \dots,$$

ou enfin

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^p dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = 2 \left[ \frac{2 \cdot 5 \dots p}{5 \cdot 5 \dots 2p+1} z^p + \frac{4 \cdot 5 \dots p}{5 \cdot 7 \dots 2p-1} z^{p-2} + \frac{6 \cdot 7 \dots p}{7 \cdot 9 \dots 2p-3} z^{p-4} + \dots \right]. \quad (C')$$

3. *Remarque.* — Si, dans l'équation (8), on fait  $x = 1$ , elle se réduit à

$$A_p + A_{p-2} + A_{p-4} + \dots = 1.$$

Nous avons donc ce petit théorème d'Arithmétique :

*La somme des fractions*

$$(2p+1) \frac{2 \cdot 5 \dots p}{5 \cdot 5 \cdot 7 \dots 2p+1}, \quad (2p-5) \frac{4 \cdot 5 \dots p}{5 \cdot 7 \dots 2p-1}, \quad (2p-7) \frac{6 \cdot 7 \dots p}{7 \cdot 9 \dots 2p-3}, \quad \dots$$

*égale l'unité.*

(\*) Rappelées ci-dessus (p. 5).

(\*\*) Premier Mémoire, p. 62.

Par exemple :

$$15 \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 15} + 9 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + 5 \cdot \frac{6}{7 \cdot 9} + 1 \cdot \frac{1}{7} = 1,$$

$$15 \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 15} + 11 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 15} + 7 \cdot \frac{6 \cdot 7}{7 \cdot 9 \cdot 11} + 5 \cdot \frac{1}{9} = 1.$$

6. Soit

$$1 - 2zx + z^2 = u^2;$$

d'où :

$$x = \frac{1 + z^2 - u^2}{2z}, \quad dx = -\frac{u}{z} du.$$

Les limites de  $u$  sont  $1 + z$ ,  $1 - z$ . Donc la relation (C) devient

$$\frac{1}{(2z)^{p+1}} \int_{1-z}^{1+z} (1 + z^2 - u^2)^p du = \sum_{n=1}^{n=p} \frac{p(p-1) \dots (p-n+2)}{(p+n+1)(p+n-1) \dots (p-n+5)} z^n. \quad (9)$$

Si  $p$  est pair, le développement du second membre est

$$\frac{1}{p+1} + \frac{p}{(p+1)(p+5)} z^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{(p-1)(p+1)(p+5)(p+5)} z^4 + \dots + \frac{p(p-1) \dots 5 \cdot 2}{5 \cdot 5 \dots 2p+1} z^p;$$

et, si  $p$  est impair :

$$\frac{1}{p+2} z + \frac{p(p-1)}{p(p+2)(p+4)} z^3 + \frac{p(p-1)(p-2)(p-5)}{(p-2)p(p+2)(p+4)(p+6)} z^5 + \dots + \frac{p(p-1) \dots 5 \cdot 2}{5 \cdot 5 \dots 2p+1} z^p.$$

D'autre part, l'intégrale a pour valeur

$$\left[ (1 + z^2)^p u - \frac{1}{5} C_{p,1} (1 + z^2)^{p-1} u^5 + \frac{1}{5} C_{p,2} (1 + z^2)^{p-2} u^5 - \dots \right]_{1-z}^{1+z}$$

$$= 2 \left\{ (1 + z^2)^p z - \frac{1}{5} C_{p,1} (1 + z^2)^{p-1} (5z + z^5) + \frac{1}{5} C_{p,2} (1 + z^2)^{p-2} (5z + 10z^5 + z^5) - \dots \right.$$

$$\left. \pm \frac{1}{2p+1} \left[ \frac{2p+1}{1} z + \frac{(2p+1)2p(2p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 5} z^5 + \dots + z^{2p+1} \right] \right\}.$$



Conséquemment, si l'on pose, pour abrégier :

$$Z = (1 + z^2)^p - \frac{1}{3} C_{p,1} (1 + z^2)^{p-1} (3 + z^2) + \frac{1}{5} C_{p,2} (1 + z^2)^{p-2} (5 + 10z^2 + z^4) - \dots \\ \pm \frac{1}{2p+1} \left[ \frac{2p+1}{1} + \frac{(2p+1)2p(2p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^2 + \dots + z^{2p} \right], \dots \quad (10)$$

on a cette double identité :

$$\frac{Z}{(2z)^p} = \frac{1}{p+1} + \frac{p}{(p+1)(p+3)} z^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{(p-1)(p+1)(p+3)(p+5)} z^4 + \dots + \frac{p(p-1)\dots 3 \cdot 2}{3 \cdot 5 \dots 2p+1} z^p \quad (p \text{ pair}); \\ = \frac{1}{p+2} z + \frac{p(p-1)}{p(p+2)(p+4)} z^3 + \dots + \frac{p(p-1)\dots 3 \cdot 2}{3 \cdot 5 \dots 2p+1} z^p \quad (p \text{ impair}) \quad \dots \quad (D)$$

7. On en conclurait d'autres, simplement numériques, en ordonnant, suivant les puissances de  $z^2$ , le polynôme  $Z^*$ ; et en égalant les coefficients des mêmes puissances de  $z^2$ , dans les deux membres. On obtient ainsi, par exemple,

$$1 - \frac{1}{3} C_{p,1} + \frac{1}{5} C_{p,2} - \frac{1}{7} C_{p,3} + \dots \pm \frac{1}{2p+1} = 2^p \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2p+1}; \dots \quad (11)$$

relation connue, dont la vérification est facile.

8. La valeur de  $Z$ , répondant à  $z = 1$ , est

$$2^p - \frac{1}{3} C_{p,1} \cdot 2^{p+1} + \frac{1}{5} C_{p,2} \cdot 2^{p+2} - \dots \pm \frac{1}{2p+1} \cdot 2^{2p}.$$

Par conséquent,

$$\left. \begin{aligned} & 1 - \frac{1}{3} C_{p,1} \cdot 2 + \frac{1}{5} C_{p,2} \cdot 2^2 - \dots \pm \frac{1}{2p+1} 2^p \\ & = \frac{1}{p+1} + \frac{p}{(p+1)(p+3)} + \frac{p(p-1)(p-2)}{(p-1)(p+1)(p+3)(p+5)} + \dots + \frac{p(p-1)\dots 3 \cdot 2}{3 \cdot 5 \dots 2p+1} \quad (p \text{ pair}) \\ & = \frac{1}{p+2} + \frac{p(p-1)}{p(p+2)(p+4)} + \dots + \frac{p(p-1)\dots 3 \cdot 2}{3 \cdot 5 \dots 2p+1} \quad (p \text{ impair}). \end{aligned} \right\} \quad (E)$$

(\*) Ce polynôme, dont le degré est  $2p$ , ne doit contenir aucun terme en  $z^0, z^2, \dots$ ; car il est divisible par  $z^p$ .

9. Lorsque, dans l'intégrale

$$\int_{1-z}^{1+z} (1+z^2-u^2)^p du,$$

on suppose  $z=1$ , elle devient  $\int_0^2 (2-u^2)^p du$ ; puis, si l'on fait  $u = 2 \sin \varphi$  :

$$2^{p+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-2\sin^2\varphi)^p \cos\varphi d\varphi = 2^{p+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p 2\varphi \cdot \cos\varphi d\varphi.$$

La formule (9) est donc transformée en celle-ci :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p 2\varphi \cdot \cos\varphi d\varphi = \sum_{n=0}^{n=p} \frac{p(p-1)\dots(p-n+2)}{(p+n+1)(p+n-1)\dots(p-n+5)} \dots \quad (F)$$

10. Une autre intégrale définie, dont la valeur est fort simple, fait retomber sur le théorème d'Arithmétique signalé précédemment (5).

Dans la formule de Dirichlet :

$$\int_{-1}^{+1} x^p X_n dx = 2 \frac{p(p-1)\dots(p-n+2)}{(p+n+1)(p+n-1)\dots(p-n+5)} \dots \quad (B)$$

supposons  $n = p, n = p - 2, n = p - 4, \dots$ ; nous aurons

$$\int_{-1}^{+1} x^p dx \sum_{n=0}^{n=p} (2n+1) X_n = 2 \sum_{n=0}^{n=p} (2n+1) \frac{p(p-1)\dots(p-n+2)}{(p+n+1)(p+n-1)\dots(p-n+5)}.$$

D'après une formule connue (\*),

$$\sum_{n=0}^{n=p} (2n+1) X_n = \frac{dX_{p+1}}{dx}.$$

(\*) Premier Mémoire, p. 7

Le premier membre de l'égalité ci-dessus peut donc être remplacé par

$$\int_{-1}^{+1} x^p dX_{p+1} = [x^p X_{p+1}]_{-1}^{+1} - p \int_{-1}^{+1} x^{p-1} X_{p+1} dx = 2.$$

En conséquence,

$$\sum_{n=0}^{n=p} (2n+1) \frac{p(p-1)\dots(p-n+2)}{(p+n+1)(p+n-1)\dots(p-n+5)} = 1; \dots \dots \dots (G)$$

comme précédemment.

**11. Comparaison entre deux intégrales.** — Pour terminer, je vais réduire, à l'intégrale eulérienne

$$\int_0^1 x^p (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = B\left(p+1, \frac{1}{2}\right),$$

l'intégrale  $\int_0^1 x^p (1+x)^{-\frac{1}{2}} dx$ , conjuguée de la première.

Si, dans la relation

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^p dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = 2 \sum_{n=0}^{n=p} \frac{p(p-1)\dots(p-n+2)}{(p+n+1)(p+n-1)\dots(p-n+5)} z^n, \dots \dots \dots (C)$$

on suppose  $z=1$ , elle devient

$$\int_{-1}^{+1} x^p (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{2} F, \dots \dots \dots (12)$$

$F$  représentant la somme des fractions contenues sous le signe  $\Sigma$ .

Le premier membre est décomposable en

$$\int_{-1}^0 x^p (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx + B\left(p+1, \frac{1}{2}\right).$$

Soit  $x = -\alpha$ ; et, par conséquent,

$$\int_{-1}^0 x^p(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = \int_0^1 (-x)^p(1+\alpha)^{-\frac{1}{2}}dx = \pm \int_0^1 x^p(1+x)^{-\frac{1}{2}}dx.$$

selon que  $p$  est *pair* ou *impair*. La relation cherchée est donc

$$\pm \int_0^1 x^p(1+x)^{-\frac{1}{2}}dx = -B\left(p+1, \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2}F. \quad \dots \quad (II)$$

Ainsi, lorsque l'exposant  $p$  est entier positif, la somme ou la différence des intégrales  $\int_0^1 x^p(1+x)^{-\frac{1}{2}}dx$ ,  $B(p+1, \frac{1}{2})$ , est égale au produit de  $2\sqrt{2}$  par un nombre commensurable connu.

Spa, 23 juillet 1886.

---

### ADDITION.

---

**12. Autres relations.** — A cause des formules (B), (E), la somme désignée par F se compose, indifféremment, de

$$\int_0^1 (X_p + X_{p-2} + X_{p-4} + \dots)dx \quad (*),$$

ou de

$$1 - \frac{1}{3} C_{p,1} \cdot 2 + \frac{1}{5} C_{p,2} \cdot 2^2 - \dots \pm \frac{1}{2p+1} 2^p.$$

En outre, cette dernière quantité équivaut à  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p 2\varphi \cdot \cos \varphi d\varphi$ . (F).

(\*) Le dernier terme est  $X_0$  ou  $X_1$ , selon que  $p$  est *pair* ou *impair*.

Par conséquent, on a les trois égalités suivantes :

$$\int_0^1 x^p (X_p + X_{p-2} + X_{p-4} + \dots) dx = 1 - \frac{1}{5} C_{p,1} \cdot 2 + \frac{1}{5} C_{p,2} \cdot 2^2 - \dots \pm \frac{1}{2p+1} 2^p, \quad (K)$$

$$B\left(p+1, \frac{1}{2}\right) \pm \int_0^1 (1+x)^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{2} \left\{ 1 - \frac{1}{5} C_{p,1} + \frac{1}{5} C_{p,2} \cdot 2^2 - \dots \pm \frac{1}{2p+1} 2^p \right\} (*), \quad (L)$$

$$\int_0^1 x^p (X_p + X_{p-2} + X_{p-4} + \dots) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p 2\varphi \cdot \cos \varphi d\varphi. \quad \dots \dots \dots (M)$$

13. Réduction d'une intégrale. — Soit

$$N_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p 2\varphi \cdot \cos \varphi d\varphi. \quad \dots \dots \dots (15)$$

L'intégration par parties donne aisément

$$N_p = \frac{2p N_{p-1} \pm 1}{2p+1}. \quad \dots \dots \dots (N)$$

D'ailleurs,  $N_0 = 1$  ; donc, par l'application de cette formule :

$$N_1 = \frac{1}{5}, \quad N_2 = \frac{7}{5 \cdot 5}, \quad N_3 = \frac{27}{5 \cdot 5 \cdot 7}, \quad N_4 = \frac{107}{5 \cdot 7 \cdot 9}, \quad \text{etc.}$$

14. Remarque. — De l'égalité (14), on conclut encore :

$$(2p+1)N_p = N_{p-1} + N_{p-2} + \dots + N_0 + \frac{1}{2}, \quad \dots \dots \dots (P)$$

selon que  $p$  est *pair* ou *impair*. Voici donc une *nouvelle propriété* des fonctions  $X_n$ .

Liège, 4 janvier 1886.

(\*) Le signe + répondant au cas où  $p$  est *pair*.



REMARQUES

SUR

CERTAINES INTÉGRALES DÉFINIES ;

PAR

E. CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

---

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 2 avril 1887.)

---

TOME XLVII.



## REMARQUES

SUR

## CERTAINES INTÉGRALES DÉFINIES.

I. Si la quantité

$$A = \int_0^1 x^\alpha \varphi(x) dx \dots \dots \dots (1)$$

est *finie*, on a, par le changement de  $x$  en  $x^\beta$ , l'*identité*

$$\int_0^1 [x^\alpha \varphi(x) - \beta x^{\alpha\beta + \beta - 1} \varphi(x^\beta)] dx = 0; \dots \dots \dots (2)$$

mais, si  $A$  est *infinie*, la relation (2) *peut n'être plus exacte*. C'est ce que les exemples suivants vont démontrer.

II. Supposons que,  $A$  étant *infinie*, l'intégrale

$$B = \int_0^1 x^\alpha \varphi(x) \mathcal{L}^\beta x \cdot dx \dots \dots \dots (3)$$

soit *finie*. Alors, d'après l'identité (2) :

$$\int_0^1 [x^\alpha \varphi(x) - \beta^\beta x^{\alpha\beta + \beta - 1} \varphi(x^\beta)] \mathcal{L}^\beta x \cdot dx = 0 (*) \dots \dots \dots (4)$$

(\*) Par le changement de  $x$  en  $x^\beta$ ,  $\mathcal{L}^\beta x$  devient  $\beta \mathcal{L}^\beta x$ .



4 REMARQUES SUR CERTAINES INTÉGRALES DÉFINIES.

III. Le premier membre est la dérivée, relative à  $\alpha$ , de

$$\int_0^1 [x^\alpha \varphi(x) - \beta x^{\alpha\beta+\beta-1} \varphi(x^\beta)] dx.$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 [x^\alpha \varphi(x) - \beta x^{\alpha\beta+\beta-1} \varphi(x^\beta)] dx = C; \quad \dots \dots \dots (5)$$

C étant une *constante*. La valeur de C, qui n'est pas nécessairement nulle, est donnée par la formule

$$C = \int_0^1 [\varphi(x) - \beta x^{\beta-1} \varphi(x^\beta)] dx \quad \dots \dots \dots (6)$$

IV. Soit  $\varphi(x) = \frac{1}{1-x}$ . J'observe, d'abord, que les conditions indiquées ci-dessus sont remplies. En effet :

$$1^\circ \int_0^1 \frac{x^\alpha dx}{1-x} = \infty; \quad 2^\circ \int_0^1 \frac{x^\alpha \varphi(x)}{1-x} dx = - \sum_1^\infty \frac{1}{(n + \alpha + 1)^2} (*)$$

Cela posé, la formule (6) donne

$$C = \int_0^1 \left[ \frac{dx}{1-x} - \beta \frac{x^{\beta-1} dx}{1-x^\beta} \right] = \left[ \varphi \cdot \frac{1-x^\beta}{1-x} \right]_0^1$$

Pour  $x = 0$ , la fraction se réduit à 1 ; pour  $x = 1$ , elle prend la forme  $\frac{0}{0}$  ; la vraie valeur est  $\beta$ . Donc

$$C = \varphi^2 \beta; \quad \dots \dots \dots (7)$$

puis

$$\int_0^1 \left[ \frac{x^\alpha}{1-x} - \beta \frac{x^{\alpha\beta+\beta-1}}{1-x^\beta} \right] dx = \varphi^2 \beta \quad \dots \dots \dots (8)$$

(\*) BIERENS DE HAAN, t. CVIII. La première formule est évidente ; la seconde se démontre très facilement.

Je pense que cette remarquable intégrale définie est nouvelle. Quand  $\beta = 2$ , elle se réduit à

$$\int_0^1 \left[ \frac{x^\alpha}{1-x} - 2 \frac{x^{2\alpha+1}}{1-x^2} \right] dx = \zeta^2 2,$$

ou

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{1-x^2} (1+x-2x^{\alpha+1}) dx = \zeta^2 2;$$

valeur connue (\*).

V. Dans l'égalité

$$\int_0^1 [x^\alpha \varphi(x) - \beta x^{2\beta+\beta-1} \varphi(x^\beta)] dx = C, \quad \dots \dots \dots (5)$$

le second membre est une fonction de  $\beta$  :  $C = F(\beta)$ . La dérivée de la quantité entre parenthèses est

$$-x^{\alpha\beta+\beta-1} \varphi(x^\beta) - \beta [(\alpha+1) \varphi(x^\beta) + 2x^\beta \varphi'(x^\beta)] x^{2\beta+\beta-1} \zeta^2 x.$$

Donc

$$\int_0^1 x^{\alpha\beta+\beta-1} \{ \varphi(x^\beta) + \beta [(\alpha+1) \varphi(x) + x^\beta \varphi'(x^\beta)] \zeta^2 x \} dx = -F'(\beta). \quad \dots (9)$$

En particulier, si  $\varphi(x) = \frac{1}{1-x}$ ,

$$\int_0^1 \frac{x^{(\alpha+1)\beta-1}}{(1-x^\beta)^2} \{ 1-x^\beta + \beta [(\alpha+1)(1-x^\beta) + x^\beta] \zeta^2 x \} dx = -\frac{1}{\beta}. \quad \dots (10)$$

Voici donc une autre intégrale définie, d'apparence compliquée, dont la valeur est fort simple. Lorsque  $\alpha = 0$ ,

$$\int_0^1 \frac{x^{\beta-1}}{(1-x^\beta)^2} [1-x^\beta + \beta \zeta^2 x] dx = -\frac{1}{\beta} \quad (**). \quad \dots \dots \dots (11)$$

et, si  $\beta = 1$  :

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{(1-x)^2} \{ (1-x)(1+\alpha+1) \zeta^2 x + x \zeta^2 x \} dx = -1.$$

(\*) Note sur une formule de M. Botésu. Ce cas particulier a été l'occasion du petit travail actuel.

(\*\*) La vérification est facile.

6 REMARQUES SUR CERTAINES INTÉGRALES DÉFINIES.

VI. Soit  $\varphi(x) = \frac{1}{1-x^m}$ ,  $m$  étant un nombre entier, auquel cas :

$$\int_0^1 \left[ \frac{1}{1-x^m} - \frac{\beta x^{\beta-1}}{1-x^{m\beta}} \right] dx = F(\beta). \quad (12)$$

Par la théorie connue :

$$\frac{1}{1-x^m} = \frac{1}{m(1-x)} + \frac{x^{m-2} + 2x^{m-3} + 3x^{m-4} + \dots + (m-1)x^0}{m(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1)},$$

$$\frac{1}{1-x^{m\beta}} = \frac{1}{m(1-x^\beta)} + \frac{x^{(m-2)\beta} + 2x^{(m-3)\beta} + \dots + (m-1)x^0}{m[x^{(m-1)\beta} + x^{(m-2)\beta} + \dots + x^\beta + 1]}.$$

Donc, en négligeant une intégrale nulle (1) :

$$\frac{1}{m} \int_0^1 \left[ \frac{1}{1-x} - \frac{\beta x^{\beta-1}}{1-x^\beta} \right] dx = F(\beta);$$

puis, par la formule (8),

$$F(\beta) = \frac{1}{m} \zeta^\beta.$$

Ainsi :

$$\int_0^1 \left[ \frac{1}{1-x^m} - \frac{\beta x^{\beta-1}}{1-x^{m\beta}} \right] dx = \frac{1}{m} \zeta^\beta; \quad (13)$$

et, plus généralement,

$$\int_0^1 \left[ \frac{x^\alpha}{1-x^m} - \frac{\beta x^{\alpha\beta-1}}{1-x^{m\beta}} \right] dx = \frac{1}{m} \zeta^\beta (*). \quad (14)$$

Par exemple, comme on le vérifie sans difficulté,

$$\int_0^1 \left[ \frac{x}{1-x^2} - 2 \frac{x^3}{1-x^4} \right] dx = \frac{1}{2} \zeta^2.$$

(\*) Si l'on suppose  $\alpha = m - 1$ , on trouve cette formule, presque évidente :

$$\int_0^1 \left[ \frac{x^{m-1}}{1-x^m} - \beta \frac{x^{m-1}}{1-x^{m\beta}} \right] dx = \frac{1}{m} \zeta^\beta.$$

VII. Dans la relation (8), développons chacune des fractions. La quantité entre parenthèses devient

$$x^\alpha + x^{\alpha+1} + x^{\alpha+2} + \dots - \beta x^{\alpha\beta+3-1} (1 + x^\beta + x^{2\beta} + \dots).$$

Nous avons donc,

$$\zeta^\beta = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} + \dots + \frac{1}{(\alpha+1)\beta} - \frac{1}{\alpha+1} \\ & + \frac{1}{(\alpha+1)\beta+1} + \frac{1}{(\alpha+1)\beta+2} + \dots + \frac{1}{(\alpha+2)\beta} - \frac{1}{\alpha+2} \\ & + \frac{1}{(\alpha+2)\beta+1} + \frac{1}{(\alpha+2)\beta+2} + \dots + \frac{1}{(\alpha+3)\beta} - \frac{1}{\alpha+3} \\ & + \dots \dots \dots (*) \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

On déduit, de cette formule générale :

$$\zeta^\beta = \left. \begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{\beta} - 1 \\ & + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta+2} + \dots + \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2} \\ & + \frac{1}{2\beta+1} + \frac{1}{2\beta+2} + \dots + \frac{1}{3\beta} - \frac{1}{3} \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

$$\zeta^\beta = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2} \\ & + \frac{1}{2\beta+1} + \frac{1}{2\beta+2} + \dots + \frac{1}{3\beta} - \frac{1}{2} \\ & + \frac{1}{3\beta+1} + \frac{1}{3\beta+2} + \dots + \frac{1}{4\beta} - \frac{1}{4} \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

(\*) Si l'on fait

$$u_n = \frac{1}{(\alpha+n-1)\beta+1} + \frac{1}{(\alpha+n-1)^2+1} + \dots + \frac{1}{(\alpha+n)\beta} - \frac{1}{\alpha+n},$$

on trouve, pour  $n > 1$  :

$$0 < u_n < \frac{1}{(\alpha+n-1)(\alpha+1)}.$$

Conséquemment, la série est convergente.

8 REMARQUES SUR CERTAINES INTÉGRALES DÉFINIES.

puis, par exemple :

$$\zeta^2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \dots, \dots \dots (18)$$

$$\zeta^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \dots, \dots \dots (19)$$

$$\zeta^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \dots \dots \dots (20)$$

Le premier développement est connu ; les autres n'en diffèrent qu'en apparence.

VIII. Supposons  $\varphi(x) = \frac{1}{\zeta^{\beta} x}$  : les formules (4) et (5) deviennent

$$\int_0^1 [x^{\alpha} - \beta x^{\alpha\beta+\beta-1}] dx = 0,$$

$$C = F(\beta) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha} - x^{\alpha\beta+\beta-1}}{\zeta^{\beta} x} dx.$$

La première relation est évidente. Quant à la seconde, elle se réduit à

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha} - x^{\alpha\beta+\beta-1}}{\zeta^{\beta} x} dx = -\zeta^{\beta} (*) \dots \dots \dots (21)$$

IX. Nous pensons que les applications précédentes suffisent à montrer l'utilité des formules (4) et (5).

Liège, 11 mars 1887.

(\*) BIERENS DE HAAN, t. CLXVI.



SUR  
UN TABLEAU NUMÉRIQUE

ET SUR

**SON APPLICATION A CERTAINES TRANSCENDANTES;**

PAR

**E. CATALAN,**

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

---

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 2 avril 1887.)

---



# SUR UN TABLEAU NUMÉRIQUE

ET SUR

## SON APPLICATION A CERTAINES TRANSCENDANTES.

### I. PRÉLIMINAIRES.

1. Le tableau suivant, formé de progressions arithmétiques et de progressions géométriques, contient, sans répétition, tous les nombres entiers (zéro excepté) (\*).

1	5	5	7	9	11	...
2	6	10	14	18	22	...
4	12	20	28	36	44	...
8	24	40	56	72	88	..
16	48	80	112	144	176	...
...	...	...	...	...	...	...

2. Si la première ligne est remplacée par

$$1, 1 + a, 1 + 2a, 1 + 5a, \dots; \quad (a > 2)$$

(\*) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 65. Ce tableau peut être regardé comme une *table de Pythagore*, dans laquelle les multiplicandes seraient les *nombres impairs*, et les multiplicateurs, les *puissances de 2*.



et que la première colonne le soit par

1,  
 $b$ ,  
 $b^2$ ,  
 $b^3$ ,  
 ...

ce second tableau :

1	$1 + a$	$1 + 2a$	$1 + 3a$	$1 + 4a$	.....
$b$	$(1 + a)b$	$(1 + 2a)b$	$(1 + 3a)b$	$(1 + 4a)b$	.....
$b^2$	$(1 + a)b^2$	$(1 + 2a)b^2$	$(1 + 3a)b^2$	$(1 + 4a)b^2$	.....
$b^3$	$(1 + a)b^3$	$(1 + 2a)b^3$	$(1 + 3a)b^3$	$(1 + 4a)b^3$	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....

ne contiendra pas tous les nombres entiers.

En effet, si l'on veut qu'il s'y trouve le nombre 2, on doit prendre  $b = 2$ .  
 Mais alors il ne contient pas les nombres entiers 3, 4, 5, ...,  $a$ .

3. Au moyen du premier tableau, formons celui-ci :

$u_1$	$u_5$	$u_9$	$u_{13}$	...
$u_2$	$u_6$	$u_{10}$	$u_{14}$	...
$u_4$	$u_{12}$	$u_{20}$	$u_{28}$	...
$u_8$	$u_{24}$	$u_{40}$	$u_{56}$	...
...	...	...	...	...

et considérons les séries :

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots; \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= u_1 + u_3 + u_5 + u_7 + \dots, \\ S_2 &= u_2 + u_6 + u_{10} + u_{14} + \dots, \\ S_3 &= u_4 + u_{12} + u_{20} + u_{28} + \dots, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_1 &= u_1 + u_2 + u_4 + u_8 + \dots, \\ \Sigma_2 &= u_3 + u_6 + u_{12} + u_{24} + \dots, \\ \Sigma_3 &= u_5 + u_{10} + u_{20} + u_{40} + \dots, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Je dis que :

*Si toutes les séries sont convergentes, on a :*

$$\left. \begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots, \\ S &= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

Cette proposition devient évidente au moyen du lemme suivant.

**4. Soit une série**

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (4)$$

*On supprime les termes  $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma, \dots$ , dont les indices vont en augmentant, et qui sont tels, que la série auxiliaire :*

$$u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \dots \quad (5)$$

*soit convergente. Il reste*

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{\alpha-1} + u_{\alpha+1} + \dots + u_{\beta-1} + u_{\beta+1} + \dots \quad (6)$$

*Cela posé : les séries (4), (6) sont, simultanément, convergentes, divergentes ou indéterminées.*

Appelons  $\Sigma_n$  la somme des termes  $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma, \dots$  qui précèdent  $u_n$ .

La somme des termes de la série (6), compris dans  $S_n$ , est  $S_n - \Sigma_n$ .

Or :

1° Si la série (4) est convergente,  $S_n - \Sigma_n$  a une limite, dont la valeur est  $\lim S_n - \lim \Sigma_n = S - \Sigma$ ;

Etc.

§. *Remarque.* — Cette proposition permet de reconnaître, *sans calcul*, la convergence ou la divergence de certaines séries. Soit, par exemple,

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \dots$$

Supprimons

$$\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{5}, \quad \frac{1}{5}, \quad -\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{8}, \quad -\frac{1}{9}, \quad \dots$$

lesquels, évidemment, forment une série convergente. Il reste la série *divergente* (\*) :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \dots$$

Donc la proposée est *divergente*.

6. Revenons aux égalités (A).

Si, dans S, on supprime les termes

$$u_1, \quad u_3, \quad u_5, \quad \dots,$$

il reste la série *convergente*

$$u_2 + u_4 + u_6 + u_8 + \dots,$$

dont la somme est  $S - S_1$ .

(\*) Parce que les dénominateurs forment une progression arithmétique.

Si, dans celle-ci, on supprime

$$u_2, u_6, u_{10}, \dots$$

il reste la série *convergente*

$$u_4 + u_8 + u_{12} + \dots,$$

dont la somme est  $S - S_1 - S_2$ .

En continuant de la sorte, on trouve

$$0 = \lim (S - S_1 - S_2 - S_3 - \dots);$$

ce qu'il fallait prouver (\*).

7. *Suite.* — Soit, généralement,

$$u_n = \zeta(v_n). \dots \dots \dots (7)$$

Les relations (A) peuvent être écrites ainsi :

$$P = P_1 P_2 P_3 \dots = \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \dots; \dots \dots \dots (B)$$

pourvu que

$$P = v_1 v_2 v_3 \dots; \dots \dots \dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= v_1 v_3 v_5 v_7 \dots, \\ P_2 &= v_2 v_6 v_{10} v_{14} \dots, \\ &\dots \dots \dots; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \Pi_1 &= v_1 v_2 v_4 \dots, \\ \Pi_2 &= v_3 v_6 v_{12} \dots, \\ \Pi_3 &= v_5 v_{10} v_{20} \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

8. *Remarques.* — 1° Si la série (1), supposée convergente, a tous ses termes positifs, les séries (2), (3) sont convergentes.

2° La réciproque n'est pas vraie. Car si les séries (2), par exemple, sont

(\*) Cette démonstration est peu rigoureuse; mais je crois qu'il serait facile de la rendre telle.

convergentes, la série (1) peut être considérée comme ayant pour termes  $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$ .

3° Dans le cas de la série harmonique :

$$\Sigma_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2,$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots = \frac{2}{5},$$

$$\Sigma_3 = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots = \frac{2}{5},$$

..... :

et la série (1) est *divergente*.

4° Si les termes de la série (1), pris en valeurs absolues, sont respectivement inférieurs à ceux de la série harmonique, les séries (3) sont *convergentes*.

## II. APPLICATIONS.

9. *Première application.* — Soit d'abord  $u_n = q^n$  (\*); et, par conséquent :

$$S = q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \dots; \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= q + q^3 + q^5 + q^7 + \dots, \\ S_2 &= q^2 + q^6 + q^{10} + q^{14} + \dots, \\ S_3 &= q^4 + q^{12} + q^{20} + q^{28} + \dots, \\ &\dots; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_1 &= q + q^2 + q^4 + q^8 + \dots, \\ \Sigma_2 &= q^3 + q^6 + q^{12} + q^{24} + \dots, \\ \Sigma_3 &= q^5 + q^{10} + q^{20} + q^{40} + \dots, \\ &\dots; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

(\*) Comme dans la théorie des fonctions elliptiques, on suppose

$$q = e^{-\pi \frac{\omega'}{\omega}} < 1.$$

puis :

$$s = \frac{q}{1-q}, \quad S_1 = \frac{q}{1-q^2}, \quad S_2 = \frac{q^2}{1-q^4}, \quad S_3 = \frac{q^4}{1-q^8}, \quad \dots \quad (14)$$

Il résulte, de ces valeurs,

$$\frac{q}{1-q} = \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^2}{1-q^4} + \frac{q^4}{1-q^8} + \dots; \quad (C)$$

relation connue (\*).

10. *Suite.* — Soit, comme dans le Mémoire cité (\*\*),

$$F(q) = q + q^2 + q^4 + q^8 + \dots \quad (15)$$

Les formules (13) se réduisent à :

$$\Sigma_1 = F(q), \quad \Sigma_2 = F(q^2), \quad \Sigma_3 = F(q^4), \dots \quad (16)$$

et comme

$$s = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \dots, \quad (A)$$

la transcendante  $F(q)$  satisfait à cette relation simple

$$F(q) + F(q^2) + F(q^4) + \dots = \frac{q}{1-q} \quad (***) \quad (D)$$

conséquence immédiate de la formation du tableau numérique.

(\*) *Recherches...*; page 75.

(\*\*) *Ibid.*, page 76.

(\*\*\*) Les *Recherches* contiennent diverses autres égalités, dans lesquelles entre  $F(q)$ . Par exemple celle-ci :

$$\int_0^1 \left[ 2 \frac{1-qq'}{1-q^2} + \frac{1-k'}{q \sqrt{q}} \right] \omega dq = \pi \sqrt{2},$$

déjà signalée en 1872. (*Note sur une formule de M. Botesu.*)

11. *Une digression.* — Dans la *Note* indiquée, on trouve (page 6) :

$$\int_0^1 dx \left[ \frac{x^n}{1-x} + \frac{x^{n-1}}{\zeta^n(x)} + \frac{F(x^n) - x^n}{1+x} \right] = 0,$$

ou

$$\int_0^1 dx \left[ 2 \frac{x^{n+1}}{1-x^2} + \frac{x^{n-1}}{\zeta^n(x)} + \frac{F(x^n)}{1+x} \right] = 0. \dots \dots \dots (E)$$

Si l'on suppose  $n = 1, n = 3, n = 5, \dots$ , et que l'on ait égard à la relation (D), on conclut, de cette égalité,

$$\int_0^1 dx \left[ 2 \frac{x^3}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{(1-x^2)\zeta^3 x} + \frac{x}{1-x^2} \right] = 0,$$

ou

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} \left[ \frac{x(1+2x-x^2)}{1-x^2} + \frac{1}{\zeta^3 x} \right] = 0 (*), \dots \dots \dots (F)$$

Pour simplifier cette formule, je la combine, par addition, avec celle-ci :

$$\int_0^1 \frac{x(1-2x+x^2)}{(1-x^2)^2} dx = \zeta^2 - \frac{1}{2};$$

laquelle est, à peu près, évidente. Le résultat cherché est

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} \left[ \frac{2x}{1-x^2} + \frac{1}{\zeta^3 x} \right] = \zeta^2 - \frac{1}{2}. \dots \dots \dots (G)$$

12. *Deuxième application.* — Soit

$$v_n = 1 - q^n.$$

(\*) La sommation est *légitime*, parce que les séries employées sont convergentes. Une simple figure démontre ce Lemme.

D'après les formules (8), (9), et au moyen de notations connues (\*) :

$$P = (1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3) \dots = \alpha\alpha', \dots \dots \dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= (1 - q)(1 - q^5)(1 - q^9) \dots = \alpha_1, \\ P_2 &= (1 - q^2)(1 - q^6)(1 - q^{10}) \dots = \alpha_2, \\ P_3 &= (1 - q^4)(1 - q^{12})(1 - q^{20}) \dots = \alpha_3, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

Donc

$$\alpha\alpha' = \alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots (19)$$

13. *Suite.* — Le développement du premier membre est  $\sum_0^\infty (n_p - n_i)q^n$  (\*\*\*)  
De plus :

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_0^\infty \varphi_i(n)(-q)^n, \\ \alpha_1 &= \sum_0^\infty \varphi_i(n)(-q^2)^n, \\ \alpha_2 &= \sum_0^\infty \varphi_i(n)(-q^4)^n, \\ &\dots \dots \dots (iv). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\sum_0^\infty (n_p - n_i)q^n = \sum_0^\infty \varphi_i(\lambda)(-q)^\lambda \cdot \sum_0^\infty \varphi_i(\mu)(-q^2)^\mu \cdot \sum_0^\infty \varphi_i(\nu)(-q^4)^\nu \dots, \dots \dots (20)$$

et

$$n_p - n_i = \sum (-1)^{\lambda+\mu+\nu+\dots} \varphi_i(\lambda)\varphi_i(\mu)\varphi_i(\nu)\dots, \dots \dots (21)$$

si

$$n = \lambda + 2\mu + 4\nu + \dots (v) \dots \dots \dots (22)$$

14. *Exemple.* — Soit  $n = 5$ . L'équation (22) est vérifiée par

$$\lambda = 5, \mu = 0, \nu = 0; \quad \lambda = 3, \mu = 1, \nu = 0; \quad \lambda = 1, \mu = 2, \nu = 0; \quad \lambda = 1, \mu = 0, \nu = 1.$$

(\*) *Recherches...*; pages 1, 64.  
 (\*\*\*) *Ibid.*, formule (252).  
 (\*\*\*\*) *Ibid.*, page 7.  
 (iv) *Ibid.*, page 5.  
 (v) D'après un théorème connu, le premier membre est zéro, + 1 ou - 1. *Recherches...*; page 7.



On doit donc trouver

$$\delta_p - \delta_i = -\varphi_i(\delta) + \varphi_i(\delta)\varphi_i(1) - \varphi_i(1)\varphi_i(2) + \varphi_i(1)\varphi_i(4);$$

ou (\*)

$$2 - 1 = -1 + 1 - 0 + 1;$$

ce qui est exact.

14. *Troisième application* — Si l'on suppose

$$v_n = 1 + q^n,$$

on obtient, sans nouveaux calculs,

$$\beta' = \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \dots \dots \dots \dots (23)$$

15. *Remarques.* — 1° Soit

$$\mathcal{F}(q) = 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots \dots (24)$$

Alors, par une formule connue (\*\*),

$$\mathcal{F}(q) = \beta \mathcal{F}(q^2). \dots \dots \dots \dots \dots (25)$$

Il résulte, de cette égalité (\*\*\*),

$$\mathcal{F}(q) = \beta \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \dots \dots \dots \dots (26)$$

Or :

$$\left. \begin{aligned} \beta &= (1+q)(1+q^3)(1+q^6)\dots\dots \\ \beta_1 &= (1+q^2)(1+q^6)(1+q^{10})\dots\dots \\ \beta_2 &= (1+q^4)(1+q^{12})(1+q^{20})\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \dots \dots (27)$$

(\*) *Recherches* . . . ; Tables II et III.

(\*\*) *Ibid.*, page 52, note.

(\*\*\*) Voir, par exemple, le *Calcul intégral de Bertrand*, p. 646.

Donc

$$\mathcal{F}(q) = (1 + q)(1 + q^2)(1 + q^3) \dots = \beta\beta', \dots \dots \dots (28)$$

puis

$$\beta' = \beta_1\beta_2\beta_3 \dots; \dots \dots \dots (25)$$

comme ci-dessus (\*).

2° L'égalité (26) donne

$$\mathcal{F}(q^2) = \beta_1\beta_2\beta_3 \dots;$$

donc (23)

$$\beta' = \mathcal{F}(q^2). \dots \dots \dots (29)$$

3° On sait que  $\alpha\beta\beta' = 1$  (\*\*). Donc, à cause de

$$\mathcal{F}(q) = \beta\beta': \dots \dots \dots (28)$$

$$\frac{1}{\alpha} = \mathcal{F}(q) \dots \dots \dots (30)$$

4° Le développement du premier membre, suivant les puissances de  $q$ , est  $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) q^n$  (\*\*\*) . D'ailleurs, par la définition (24) :

$$\mathcal{F}(q) = 1 + (q + q^2 + q^3 + \dots) + (q + q^2 + q^3 + \dots)(q^2 + q^4 + q^6 + \dots) \left. \begin{array}{l} + (q + q^2 + q^3 + \dots)(q^2 + q^4 + q^6 + \dots)(q^3 + q^6 + q^9 + \dots) + \dots \end{array} \right\} \dots (31)$$

Donc, dans cette nouvelle série, le coefficient de  $q^n$  est  $\varphi(n)$  (iv).

5° On a ce petit théorème d'Arithmétique :

*Le nombre des décompositions de  $n$  en parties inégales (ou  $\varphi(n)$ ), égale*

(\*) En 1873, je n'avais point fait attention à ces conséquences de la formule (25) et du tableau numérique.

(\*\*) *Recherches*. . . ; page 2.

(\*\*\*) *Ibid.*, page 3.

(iv) *Ibid.*, page 48. On ne doit pas oublier que  $\varphi(n)$  représente le nombre des décompositions de  $n$  en parties entières, positives, inégales.

le nombre des décompositions de  $n$  en parties appartenant à la Table de Pythagore suivante (\*),

1	2	3	4	5	6	7	8	...
2	4	6	8	10	12	14	16	...
3	6	9	12	15	18	21	24	...
4	8	12	16	20	24	28	32	...
5	10	15	20	25	30	35	40	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

pourvu que l'on prenne la première ligne, puis les deux premières lignes, puis les trois premières, etc. (\*\*).

Soit, par exemple,  $n = 8$ , auquel cas  $\varphi(n) = 6$  (\*\*\*) .

Les décompositions, dont il s'agit, sont au nombre de 6 ; savoir :

$$8, \quad 6 + 2, \quad 4 + 4, \quad 2 + 6, \quad 1 + 4 + 3, \quad 5 + 2 + 1;$$

conformément à l'énoncé (iv).

#### 16. Quatrième application. — Soit

$$u_n = x^n - x^{2n} + x^{3n}; \quad (0 < x < 1). \quad \dots \quad (52)$$

(\*) Table indéfinie.

(\*\*) Il a une grande analogie avec celui que l'on trouve à la page 73 des *Recherches*.

(\*\*\*) *Loc. cit.*, Table I.

(iv)  $n$  est considéré comme une partie de  $n$ .

et, par conséquent :

$$\begin{aligned}
 S &= (x - x^2 + x^5) + (x^2 - x^4 + x^6) + (x^5 - x^6 + x^9) + \dots \\
 S_1 &= (x - x^2 + x^5) + (x^5 - x^6 + x^9) + (x^8 - x^{10} + x^{15}) + \dots, \\
 S_2 &= (x^2 - x^4 + x^6) + (x^6 - x^{12} + x^{18}) + (x^{10} - x^{20} + x^{30}) + \dots, \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Il est clair que :

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^5}{1-x^5} = \frac{x}{1-x} \left( 1 - \frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{1+x+x^2} \right), \dots \quad (52) \\
 S_1 &= \frac{x}{1-x^2} - \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^5}{1-x^6} = \frac{x}{1-x^2} \left( 1 - \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^2+x^4} \right), \\
 S_2 &= \frac{x^2}{1-x^4} \left( 1 - \frac{x^2}{1+x^4} + \frac{x^4}{1+x^4+x^8} \right), \\
 &\dots \quad (55)
 \end{aligned}$$

Donc, après suppression du facteur  $\frac{x}{1-x}$  :

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{1+x+x^2} &= \frac{1}{1+x} \left[ 1 - \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^2+x^4} \right] + \frac{x}{(1+x)(1+x^2)} \left[ 1 - \frac{x^2}{1+x^4} + \frac{x^4}{1+x^4+x^8} \right] \\
 &\quad + \frac{x^5}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)} \left[ 1 - \frac{x^4}{1+x^8} + \frac{x^8}{1+x^8+x^{16}} \right] + \dots
 \end{aligned}$$

Si l'on fait les multiplications indiquées, les termes formant les deux premières colonnes se détruisent deux à deux, sauf le terme  $\frac{1}{1+x}$ .

Ainsi, l'égalité devient, au moyen d'une réduction évidente,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1+x+x^2} &= \frac{1}{(1+x)(1+x^2+x^4)} + \frac{x^2}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4+x^8)} \\
 &+ \frac{x^9}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8+x^{16})} + \frac{x^{21}}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}+x^{32})} + \dots (*) \quad (II)
 \end{aligned}$$

(\*) Les exposants sont :

$$0 = 3 - 3, \quad 5 = 6 - 5, \quad 9 = 12 - 5, \quad 21 = 24 - 5, \dots$$

17. *Suite.* — Pour toute valeur positive de  $x$ , la série est convergente.

Donc la relation (H), obtenue en supposant  $x < 1$ , subsiste pour  $x > 1$  (\*).

Si, par exemple,  $x = 1$ , on trouve

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{2^2 \cdot 5} + \frac{1}{2^3 \cdot 5} + \dots;$$

ce qui est exact.

18. *Cinquième application.* — Soit

$$u_n = x^n - x^{2^n}.$$

Des calculs analogues aux précédents conduisent à cette autre *relation générale* :

$$1 = \frac{1-x+x^2}{1+x^2} + x \frac{1-x^2+x^4}{(1+x^2)(1+x^4)} + x^3 \frac{1-x^4+x^8}{(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)} + x^7 \frac{1-x^8+x^{16}}{(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})} + \dots \quad (K)$$

19. *Théorème d'Arithmétique.* — Soit  $a$  un nombre entier, supérieur à l'unité. Les nombres entiers

$$N_1 = a^2 - a + 1, \quad N_2 = a^4 - a^2 + 1, \quad N_3 = a^8 - a^4 + 1, \quad N_4 = a^{16} - a^8 + 1, \quad \dots$$

sont : 1° impairs ; 2° premiers avec  $a$  et  $a - 1$  ; 3° premiers entre eux, deux à deux.

1° Soit, généralement,  $N_n = a^{2^k} - a^k + 1$  (\*\*).  $a^k$  et  $a^{2^k}$  sont de même parité ; donc  $N_n$  est impair.

(\*) Et même pour  $x < 0$ , comme on le reconnaît aisément. Le seul cas d'exception pourrait être celui de  $x = -1$ . Mais si l'on multiplie les deux membres par  $x + 1$ , et qu'on attribue à  $x$  cette valeur particulière, on obtient, comme ci-dessus,

$$0 = \frac{1}{5} - \frac{1}{2 \cdot 5} - \frac{1}{2^2 \cdot 5} - \frac{1}{2^3 \cdot 5} - \dots$$

Ainsi, la formule (H) est générale.

(\*\*)  $k = 2^n$ .

2°  $N_n = a^k(a^k - 1) + 1$ . Évidemment,  $N_n$  est premier avec  $a^k$  et  $a^k - 1$ ; donc ce nombre est premier avec  $a$  et  $a - 1$ .

3° On a, par des multiplications successives :

$$N_1(a^2 + a + 1) = a^4 + a^2 + 1,$$

$$N_2(a^4 + a^2 + 1) = a^8 + a^4 + 1,$$

$$N_3(a^8 + a^4 + 1) = a^{16} + a^8 + 1,$$

$$N_4(a^{16} + a^8 + 1) = a^{32} + a^{16} + 1,$$

. . . . .

De là résulte, en particulier,

$$N_1N_2N_3N_4(a^2 + a + 1) = a^{32} + a^{16} + 1.$$

Mais

$$N_5 = a^{32} - a^{16} + 1.$$

Donc

$$N_1N_2N_3N_4(a^2 + a + 1) - N_5 = 2a^{16}; \dots \dots \dots (34)$$

et, en général,

$$N_1N_2N_3N_4 \dots N_n(a^2 + a + 1) - N_{n+1} = 2a^t (*) \dots \dots \dots (L)$$

Cela posé, si  $N_5$  et  $N_5$  (34), par exemple, avaient un facteur premier commun,  $p$ , ce facteur serait 2 ou un diviseur de  $a$ ; contrairement à ce que l'on vient de voir.

20. Sixième application. — Prenons

$$u_n = \frac{x^n}{n},$$

$x$  étant compris entre 0 et 1, exclusivement.

(\*) La relation (L) a d'assez nombreuses conséquences, sur lesquelles nous reviendrons peut-être.

Il est visible que

$$S = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots = -\zeta(1-x),$$

$$S_1 = x + \frac{x^5}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \frac{1}{2} \zeta \frac{1+x}{1-x},$$

$$S_2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{10} + \dots = \frac{1}{4} \zeta \frac{1+x^2}{1-x^2},$$

$$S_3 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{20}}{20} + \dots = \frac{1}{8} \zeta \frac{1+x^4}{1-x^4},$$

.....

Par suite,

$$2 \zeta \frac{1}{1-x} = \zeta \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \zeta \frac{1+x^2}{1-x^2} + \frac{1}{4} \zeta \frac{1+x^4}{1-x^4} + \dots;$$

ou, en passant des logarithmes aux nombres, et en changeant  $x^2$  en  $x$  :

$$\frac{1}{1-x} = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1+x^4}{1-x^4}\right)^{\frac{1}{8}} \left(\frac{1+x^8}{1-x^8}\right)^{\frac{1}{16}} \dots (*) \dots \dots (M)$$

Si, par exemple,  $x = \frac{1}{2}$  :

$$2 = \left(\frac{5}{1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{5}{5}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{17}{15}\right)^{\frac{1}{8}} \left(\frac{257}{255}\right)^{\frac{1}{16}} \dots$$

21. *Remarque.* — On a

$$1-x = (1-x)^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{4}} (1-x)^{\frac{1}{8}} \dots$$

Donc, par multiplication,

$$1 = (1+x)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1+x^2}{1+x} \right]^{\frac{1}{4}} \left[ \frac{1+x^4}{(1+x)(1+x^2)} \right]^{\frac{1}{8}} \left[ \frac{1+x^8}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)} \right]^{\frac{1}{16}} \dots$$

(\*) Dans les Mémoires intitulés : *Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet, Recherches sur la constante G et sur les intégrales eulériennes*, on trouve des formules analogues à celle-ci.

Le premier facteur est  $(1 + x)^{\frac{1}{2}}$ ; le produit des deux premiers facteurs égale  $[(1 + x)(1 + x^2)]^{\frac{1}{4}}$ ; le produit des trois premiers facteurs égale  $[(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)]^{\frac{1}{8}}$ ; etc. Ainsi

$$\text{Lim.} [(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \dots (1 + x^n)]^{\frac{1}{2^n}} = 1, \quad (x < 1) \dots \dots \dots \text{(N)}$$

en supposant  $n = 2^k$ .

**22. Septième application.** — Soient :

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots, \\ S_2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \frac{1}{18} - \dots, \\ S_3 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{20} - \frac{1}{28} + \frac{1}{36} - \dots, \\ S_4 &= \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{40} - \frac{1}{56} + \frac{1}{72} - \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(55)}$$

et, par conséquent :

$$S_1 = \frac{\pi}{4}, \quad S_2 = \frac{\pi}{8}, \quad S_3 = \frac{\pi}{16}, \quad S_4 = \frac{\pi}{32}, \dots$$

Il est clair que

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots = \frac{\pi}{2},$$

série connue (\*).

Donc, en vertu du Lemme (4) :

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \dots \text{(**)} \dots \dots \text{(P)}$$

(\*) EULER, *Introduction à l'Analyse*, tome I, page 226.

(\*\*) Voici la loi des termes :

1° Si  $n = 2^x$ ,  $u_n = \frac{1}{n}$ ; 2° Si  $n$  est impair,  $u_n = \pm \frac{1}{n}$ , selon que  $n = 4\mu \pm 1$ ; 3° Si  $n = 2^x i$ ,  $i$  étant impair,  $u_n = u_i$ .



23. *Remarque.* — D'après les formules (35) :

$$\Sigma_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = 2,$$

$$\Sigma_2 = -\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \dots\right) = -\frac{2}{5},$$

$$\Sigma_3 = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \dots = \frac{2}{5},$$

$$\Sigma_4 = -\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56} + \dots\right) = -\frac{2}{7},$$

.....

puis

$$S = 2 \left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) = \frac{\pi}{2};$$

comme ci-dessus.

24. *Huitième application.* — Prenons

$$S_1 = 1 - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots = G \text{ (*)},$$

$$S_2 = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{10^2} - \frac{1}{14^2} + \dots = \frac{1}{4} G,$$

$$S_3 = \frac{1}{4^2} - \frac{1}{12^2} + \frac{1}{20^2} - \frac{1}{28^2} + \dots = \frac{1}{16} G,$$

.....

Il résulte, de ces égalités,

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{4}{5} G \text{ (**)} \dots \dots \dots (Q)$$

(\*) *Recherches sur la constante G*, p. 1.

(\*\*) La loi des signes, et les calculs, sont les mêmes que dans le paragraphe 22.

25. *Neuvième application.* — Soit, comme dans les *Notes sur la théorie des fractions continues*,

$$u_n = \frac{q^n}{1 + q^{2n}}; \dots \dots \dots (56)$$

et, par conséquent,

$$S = \frac{1}{4} \left( \frac{2\omega}{\pi} - 1 \right) (*) \dots \dots \dots (57)$$

On a

$$S_1 = \frac{q}{1 + q^2} + \frac{q^5}{1 + q^6} + \frac{q^9}{1 + q^{10}} + \dots = \frac{k_1\omega_1}{2\pi} (**)$$

Donc

$$S_2 = \frac{k_2\omega_2}{2\pi}, \quad S_5 = \frac{k_5\omega_5}{2\pi}, \dots;$$

puis

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_5\omega_5 + \dots = \frac{1}{2}(2\omega - \pi) \dots \dots \dots (R)$$

Ainsi, les fractions  $k_1\omega_1, k_2\omega_2, k_5\omega_5, \dots$  forment une série convergente, dont la somme est  $\frac{1}{2}(2\omega - \pi)$  (\*\*\*) .

26. *Suite.* — L'égalité (R) peut être écrite autrement.

La formule connue :

$$\frac{k\omega}{2\pi} = q^{\frac{1}{2}}(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + \dots)^2 (iv),$$

donne, par le changement de  $q$  en  $q^2$  :

$$k_1\omega_1 = 2\pi \left( q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{5}{2}} + q^{\frac{9}{2}} + q^{\frac{13}{2}} + \dots \right)^2.$$

(\*) *Loc. cit.*, page 49.

(\*\*) *Ibid.*, page 13.

(\*\*\*) Proposition analogue à celle que l'on trouve à la page 74 des *Recherches sur quelques produits indéfinis*.

(iv) *Recherches...*, page 2.

D'un autre côté,

$$2\omega - \pi = 4\pi (q + q^4 + q^9 + q^{16} + \dots) (1 + q + q^4 + q^9 + \dots).$$

Par conséquent, la relation (R) devient

$$\left. \begin{aligned} & (q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{9}{2}} + q^{\frac{25}{2}} + q^{\frac{49}{2}} + \dots)^2 + (q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \dots)^2 \\ & + (q^2 + q^{18} + q^{50} + q^{98} + \dots)^2 + (q^4 + q^{36} + q^{100} + q^{196} + \dots)^2 + \dots \\ & = (q + q^4 + q^9 + q^{16} + \dots) (1 + q + q^4 + q^9 + \dots) \end{aligned} \right\} \dots \dots (S)$$

27. *Remarque.* — Cette égalité (S) démontre un autre petit théorème d'Arithmétique, presque évident :

*La somme de deux carrés (\*) égale la demi-somme de deux carrés impairs, ou la somme de deux carrés impairs, ou le double de la somme de deux carrés impairs, etc.*

Par exemple,

$$2^2 + 5^2 = \frac{1}{2} (5^2 + 7^2), \quad 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2, \quad 4^2 + 10^2 = 2(2^2 + 5^2), \text{ etc.}$$

28. *Suite.* — On sait que

$$q + q^9 + q^{25} + \dots = \frac{1}{4} (1 - \sqrt{k'}) \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}},$$

et que

$$q^2 + q^8 + q^{16} + \dots = \frac{1}{2} \left[ -1 + \sqrt{\frac{\omega}{\pi} (1 + k')} \right] (**).$$

(\*) L'un d'eux peut être nul.

(\*\*) *Recherches...*, pages 102 et 2.

Conséquemment, si l'on change, encore,  $q$  en  $q^2$ , la relation (S) se transforme en

$$\omega(1 - \sqrt{k_1})^2 + \omega_1(1 - \sqrt{k_1'})^2 + \omega_2(1 - \sqrt{k_2})^2 + \dots = 2[\omega(1 + k') - \pi]. \quad (T)$$

Voici donc une troisième série, formée par des transcendentes elliptiques, dont la somme est connue (\*).

29. *Autre sommation.* — Reprenons la formule

$$u_n = \frac{q^n}{1 + q^{2n}} \dots \dots \dots (36)$$

Il en résulte

$$\Sigma_1 = \frac{q}{1 + q^2} + \frac{q^2}{1 + q^4} + \frac{q^4}{1 + q^8} + \dots \dots \dots (59)$$

c'est-à-dire,

$$\Sigma_1 = q + q^2 - q^3 + q^4 + q^5 - q^6 - q^7 + q^8 + q^9 + q^{10} - q^{11} - q^{12} + q^{13} - q^{14} + \dots (**). \quad (40)$$

Dans cette remarquable série, le coefficient de  $q^n$  est  $\pm 1$ , selon que  $n$  égale  $2^\alpha (4\mu \pm 1)$ .

En effet :

1° Les fractions  $\frac{q}{1 + q^2}, \frac{q^2}{1 + q^4}, \frac{q^4}{1 + q^8}, \dots$ , produisent des termes dans lesquels  $n$  a les formes suivantes :

$$1 + 2x, \quad 2 + 4x = 2(1 + 2x), \quad 4 + 8x = 4(1 + 2x) \dots;$$

donc  $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$  : la série renferme toutes les puissances entières de  $q$ , sans répétition.

2° Si  $n = 2^\alpha$ , le coefficient est  $+1$ .

3° Si  $n = 2^\alpha + 2q \cdot 2^{\alpha+1} = 2^\alpha(4q + 1)$ , le coefficient est  $+1$ .

4° Si  $n = 2^\alpha + (2q + 1)2^{\alpha+1} = 2^\alpha(4q + 3)$ , le coefficient est  $-1$ .

(\*) J'ai vérifié, directement, l'égalité (T).

(\*\*) Voir, à la page 90 des *Recherches*, un développement analogue à celui-ci.

30. *Remarques.* — 1° La formule (40) peut être écrite ainsi :

$$\Sigma_1 = (q + q^2 + q^4 + q^8 + \dots) - (q^3 + q^6 + q^{12} + q^{24} + \dots) + (q^5 + q^{10} + q^{20} + \dots) - (q^7 + q^{14} + q^{28} + \dots) - \dots$$

Conséquemment (15)

$$\Sigma_1 = \frac{q}{1 + q^2} + \frac{q^2}{1 + q^4} + \frac{q^4}{1 + q^8} + \dots = F(q) - F(q^3) + F(q^5) - \dots; \quad \dots \quad (U)$$

puis

$$\Sigma_2 = F(q^3) - F(q^9) + F(q^{18}) - F(q^{36}) + \dots,$$

$$\Sigma_3 = F(q^5) - F(q^{15}) + F(q^{25}) - F(q^{50}) + \dots,$$

$$\Sigma_4 = F(q^7) - F(q^{21}) + F(q^{35}) - F(q^{70}) + \dots$$

. . . . .

2° D'après ces valeurs,

$$S = \frac{1}{4} \left( \frac{2\omega}{\pi} - 1 \right) = \varepsilon_1 F(q) + \varepsilon_3 F(q^3) + \varepsilon_5 F(q^5) + \dots (*) \quad \dots \quad (44)$$

3° On a vu que

$$F(q) + F(q^3) + F(q^5) + \dots = \frac{q}{1 - q} \quad \dots \quad (D)$$

Ainsi, la série

$$F(q) + F(q^3) + F(q^5) + \dots$$

a une limite fort simple ; et la série

$$F(q) - F(q^3) + F(q^5) - \dots,$$

conjuguée de la première, n'est peut-être pas sommable.

(\*) *Recherches* . . . , pages 73, 76.

31. *Autre transcendante.* — De la formule (39), on conclut

$$\int_0^1 \frac{\Sigma_t}{q} dq = \text{arc tg } q + \frac{1}{2} \text{arc tg}(q^2) + \frac{1}{4} \text{arc tg}(q^4) + \frac{1}{8} \text{arc tg}(q^8) + \dots \quad (42)$$

et, en particulier,

$$\int_0^1 \frac{\Sigma_t}{q} dq = \frac{\pi}{2},$$

ou (40) :

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \dots \quad (P)$$

32. *Dixième application.* — Prenons enfin

$$u_n = \frac{q^n}{1 + q^n + q^{2n}}; \quad \dots \quad (42)$$

ou, sous une forme plus commode,

$$u_x = \frac{q^\alpha(1 - q^\alpha)}{1 - q^{2x}}. \quad \dots \quad (43)$$

Soit, après un changement de notation,

$$S = \Sigma_0^\infty A_n q^n. \quad \dots \quad (44)$$

1° Si  $n = 3\alpha\beta + \alpha = (3\beta + 1)\alpha$ , la partie correspondante de  $A_n$  est  $+1$ .

2° Si  $n = 3\alpha\beta + 2\alpha = (3\beta + 2)\alpha$ , la partie correspondante de  $A_n$  est  $-1$ .

Par conséquent,

$A_n$  égale l'excès du nombre des diviseurs de  $n$ , ayant la forme  $3\mu + 1$ , sur le nombre de ceux qui ont la forme  $3\mu - 1$  (\*).

(\*) On peut voir, dans les *Recherches* (pages 73, 75), une proposition analogue à celle-ci, mais relative au développement de

$$f(q) = \frac{q}{1-q} - \frac{q^5}{1-q^5} + \frac{q^9}{1-q^9} - \dots$$

33. *Remarque.* — D'après cette loi générale :

1° Si  $n$ , supposé *premier*, a la forme  $3\mu + 1$ ,  $A_n = 2$ .

2° Si  $n$ , supposé *premier*, a la forme  $3\mu - 1$ ,  $A_n = 0$ .

3° Si  $n = (3\mu - 1)^k$ ,  $A_n = k + 1$ .

4° Si  $n = (3\mu - 1)^k$ ,  $A_n = 0$  ou  $+1$ , selon que l'exposant  $k$  est *impair* ou *pair*.

5° Si  $n = 3^{\alpha}n'$ ,  $n'$  étant *premier avec 3*;  $A_n = A_{n'}$ .

Etc.

34. *Vérification.* — Le développement de

$$S = \frac{q(1-q)}{1-q^3} + \frac{q^2(1-q^2)}{1-q^6} + \frac{q^3(1-q^3)}{1-q^9} + \frac{q^4(1-q^4)}{1-q^{12}} + \dots,$$

limité aux vingt-cinq premiers termes, est

$$q + q^5 + q^4 + 2q^9 + q^{12} + 2q^{15} + q^{16} + 2q^{19} + 2q^{24} + q^{25}.$$

Tous les coefficients satisfont aux conditions énoncées.

Liège, 22 mars 1887.

NOUVELLES PROPRIÉTÉS  
DES FONCTIONS  $X_n$ ;

PAR

E. CATALAN,  
ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

---

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 3 décembre 1887.)

---





# NOUVELLES PROPRIÉTÉS

## DES FONCTIONS $X_n$ (\*).

---

I. *Première propriété.* — Soit

$$S_p = 1 - \frac{2}{3} C_{p,1} + \frac{2^2}{5} C_{p,2} - \dots \pm \frac{2^p}{2p+1}; \dots \dots \dots (1)$$

ou, par une sommation facile,

$$S_p = \int_0^1 (1 - 2x^2)^p dx. \dots \dots \dots (2)$$

Si l'on fait  $x = \sin \varphi$ , on trouve

$$S_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p 2\varphi \cdot \cos \varphi d\varphi \dots \dots \dots (3)$$

Cette intégrale est celle qui entre dans la formule (F) (\*\*). Donc

$$\int_0^1 x^p (X_p + X_{p-2} + \dots) dx = \int_0^1 (1 - 2x^2)^p dx \dots \dots \dots (A)$$

II. *Deuxième propriété.* — L'intégration par parties, effectuée sur l'égalité (2), donne aisément

$$(2p + 1)S_p - 2pS_{p-1} = (-1)^p \dots \dots \dots (4)$$

En conséquence :

$$\int_0^1 [(2p + 1)x^p (X_p + X_{p-2} + \dots) - 2px^{p-1} (X_{p-1} + X_{p-3} + \dots)] dx = (-1)^p \dots (B)$$

(\*) Addition à la *Seconde Note sur les fonctions  $X_n$*  (Académie de Belgique, août 1886).

(\*\*) *Seconde Note sur les fonctions  $X_n$* , p. 9.

III. *Troisième propriété.* — Si, dans l'équation (4), on change  $p$  en  $p-1$ ,  $p-2$ , ..., 1, on trouve, par addition,

$$(2p+1)S_p = S_{p-1} + S_{p-2} + \dots + S_0 + \frac{1}{0}, \dots \dots \dots (5)$$

selon que  $p$  est *pair* ou *impair* (\*). Par suite,

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^1 [(2p+1)x^p(X_p + X_{p-2} + \dots) - x^{p-1}(X_{p-1} + X_{p-3} + \dots) \\ & - x^{p-2}(X_{p-2} + X_{p-4} + \dots) - \dots - X_0] dx = \text{un ou zéro (**)}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (C)$$

IV. *Suite.* — La relation (5) équivaut à

$$\int_0^1 [(2p+1)(1-2x^2)^p - (1-2x^2)^{p-1} - \dots - (1-2x^2) - 1] dx = \frac{1}{0}.$$

Dans la parenthèse, la partie négative égale  $\frac{(1-2x^2)^p - 1}{(1-2x^2) - 1}$ . Si donc la différentielle est représentée par  $F(x)dx$ , on a

$$F(x) = \frac{(2p+1)(1-2x^2)^{p+1} - 2(p+1)(1-2x^2)^p + 1}{-2x^2} \dots \dots \dots (6)$$

La fraction est la dérivée de  $\frac{1-(1-2x^2)^{p+1}}{2x}$ . Par conséquent :

$$\int_0^x \frac{(2p+1)(1-2x^2)^{p+1} - 2(p+1)(1-2x^2)^p + 1}{x^2} dx = \frac{(1-2x^2)^{p+1} - 1}{x} \dots \dots \dots (D)$$

$$\int_0^1 \frac{(2p+1)(1-2x^2)^{p+1} - 2(p+1)(1-2x^2)^p + 1}{x^2} dx = (-1)^{p+1} - 1 \dots \dots \dots (E)$$

V. *Autres intégrales.* — Faisons, comme précédemment,  $x = \sin \varphi$ . Nous aurons :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2p+1)\cos^{p+1}2\varphi - 2(p+1)\cos^p 2\varphi + 1}{\sin^2 \varphi} \cos \varphi d\varphi = \frac{\cos^{p+1}2\varphi - 1}{\sin \varphi}, \dots \dots \dots (D')$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2p+1)\cos^{p+1}2\varphi - 2(p+1)\cos^p 2\varphi + 1}{\sin^2 \varphi} \cos \varphi d\varphi = (-1)^{p+1} - 1 \dots \dots \dots (E')$$

(\*) A cause de  $S_0 = 1$ .

(\*\*) On arrive au même résultat en faisant varier  $p$  dans l'égalité (B).

VI. *Remarques.* — 1° Le second membre de (E') ne change pas, quand on y remplace  $p$  par  $p + 2$ . Conséquemment,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2p + 5)\cos^5 2\varphi - (2p + 6)\cos^3 2\varphi - (2p + 1)\cos 2\varphi + 2p + 2}{\sin^2 \varphi} \cos^p 2\varphi \cdot \cos \varphi d\varphi = 0.$$

Le numérateur est divisible par  $1 - \cos 2\varphi = 2 \sin^2 \varphi$ . Donc, sous une forme plus simple :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [2p + 2 + \cos^2 \varphi - (2p + 5)\cos^2 2\varphi] \cos^p 2\varphi \cdot \cos \varphi d\varphi = 0 \quad \dots \quad (\text{F})$$

2° Cette égalité est une conséquence des formules (3), (4). On peut l'écrire ainsi :

$$\int_0^1 [1 - (4p + 9)x^2 + (4p + 10)x^4] (1 - 2x^2)^p dx = 0 \quad \dots \quad (\text{G})$$

VII. *Généralisations.* — 1° Soit

$$\int_0^x [1 - (4p + 9)x^2 + (4p + 10)x^4] (1 - 2x^2)^p dx = f(x) \quad \dots \quad (7)$$

Le polynôme  $f(x)$  a une valeur fort simple. En effet, la quantité entre parenthèses équivaut à

$$(1 - 2x^2)(1 - 5x^2) - 4(p + 1)(x^2 - x^4).$$

Donc

$$f'(x) = (1 - 2x^2)^{p+1}(1 - 5x^2) - 4(p + 1)(1 - 2x^2)^p(x^2 - x^4); \quad \dots \quad (8)$$

puis

$$f(x) = (1 - 2x^2)^{p+1}(x - x^3),$$

ou bien

$$\int_0^x [1 - (4p + 9)x^2 + (4p + 10)x^4] (1 - 2x^2)^p dx = (1 - 2x^2)^{p+1}(x - x^3) \quad \dots \quad (\text{H})$$

2° La formule (4) donne, semblablement,

$$\int_0^x (1 - 2x^2)^{p-1} [1 - 2(2p + 1)x^2] dx = (1 - 2x^2)^p x \quad \dots \quad (\text{K})$$

VIII. *Relation combinatoire.* — Dans  $f'(x)$ , le coefficient de  $x^{2k}$  est

$$(-2)^k C_{p,k} - (4p+9)(-2)^{k-1} C_{p,k-1} + (4p+10)(-2)^{k-2} C_{p,k-2};$$

ou

$$-(-2)^{k-1} [2C_{p,k} + (4p+9)C_{p,k-1} + (2p+5)C_{p,k-2}].$$

Dans  $f(x)$ , le coefficient de  $x^{2k+1}$  est

$$-(-2)^{k-1} [2C_{p+1,k} + C_{p+1,k-1}].$$

Par conséquent,

$$2C_{p,k} + (4p+9)C_{p,k-1} + (2p+5)C_{p,k-2} = \mathfrak{N}(2k+1) \quad (*) \quad \dots \quad (L)$$

Soient, par exemple,  $p=5$ ,  $k=3$ . On doit trouver

$$2C_{5,3} + 29C_{5,2} + 15C_{5,1} = \mathfrak{N}(7),$$

ou

$$585 = \mathfrak{N}(7);$$

ce qui a lieu.

IX. THÉORÈME. — *La fonction  $X_n$  satisfait à l'équation*

$$A_p(x^2-1)^p \frac{d^p X_n}{dx^p} = \frac{d \left[ (x^2-1)^{p+1} \frac{d^{p+1} X_n}{dx^{p+1}} \right]}{dx}, \dots \quad (M)$$

dans laquelle  $A_p$  est un coefficient numérique.

Dans la *Première Note sur les fonctions  $X_n$*  (\*\*), j'ai donné la formule

$$\int_{-1}^x X_n dx = \frac{x^2-1}{n(n+1)} \frac{dX_n}{dx}, \dots \quad (9)$$

ou

$$n(n+1)X_n = \frac{d \left[ (x^2-1) \frac{dX_n}{dx} \right]}{dx} \dots \quad (10)$$

(\*) La valeur du second membre est  $(2k+1)[2C_{p+1,k} + C_{p+1,k-1}]$ . Si l'on en fait abstraction, l'égalité (L) paraît assez difficile à démontrer *directement*.

(\*\*) *Académie de Belgique*, octobre 1880. Voir aussi le *second Mémoire*, p. 31.

Celle-ci est comprise dans la relation générale (M) : elle répond à  $p=0$ .

Supposons donc que l'égalité (M) ait été vérifiée pour une certaine valeur de  $p$ , et voyons si elle subsiste quand on y change  $p$  en  $p+1$ .

Après suppression du facteur  $(x^2-1)^p$ , (M) devient

$$A_p \frac{d^p X_n}{dx^p} = (x^2-1) \frac{d^{p+2} X_n}{dx^{p+2}} + 2(p+1)x \frac{d^{p+1} X_n}{dx^{p+1}}.$$

Prenant les dérivées, nous avons

$$[A_p - 2(p+1)] \frac{d^{p+1} X_n}{dx^{p+1}} = (x^2-1) \frac{d^{p+3} X_n}{dx^{p+3}} + 2(p+2)x \frac{d^{p+2} X_n}{dx^{p+2}},$$

ou

$$A_{p+1}(x^2-1)^{p+1} \frac{d^{p+1} X_n}{dx^{p+1}} = (x^2-1)^{p+2} \frac{d^{p+3} X_n}{dx^{p+3}} + 2(p+2)(x^2-1)^{p+1} x \frac{d^{p+2} X_n}{dx^{p+2}}.$$

Le second membre est la dérivée de

$$(x^2-1)^{p+2} \frac{d^{p+2} X_n}{dx^{p+2}}.$$

Ainsi,

$$A_{p+1}(x^2-1)^{p+1} \frac{d^{p+1} X_n}{dx^{p+1}} = \frac{d \left[ (x^2-1)^{p+2} \frac{d^{p+2} X_n}{dx^{p+2}} \right]}{dx};$$

etc. De plus,

$$A_{p+1} = A_p - 2(p+1) \dots \dots \dots (11)$$

Et comme  $A_0 = n(n+1)$  :

$$A_p = (n-p)(n+p+1) \dots \dots \dots (12)$$

X. COROLLAIRE. — Si l'on fait

$$(x^2-1)^p \frac{d^p X_n}{dx^p} = U_p,$$

on a

$$U_{p+1} = A_p \int_{-1}^{+1} U_p dx \dots \dots \dots (N)$$

XI. Application. — Soit  $n=5$ , auquel cas

$$U_0 = X_5 = \frac{1}{8}(65x^5 - 70x^3 + 15x);$$

puis, par application de la formule (N) :

$$U_1 = \frac{A_0}{8} \int_{-1}^{+1} (65x^5 - 70x^3 + 15x) dx = \frac{A_0}{16} (21x^6 - 55x^4 + 15x^2 - 1),$$

$$U_2 = \frac{A_0 A_1}{16} \int_{-1}^{+1} (21x^7 - 35x^5 + 15x^3 - 1) dx = \frac{A_0 A_1}{16} (5x^8 - 7x^6 + 5x^4 - x),$$

$$U_3 = \frac{A_0 A_1 A_2}{16} \int_{-1}^{+1} (5x^7 - 7x^5 + 5x^3 - x) dx = \frac{A_0 A_1 A_2}{784} (9x^8 - 28x^6 + 30x^4 - 12x^2 + 1),$$

etc.

**XII. THÉORÈME.** — *La fonction  $X_n$  satisfait à l'équation*

$$B_p \int_{-1}^{+1} dx \int_{-1}^{+1} dx \dots \int_{-1}^{+1} X_n dx = (x^2 - 1)^p \frac{d^p X_n}{dx^p}; \dots \dots \dots (P)$$

$p$  désignant le nombre des intégrations.

Lorsque  $p=1$ , cette égalité se réduit à la formule (9). Voyons donc si, en partant de (N), nous pouvons conclure

$$B_{p+1} \int_{-1}^{+1} dx \int_{-1}^{+1} dx \int_{-1}^{+1} dx \dots \int_{-1}^{+1} X_n dx = (x^2 - 1)^{p+1} \frac{d^{p+1} X_n}{dx^{p+1}}; \dots \dots (13)$$

le nombre des intégrations étant, cette fois,  $p + 1$ .

En vertu de la relation (N), l'égalité (13) devient

$$\frac{B_{p+1}}{B_p} \int_{-1}^{+1} dx (x^2 - 1)^p \frac{d^p X_n}{dx^p} = (x^2 - 1)^{p+1} \frac{d^{p+1} X_n}{dx^{p+1}};$$

ou, si nous prenons les dérivées,

$$\frac{B_{p+1}}{B_p} (x^2 - 1)^p \frac{d^p X_n}{dx^p} = \frac{d \left[ (x^2 - 1)^{p+1} \frac{d^{p+1} X_n}{dx^{p+1}} \right]}{dx} \dots \dots \dots (14)$$

Cette égalité est identique avec (M), si l'on suppose

$$\frac{B_{p+1}}{B_p} = A_p; \dots \dots \dots (15)$$

la relation (N) est donc démontrée.

XIII. *Remarque.* — Si l'on fait abstraction d'un facteur numérique<sup>(\*)</sup>, on a

$$X_n = \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Donc l'égalité (P) peut être écrite ainsi :

$$B_p \cdot \frac{d^{n-p} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-p}} = (x^2 - 1)^p \frac{d^{n+p} (x^2 - 1)^n}{dx^{n+p}} \dots \dots \dots (Q)$$

En conséquence, on a la proposition suivante, énoncée par *M. Lucien Lévy*, dans le *Journal de M. de Longchamps* (1884, p. 71) :

XIV. THÉORÈME. — *Si l'on prend les dérivées successives de la fonction  $(x^2 - 1)^n$ , la dérivée d'ordre  $n - p$  est divisible, algébriquement, par la dérivée d'ordre  $n + p$  : le quotient égale  $(x^2 - 1)^p$  (\*\*).*

Liège, 1<sup>er</sup> décembre 1887.

## ADDITION.

XV. *Une sommation.* — On connaît, depuis longtemps, la somme de la série

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n + \dots \text{ (***)};$$

Mais il n'en est pas de même, peut-être, pour la quantité

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = S_n;$$

bien qu'il soit assez facile d'en trouver la valeur.

(\*) Il est commun aux deux membres de (N).

(\*\*) J'ignore comment M. L. Lévy est parvenu à cette remarquable proposition, qui complète mes recherches sur les fonctions  $X_n$ . On voit qu'elle résulte, fort simplement, de l'équation (9).

(\*\*\*) *Premier Mémoire*, p. 60.



On a, entre trois fonctions consécutives, la relation

$$X_n = \frac{dX_{n-1}}{dx} - 2x \frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx} \quad (*), \dots \dots \dots (16)$$

que l'on peut écrire sous ces formes successives :

$$\begin{aligned} X_n - 2(1-x) \frac{dX_n}{dx} &= \frac{dX_{n-1}}{dx} - 2 \frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx}, \\ \frac{X_n}{2\sqrt{1-x}} - \sqrt{1-x} \frac{dX_n}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \left[ \frac{dX_{n-1}}{dx} - 2 \frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx} \right], \\ \frac{d(X_n \sqrt{1-x})}{dx} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \left[ \frac{dX_{n-1}}{dx} - 2 \frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx} \right] &\dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

Si, après avoir multiplié par  $dx$ , on intègre, on a donc la *formule nouvelle* :

$$X_n \sqrt{1-x} + \frac{1}{2} \int \frac{\frac{dX_{n-1}}{dx} - 2 \frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx}}{\sqrt{1-x}} dx = 0 \quad (**) \dots \dots \dots (R)$$

**XVI. Suite.** — Dans cette relation générale, changeons  $n$  en  $n-1, n-2, \dots, 3, 2, 1$  ; puis ajoutons les résultats. Sous le signe d'intégration, tous les termes se détruisent, sauf trois d'entre eux (\*\*\*) . Donc, à cause de  $\frac{dx_1}{dx} = 1$  :

$$S_n = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \int \frac{1 + \frac{dX_n}{dx} - \frac{dX_{n+1}}{dx}}{\sqrt{1-x}} dx \dots \dots \dots (S)$$

Telle est la formule que nous nous proposons d'établir (IV).

(\*) BERTRAND, *Calcul différentiel*, p. 358.

(\*\*) Le premier terme s'annulant quand  $x=1$ , il en doit être de même du second. D'ailleurs, pour ne pas effectuer un changement de signe, nous prenons, comme *limite inférieure* de l'intégrale, le *maximum* de  $x$ .

(\*\*\*) On pourrait remplacer le numérateur par  $\Delta^2 \frac{dX_{n-1}}{dx}$  ; mais cette transformation ne serait qu'allonger le calcul, très simple, indiqué dans le texte.

(IV) Nous y sommes parvenu par un procédé très différent de celui-ci.

XVII. *Remarques.* — 1° On a

$$\int_1^{x^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x}.$$

Par conséquent,

$$1 + X_1 + \dots + X_n = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \int_1^{x^2} \frac{\frac{dX_n}{dx} - \frac{dX_{n+1}}{dx}}{\sqrt{1-x}} dx \dots \dots \dots (T)$$

2° Faisons croître  $n$  indéfiniment. La limite du premier membre est  $\frac{1}{\sqrt{2(1-x)}} (*)$ .

Donc

$$\lim \int_1^{x^2} \frac{\frac{dX_n}{dx} - \frac{dX_{n+1}}{dx}}{\sqrt{1-x}} dx = \sqrt{2}; \dots \dots \dots (U)$$

puis

$$\lim \left( \frac{dX_n}{dx} - \frac{dX_{n+1}}{dx} \right) = 0 (**). \dots \dots \dots (V)$$

En d'autres termes :

*La quantité*

$$\frac{[nX_{n-1} - (n+1)X_n] - [nX_n - (n+1)X_{n+1}]x}{1-x^2}$$

tend vers zéro quand  $n$  croît indéfiniment (\*\*\*) .

Cette proposition n'est pas évidente *a priori*.

(\*) *Premier Mémoire*, p. 60.

(\*\*) Généralement, si

$$F(x, \lambda) = \int_a^\lambda f(x, \lambda) dx,$$

on a

$$\lim F(x, \lambda) = \int_a^{x^2} \lim f(x, \lambda) dx;$$

les limites se rapportant au paramètre  $\lambda$ . Je crois inutile de démontrer ce Lemme connu.

(\*\*\*) Bien entendu,  $x$  est supposé différent de  $\pm 1$ .

XVIII. *Autre sommation.* — La formule (T) donne, immédiatement,

$$(n + 1)X_0 + nX_1 + \dots + X_n = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \int_x^1 \frac{\frac{dX_{n+1}}{dx}}{\sqrt{1-x}} dx; \dots \quad (\text{X})$$

formule plus simple que la première.

XIX. *Remarques.* — 1° Le premier membre est un polynôme entier, du degré  $n$ . Donc l'intégrale a la forme  $P_n\sqrt{1-x}$ ,  $P_n$  étant un polynôme entier.

2° Plus généralement,

$$\int_x^1 \frac{A_1 \frac{dX_1}{dx} + A_2 \frac{dX_2}{dx} + \dots + A_n \frac{dX_n}{dx}}{\sqrt{1-x}} dx = Q_{n-1}\sqrt{1-x}, \dots \quad (\text{Y})$$

$Q_{n-1}$  désignant un polynôme entier, du degré  $n-1$ .

XX. *Application.* — Soit  $Q_3 = x^3$ . On trouve :

$$A_1 = \frac{5}{5}, \quad A_2 = -\frac{1}{4}, \quad A_3 = \frac{2}{5}, \quad A_4 = \frac{1}{5};$$

puis

$$\int_x^1 \frac{\frac{5}{5} - \frac{1}{4} \frac{dX_2}{dx} + \frac{2}{5} \frac{dX_3}{dx} - \frac{1}{5} \frac{dX_4}{dx}}{\sqrt{1-x}} dx = x^3\sqrt{1-x},$$

ou

$$\int_x^1 \frac{5x^2 - \frac{7}{2}x^3}{\sqrt{1-x}} dx = x^3\sqrt{1-x};$$

ce qui est exact (\*).

Liège, 14 décembre 1887.

(\*) A propos de cette relation (Y), nous renvoyons aux dernières pages du *troisième Mémoire*.

NOUVELLES PROPRIÉTÉS  
DES FONCTIONS  $X_n$

(SUPPLÉMENT);

PAR

E. CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADEMIE.

---

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 3 mars 1888.)

---

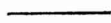
TOME XLVII.

1



## NOUVELLES PROPRIÉTÉS

# DES FONCTIONS $X_n$ .



XXI (\*). THÉORÈME. — Si les  $2p + 1$  inconnues  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$  satisfont, de toutes les manières possibles, à la condition

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = n, \quad \dots \dots \dots (18)$$

on a

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \overline{2p-1} \sum X_\alpha X_\beta \dots X_\lambda = \frac{d^p X_{n+p}}{dx^p} \quad \dots \dots \dots (A')$$

Cette propriété, généralisation du Théorème IX (*premier Mémoire*), se démontre comme celui-ci.

Soit, en effet, l'équation de définition :

$$(1 - 2zx + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty X_n z^n \quad \dots \dots \dots (19)$$

Si l'on prend les dérivées d'ordre  $p$ , elle donne

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \overline{2p-1} z^p (1 - 2zx + z^2)^{-\frac{2p+1}{2}} = \sum_0^\infty \frac{d^p X_n}{dx^p} z^n;$$

ou, en supposant  $n \geq p$  :

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \overline{2p-1} (1 - 2zx + z^2)^{-\frac{2p+1}{2}} = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{d^p X_n}{dx^p} z^{n-p};$$

(\*) Nous suivons l'ordre des paragraphes et des équations, adopté dans deux précédentes communications.

ou encore, en changeant  $n$  en  $n + p$  :

$$1 \cdot 5 \cdot 9 \dots \overline{2p-1} (1 - 2zx + z^2)^{-\frac{2p+1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{d^n X_{n+p}}{dx^n} z^n \dots \dots \dots (20)$$

Le premier membre égale

$$1 \cdot 5 \cdot 9 \dots \overline{2p-1} (X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \dots + X_\lambda z^\lambda + \dots)^{2p+1}.$$

Dans le développement de la puissance  $2p + 1$ , le coefficient de  $z^n$  est

$$\sum X_\alpha X_\beta \dots X_\lambda;$$

etc.

**XIII. Une modification.** La formule

$$X_n = \frac{2^{n+1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi (x \cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)^n d\varphi, \dots \dots \dots (21)$$

dans laquelle le second membre est supposé réduit à sa partie réelle (\*), peut être remplacée par celle-ci :

$$X_n = \frac{2^n}{\pi} \int_0^\pi \sin^n \varphi (x \sin \varphi + \sqrt{-1} \cos \varphi)^n d\varphi \dots \dots \dots (B')$$

En effet, si l'on développe la puissance  $n^{i\text{ème}}$  de  $x \sin \varphi + \sqrt{-1} \cos \varphi$ , les termes contenant des puissances *impaires* de  $\cos \varphi$  donneront des intégrales nulles; et les autres, des intégrales dont les éléments sont égaux, deux à deux; etc. (\*\*).

**XXIII. PROBLÈME.** — Évaluer  $\frac{d^q X_n}{dx^q}$ .

On a, immédiatement,

$$\frac{d^q X_n}{dx^q} = \frac{2^n}{\pi} n(n-1) \dots (n-q+1) \int_0^\pi \sin^{n+q} \varphi (x \sin \varphi + \sqrt{-1} \cos \varphi)^{n-q} d\varphi \dots \dots \dots (C')$$

(\*) *Premier Mémoire*, p. 12.

(\*\*) Cette formule (B'), que j'aurais dû trouver en 1875, me paraît bien préférable à celle de Jacobi. Malgré toutes mes recherches, j'ignore si elle est *nouvelle* (mai 1888).

**XXIV. Application.** — Si l'on prend  $q = p$ , et qu'on change  $n$  en  $n + p$ , on a

$$\frac{d^p X_{n+p}}{dx^p} = \frac{2^{n+p}}{\pi} (n+p)(n+p-1) \dots (n+1) \int_0^\pi \sin^{n+2p} \varphi (x \sin \varphi + \sqrt{-1} \cos \varphi)^n d\varphi. \quad (22)$$

Telle est la valeur du second membre de l'égalité (A').

**XXV. Remarque.** — On a aussi, par la formule (21) :

$$\frac{d^p X_{n+p}}{dx^p} = \frac{2^{n+p+1}}{\pi} (n+p)(n+p-1) \dots (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2p} (x \cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)^n d\varphi; \quad (23)$$

le second membre étant *réduit à sa partie réelle*.

**XXVI. THÉORÈME**

$$1 \cdot 5 \cdot 9 \dots 2p-1 \int_{-1}^{+1} dx \sum X_\alpha X_\beta \dots X_\gamma = \left[ \frac{d^{p-1} X_{n+p}}{dx^{p-1}} \right]_{-1}^{+1} \dots \dots \dots (D')$$

Si l'on multiplie par  $dx$  les deux membres de (A'), et qu'on intègre, on a la formule (D').

**XXVII. Remarque.** — Si  $n$  est *impair*, les éléments de l'intégrale sont, deux à deux, égaux et de signes contraires. Par conséquent,

$$\left[ \frac{d^{p-1} X_{n+p}}{dx^{p-1}} \right]_{-1}^{+1} = 0; \dots \dots \dots (24)$$

comme on le reconnaît directement (\*).

**XXVIII suite.** — Si  $n$  est *pair*,

$$\left[ \frac{d^{p-1} x_{n+p}}{dx^{p-1}} \right]_{-1}^{+1} = 2 \left[ \frac{d^{p-1} x_{n+p}}{dx^{p-1}} \right]_{(x=1)}$$

(\*) Tous les termes de la dérivée sont de même parité que  $2 + p - (p - 1) = n + 1$  : cette dérivée est donc une fonction *paire*.



Or, si l'on prend la formule (23), en y changeant  $p$  en  $p - 1$ ,  $n$  en  $n + 1$ , on a

$$\left[ \frac{d^{p-1} x_{n+p}}{dx^{p-1}} \right]_{(x=1)} = \frac{2^{n+p+1}}{\pi} (n+p)(n+p-1) \dots (n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2p-1} \varphi (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)^{n+1} d\varphi ;$$

ou, par la formule de Moivre :

$$\left[ \frac{d^{p-1} x_{n+p}}{dx^{p-1}} \right]_{(x=1)} = \frac{2^{n+p+1}}{\pi} (n+p)(n+p-1) \dots (n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2p-1} \varphi \cdot \cos(n+1) \varphi d\varphi. \quad (25)$$

Mais nous pouvons simplifier le second membre.

En effet,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n'} \varphi \cos(n' - 2p') \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{n'+1}} C_{n', p'} \quad (*) ;$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2p-1} \varphi \cos(n+1) \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{n+2p}} C_{n+2p-1, p-1} = \frac{\pi}{2^{n+2p}} \frac{\Gamma(n+2p)}{\Gamma(p)\Gamma(n+p+1)} ; \quad (26)$$

puis, au lieu de la formule (24) :

$$\left[ \frac{d^{p-1} X_{n+1}}{dx^{p-1}} \right]_{(x=1)} = \left( \frac{1}{2} \right)^{p-1} \frac{\Gamma(n+2p)}{\Gamma(p)\Gamma(n+2)} \dots \dots \dots (27)$$

La relation (D') devient donc finalement, si  $n$  est *pair*,

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \overline{2p-1} \int_{-1}^{+1} dx \sum X_\alpha X_\beta \dots X_\lambda = \left( \frac{1}{2} \right)^{p-2} \frac{\Gamma(n+2p)}{\Gamma(p)\Gamma(n+2)} \dots \dots (E')$$

**XXIX. Application.** — Soient  $p = 1$ ,  $n = 4$ . L'équation (18) est

$$\alpha + \beta + \gamma = 4.$$

(\*) Premier Mémoire, p. 14.

Si l'on néglige les solutions dans lesquelles on aurait :

$$\alpha > \beta + \gamma, \quad \text{ou} \quad \beta > \alpha + \gamma, \quad \text{ou} \quad \gamma > \alpha + \beta \quad (*);$$

on peut se contenter de prendre :

$$\begin{aligned} \alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 2; \quad \alpha = 2, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 2; \quad \alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 0; \\ \alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 2; \quad \alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 1; \quad \alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1. \end{aligned}$$

Dès lors, (E') se réduit à

$$\int_{-1}^{+1} [5X_2^2 + 5X_1^2 X_2] dx = 2;$$

c'est-à-dire, à

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(5x^2 - 1)(5x^2 - 1)}{2} dx = \frac{1}{5};$$

ce qui est exact.

**XXX. Une sommation.** — Si l'on suppose les deux membres de (A') ordonnés suivant les puissances décroissantes de  $x$ , le premier terme du second membre est (22)

$$\frac{2^{n+p+1}}{\pi} (n+p)(n+p-1) \dots (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2p} \varphi d\varphi,$$

ou (XXVIII) :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+p} \frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(n+1)} C_{2n+2p, n+p} x^n,$$

ou encore :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+p} \frac{\Gamma(2n+2p+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p+1)} x^n.$$

D'ailleurs, par la formule (24), le premier terme de  $X_n$  est

$$\frac{2^{n+1}}{\pi} x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \varphi d\varphi,$$

(\*) Les intégrales correspondantes sont nulles, en vertu d'un théorème de Jacobi.

ou

$$\left(\frac{x}{2}\right)^n C_{2n, n}.$$

De même, les premiers termes de  $X_\alpha, X_\beta, \dots, X_\lambda$  sont, respectivement :

$$\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha C_{2\alpha, \alpha}, \quad \left(\frac{x}{2}\right)^\beta C_{2\beta, \beta}, \quad \dots \quad \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda C_{2\lambda, \lambda}.$$

Par conséquent, l'égalité (A') donne celle-ci :

$$1.5.5 \dots \overline{2p-1} \sum C_{2\alpha, \alpha}, C_{2\beta, \beta}, \dots C_{2\lambda, \lambda} = \left(\frac{1}{2}\right)^p \frac{\Gamma(2n+2p+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p+1)};$$

ou, par une transformation connue (\*),

$$\sum C_{2\alpha, \alpha}, C_{2\beta, \beta}, \dots C_{2\lambda, \lambda} = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(2n+2p+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2p+1)\Gamma(n+p+1)}; \quad \dots \quad (F')$$

sommation annoncée.

**XXXI. Application.** — Soient  $n=3, p=1$ . Le second membre est

$$\frac{\Gamma(2)\Gamma(9)}{\Gamma(4)\Gamma(3)\Gamma(5)} = 140.$$

L'équation

$$\alpha + \beta + \gamma = 5$$

admet les solutions suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha=3, \beta=0, \gamma=0; & \quad \beta=3, \alpha=0, \gamma=0; \quad \gamma=3, \alpha=0, \beta=0; \\ \alpha=2, \beta=1, \gamma=0; & \quad \alpha=2, \beta=0, \gamma=1; \quad \beta=2, \alpha=1, \gamma=0; \\ \beta=2, \gamma=1, \alpha=0; & \quad \gamma=2, \alpha=1, \beta=0; \quad \gamma=2, \beta=1, \alpha=0; \\ \alpha=1, \beta=1, \gamma=1. & \end{aligned}$$

Donc le premier membre de (E') a pour valeur (\*\*):

$$5C_{6,3} + 6C_{4,2} \cdot C_{2,1} + [C_{2,1}]^3 = 5 \cdot 20 + 6 \cdot 6 \cdot 2 + 8 = 140.$$

(\*)  $2.6.10 \dots \overline{4p-2} = (p+1)(p+2) \dots 2p = \frac{\Gamma(2p+1)}{\Gamma(p+1)}$ .

(\*\*) On doit supposer  $C_{0,0} = 1$ .

XXXII. *Remarque.* — En opérant d'une manière un peu différente, on trouve

$$\sum C_{2\alpha, \alpha}, C_{2\beta, \beta}, \dots, C_{2\lambda, \lambda} = \frac{(4p+2)(4p+6)\dots(4p+4n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \quad (G')$$

Ainsi :

$$1^\circ \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(2n+2p+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2p+1)\Gamma(n+p+1)} = \frac{(4p+2)(4p+6)\dots(4p+4n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}; \quad (27)$$

2° *Le produit de n termes consécutifs, de la progression*

$$2, 6, 10, 14, 18, \dots$$

*est divisible par le produit des n premiers nombres entiers (\*)*.

XXXIII. *Autres remarques.* — 1° *Le nombre entier*

$$N = \frac{(4p+2)(4p+6)\dots(4p+4n-2)}{1 \cdot 2 \dots n}$$

*est pair.*

Dans le numérateur, composé de  $n$  facteurs, chacun d'eux est le *double d'un nombre impair* ; donc ce numérateur contient  $n$  fois le facteur 2.

Dans le dénominateur, le facteur 2 entre un nombre de fois marqué par

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$$

Or, cette somme est inférieure à  $n$  (\*\*).

2° *Si n est la somme de k puissances de 2, le quotient de N, par  $2^k$ , est impair (\*\*\*)*.

(\*) On a ainsi une solution (particulière) du problème suivant, peut-être bien difficile à résoudre généralement :

*Pour quelles valeurs entières de a et de b le produit*

$$(a+b)(a+2b)\dots(a+\overline{n-1}b)$$

*est-il divisible par le produit des n premiers nombres entiers ?*

(\*\*) *Mémoire sur certaines décompositions en carrés*, p. 64.

(\*\*\*) *Loc. cit.*

XXXIV. THÉORÈME. — *Le rapport des intégrales*

$$\int_0^\pi \sin^{n-\varphi} (x \sin \varphi + \sqrt{-1} \cos \varphi)^{n+\varphi} d\varphi, \quad \int_0^\pi \sin^{n+\varphi} (x \sin \varphi + \sqrt{-1} \cos \varphi)^{n-\varphi} d\varphi$$

est égal à  $(x^2 - 1)^q$ .

A cause de

$$X_n = k \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (*),$$

la relation (B') équivaut à

$$\frac{d^{n+\varphi} (x^2 - 1)^n}{dx^{n+\varphi}} = A \int_0^\pi \sin^{n+\varphi} (x \sin \varphi + \sqrt{-1} \cos \varphi)^{n-\varphi} d\varphi;$$

A étant indépendant de  $x$ .

De même,

$$\frac{d^{n-\varphi} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-\varphi}} = B \int_0^\pi \sin^{n-\varphi} (x \sin \varphi + \sqrt{-1} \cos \varphi)^{n+\varphi} d\varphi.$$

D'après un théorème démontré dans le dernier petit Mémoire (\*\*),

$$\frac{\int_0^\pi \sin^{n-\varphi} (x \sin \varphi + \sqrt{-1} \cos \varphi)^{n+\varphi} d\varphi}{\int_0^\pi \sin^{n+\varphi} (x \sin \varphi + \sqrt{-1} \cos \varphi)^{n-\varphi} d\varphi} = C (x^2 - 1)^q.$$

Mais, dans chacun des termes de la fraction, le coefficient de la plus haute puissance de  $x$  est  $\int_0^\pi \sin^{2n} \varphi d\varphi$ ; donc  $C = 1$ ; etc.

XXXV. COROLLAIRE. — *La partie réelle de*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)^{2n} d\varphi$$

(\*) Formule de Rodrigues.

(\*\*) Page 9.

égale

$$(x^2 - 1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\varphi d\varphi.$$

XXXVI. *Suite.* — Cette partie réelle, développée, devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx [x^{2n} \cos^{2n}\varphi - C_{2n,2} x^{2n-2} \cos^{2n-2}\varphi \sin^2\varphi + C_{2n,4} x^{2n-4} \cos^{2n-4}\varphi \sin^4\varphi - \dots],$$

ou

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} C_{2n,2\lambda} x^{2n-2\lambda} (-1)^\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2\lambda}\varphi \sin^{2\lambda}\varphi d\varphi;$$

c'est-à-dire

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} C_{2n,2\lambda} x^{2n-2\lambda} (-1)^\lambda \frac{\Gamma\left(n - \lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(n + 1)}.$$

L'intégrale qui multiplie  $(x^2 - 1)^n$  a pour valeur

$$\frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(n + 1)}.$$

Par conséquent,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} C_{2n,2\lambda} x^{2n-2\lambda} (-1)^\lambda \Gamma\left(n - \lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) &= (x^2 - 1)^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} C_{n,\lambda} x^{2n-2\lambda} (-1)^\lambda; \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

et, en identifiant :

$$C_{2n,2\lambda} \Gamma\left(n - \lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) = C_{n,\lambda} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) (*) \dots \dots (G')$$

(\*) Pour vérifier cette égalité, il suffit d'appliquer la formule de Legendre.

XXXVII. THÉORÈMES D'ARITHMÉTIQUE. — 1° Les nombres entiers

$$C_{2n, 2p}, C_{n, p}$$

contiennent, un même nombre de fois, le facteur 2 (\*).

2° Si  $n + 1$  est un nombre premier, supérieur à  $2p - 1$ , on a

$$\sum C_{2x, x}, C_{2\beta, \beta}, \dots, C_{2\gamma, \gamma} = 2\mathcal{N}(n + 1) \quad (**)$$

XXXVIII. PROBLÈME (\*\*\*) — Trouver

$$S = \sum_0^\infty C_{kn, n} x^n \quad (IV)$$

On a (XXVI)

$$C_{kn, n} = \frac{2}{\pi} 2^{kn} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{kn} \varphi \cos(kn - 2n)\varphi d\varphi;$$

donc

$$S = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sum_0^\infty 2^{kn} x^n \cos^{kn} \varphi \cos(kn - 2n)\varphi \quad (30)$$

La somme de la nouvelle série, que nous représenterons par  $\Sigma$  (v), est la partie réelle de

$$\frac{1}{1 - 2^k x \cos^k \varphi e^{(k-2)\varphi} v^{-1}} = \frac{1 - 2^k x \cos^k \varphi e^{-(k-2)\varphi} v^{-1}}{1 - 2^{k+1} x \cos^k \varphi \cos(k-2)\varphi + 4^k x^2 \cos^{2k} \varphi}$$

(\*) La démonstration *directe* est fort simple. Il en est de même pour cette généralisation remarquable, qui m'a été communiquée par M. Neuberg, mon savant Collègue :  $q$  étant premier, les quantités

$$C_{nq, pq}, C_{n, p}$$

contiennent, un même nombre de fois, le facteur  $q$ .

(\*\*) Ce que nous venons de dire s'applique à ce second théorème. Si l'on emploie la relation (E'), on reconnaît aisément que le second membre est divisible par  $n + 1$ .

(\*\*\*) Suggéré par ce qui précède.

(v) On verra, plus loin, quelles sont les conditions de convergence, pour  $k=1, k=2, k=3$ .

(v) Si l'on suppose  $2^k x > 1$ , cette série est divergente ou indéterminée. Si  $2^k x = 1$ , elle se réduit à

$$1 + \cos^k \varphi \cos(k-2)\varphi + \cos^{2k} \varphi \cos(2k-4)\varphi + \cos^{3k} \varphi \cos(3k-6)\varphi + \dots$$

Convergente pour  $\varphi > 0$ , celle-ci devient divergente quand  $\varphi = 0$ . Nous devons donc, dans ce qui suit, prendre  $x < \frac{1}{2^k}$ .

Ainsi

$$\Sigma = \frac{1 - 2^k x \cos^k \varphi \cos(k-2)\varphi}{1 - 2^{k+1} x \cos^k \varphi \cos(k-2)\varphi + 4^k x^2 \cos^{2k} \varphi} \dots \dots \dots (31)$$

XXXIX. *Discussion.* — 1°  $k = 1$ . Alors

$$\Sigma = \frac{\sin^2 \varphi + (1 - 2x) \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi + (1 - 2x)^2 \cos^2 \varphi};$$

puis

$$S = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi + (1 - 2x) \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi + (1 - 2x)^2 \cos^2 \varphi} d\varphi.$$

On sait que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{1}{a(a+b)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{1}{b(a+b)}.$$

Donc

$$S = \frac{1}{1-x} \dots \dots \dots (32)$$

La condition de convergence (\*) est, comme on vient de le voir,  $x < 1$ .  
 2°  $k = 2$ . La formule (31) donne

$$\Sigma = \frac{1 - 4x \cos^2 \varphi}{1 - 8x \cos^2 \varphi + 16x^2 \cos^4 \varphi} = \frac{1}{1 - 4x \cos^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \varphi + (1 - 4x) \cos^2 \varphi}.$$

Conséquemment,

$$S = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \left( x < \frac{1}{4} \right) (**) \dots \dots \dots (33)$$

(\*) Évidente *a priori*.

(\*\*) Lorsque  $k = 2$ , la série considérée est

$$S = 1 + \frac{2}{1} x + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

Or :

$$\frac{2}{1} = \frac{1}{2} \cdot 4, \quad \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} 4^2, \quad \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} 4^3, \dots$$

Ainsi :

$$S = 1 + \frac{1}{2}(4x) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}(4x)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}(4x)^3 + \dots;$$

et cette nouvelle série, quand elle est convergente, est le développement de  $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$  ; etc.



3°  $k = 3$ . On a

$$\Sigma = \frac{1 - 8x \cos^4 \varphi}{1 - 16x \cos^4 \varphi + 64x^2 \cos^8 \varphi};$$

ou, en faisant  $8x = z$  :

$$\Sigma = \frac{1 - z \cos^4 \varphi}{1 - 2z \cos^4 \varphi + z^2 \cos^8 \varphi} \dots \dots \dots (34)$$

Donc

$$S = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - z \cos^4 \varphi}{1 - 2z \cos^4 \varphi + z^2 \cos^8 \varphi} d\varphi; \dots \dots \dots (35)$$

expression sur laquelle nous allons revenir.

**XL. Suite.** —  $k$  étant égal à 3, la formule (29) devient

$$S = 1 + \frac{5}{4} x + \frac{6.5}{1.2} x^2 + \frac{9.8.7}{1.2.3} x^3 + \dots \dots \dots (36)$$

De

$$u_{n+1} = C_{3n, n} x^n, \dots \dots \dots (37)$$

on déduit

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(5n-1)(3n-2)}{2n(2n-1)} x; \dots \dots \dots (38)$$

puis,  $n$  croissant indéfiniment,

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{27}{4} x.$$

Par conséquent, la série (36) est convergente pour  $x < \frac{4}{27}$  (\*). Mais, dans la formule (35), on doit prendre  $z < 1$ .

Soit, par exemple,  $z = \frac{3}{8}$ , auquel cas

$$S = \frac{16}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8 - 5 \cos^4 \varphi}{64 - 48 \cos^4 \varphi + 9 \cos^8 \varphi} d\varphi = \frac{16}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8 - 5 \cos^4 \varphi}{(4 - 3 \cos^2 \varphi)(16 + 12 \cos^2 \varphi - 3 \cos^4 \varphi)} d\varphi.$$

(\*) Lorsque  $x = \frac{4}{27}$ , il y a doute. Mais la règle connue (Traité élémentaire des séries, p. 23), prouve qu'alors la série est divergente.

Si l'on fait, suivant l'usage,  $tg\varphi = t$ , on trouve

$$S = \frac{16}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{8t^4 + 16t^2 + 5}{(4t^2 + 1)(16t^4 + 44t^2 + 25)} dt,$$

ou

$$S = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{8t^4 + 16t^2 + 5}{(t^2 + \alpha^2)(t^2 + \beta^2)(t^2 + \gamma^2)} dt.$$

Dans cette formule :

$$\alpha^2 = \frac{1}{4}, \quad \beta^2 + \gamma^2 = \frac{11}{4}, \quad \beta^2\gamma^2 = \frac{25}{16};$$

puis :

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta + \gamma = \frac{1}{2}\sqrt{21}, \quad \beta\gamma = \frac{5}{4}.$$

On a ensuite (\*) :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{8t^4 + 16t^2 + 5}{(t^2 + \alpha^2)(t^2 + \beta^2)(t^2 + \gamma^2)} dt &= \frac{\pi}{2} \frac{5(\alpha + \beta + \gamma) + 16\alpha\beta\gamma + 8\alpha\beta\gamma[\alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma]}{\alpha\beta\gamma(\beta + \gamma)[\alpha^2 + (\beta + \gamma)\alpha + \beta\gamma]} \\ &= \frac{8\pi}{35} (7 + 3\sqrt{21}); \end{aligned}$$

et, finalement :

$$S = \frac{2}{35} (7 + 3\sqrt{21}) = 1,185\ 585 \dots$$

Telle est la somme de la série

$$1 + \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{64} + \frac{6.5}{1.2} \left(\frac{5}{64}\right)^2 + \frac{9.8.7}{1.2.3} \left(\frac{5}{64}\right)^3 + \dots (**)$$

(\*) POISSON, *Journal de Liouville*, tome II, p. 225.

(\*\*) En essayant une vérification, je trouve, comme somme des six premiers termes :

$$1 + 0,140\ 479 + 0,052\ 959 + 0,008\ 650 + 0,002\ 590 + 0,000\ 142;$$

savoir : 1,184 620. Cette valeur diffère, de S, de moins de 0,001. Ainsi, la série proposée est très convergente.

**XII. Une intégrale double.** — Dans le *second* (\*) *Mémoire sur les fonctions*  $x_n$ , nous avons démontré ce théorème (\*\*):  $n$  étant impair, et  $\Theta_n$  représentant ce que devient  $x_n$  quand on y remplace  $x$  par  $\cos \theta$ , on a :

$$X_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \Theta_n \left[ \frac{\sin(n+1)(\theta+\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)} + \frac{\sin(n+1)(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)} \right] d\theta \quad (***) \dots (39)$$

La formule

$$X_n = \frac{2^n}{\pi} \int_0^\pi \sin^n \varphi (\cos \alpha \sin \varphi + \sqrt{-1} \cos \varphi)^n d\varphi \dots (B')$$

donne

$$\Theta_n = \frac{2^n}{\pi} \int_0^\pi \sin^n \varphi (\cos \theta \sin \varphi + \sqrt{-1} \cos \varphi)^n d\varphi \dots (40)$$

Par conséquent, la relation (39) est transformée en celle-ci :

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^\pi \int_0^\pi \sin^n \varphi (\cos \theta \sin \varphi + \sqrt{-1} \cos \varphi)^n \left[ \frac{\sin(n+1)(\theta+\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)} + \frac{\sin(n+1)(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)} \right] d\varphi d\theta \\ & = 2\pi \int_0^\pi \sin^n \varphi (\cos \alpha \sin \varphi + \sqrt{-1} \cos \varphi)^n d\varphi, \end{aligned} \right\} (41)$$

qu'il serait, peut-être, difficile de vérifier (iv).

**XIII. Développement de  $X_{2n} - X_{4n}$ .** On sait que

$$X_{2n} = \frac{1}{4^n} \sum_{q=0}^{2n} (-1)^q C_{2n, q} \cdot C_{4n-2q, 2n} x^{2n-2q} \quad (v) \dots (42)$$

(\*) Devenu le *deuxième*.

(\*\*) Page 66.

(\*\*\*) On ne doit pas oublier que  $x = \cos \alpha$ .

(iv) Si, dans le premier membre, on suppose effectuée l'intégration relative à  $\theta$ , il prend la forme  $\int_0^\pi \sin^n \varphi f(\varphi) d\varphi$ . Est-il sûr que la fonction  $f(\varphi)$  soit égale à

$$2\pi (\cos \alpha \sin \varphi + \sqrt{-1} \cos \varphi)^n ?$$

Je ne le pense pas. Néanmoins, l'identification réussit quand  $n = 1$ .

(v) *Premier Mémoire*, p. 11.

Donc, par le changement de  $p$  en  $n - q$  :

$$X_{2n} = \frac{1}{4^n} \sum_{q=0}^{q=n} (-1)^{n-q} C_{2n, n-q} \cdot C_{2n+2q, 2q} x^{2q}, \quad X_{4n} = \frac{1}{16^n} \sum_{q=0}^{q=2n} (-1)^{2n-q} C_{4n, 2n-q} \cdot C_{4n+2q, 2q} x^{2q}. \quad (45)$$

On conclut, de ces valeurs,

$$16^n (X_{2n} - X_{4n}) = \sum_{q=0}^{q=2n} N_{2q} x^{2q}, \quad \dots \dots \dots (44)$$

en posant

$$N_{2q} = (-1)^{q+1} [4^n C_{2n, n-q} \cdot C_{2n+2q, 2q} \pm C_{4n, 2n-q} \cdot C_{4n+2q, 2q}]; \quad \dots \dots (45)$$

selon que  $n$  est *impair* ou *pair*.

La quantité entre parenthèses, développée, est

$$4^n \frac{2n(2n-1) \dots (n+q+1)}{1.2 \dots (n-q)} \times \frac{(2n+2q) \dots (2n+1)}{1.2 \dots 2q} \\ \pm \frac{4n(4n-1) \dots (2n+q+1)}{1.2 \dots (2n-q)} \times \frac{(4n+2q) \dots (4n+1)}{1.2 \dots 2q},$$

ou

$$\frac{1}{1.2 \dots 2q} \left[ 4^n \frac{(n+q+1)(n+q+2) \dots (2n+2q)}{1.2 \dots (n-q)} \pm \frac{(2n+q+1)(2n+q+2) \dots (4n+2q)}{1.2 \dots (2n-q)} \right].$$

Les deux numérateurs sont divisibles par

$$(2n+q+1)(2n+q+2) \dots (2n+2q).$$

Ainsi

$$N_{2q} = (-1)^{q+1} \frac{(2n+q+1)(2n+q+2) \dots (2n+2q)}{1.2 \dots 2q} \\ \times \left[ 4^n \frac{(n+q+1) \dots (2n+q)}{1.2 \dots (n-q)} \pm \frac{(2n+2q+1) \dots (4n+2q)}{1.2 \dots (2n-q)} \right],$$

ou

$$N_{2q} = (-1)^{q+1} \frac{(2n+q+1) \dots (2n+2q)}{1.2 \dots 2q \times 1.2 \dots (2n-q)} \Pi_{2q}, \quad \dots \dots (46)$$

pourvu que l'on fasse

$$\Pi_{2q} = 4^n (n+q+1) \dots (2n+q) \times (n-q+1)(n-q+2) \dots (2n-q) \pm (2n+2q+1) \dots (4n+2q). \quad (47)$$

Dans le dernier produit, les facteurs *pairs* sont :

$$2n + 2q + 2 = 2(n + q + 1), \quad 2n + 2q + 4 = 2(n + q + 2), \quad \dots \quad 4n + 2q = 2(2n + q)$$

De plus, il y en a  $n$ . Donc

$$H_{2q} = 2^n (n + q + 1)(n + q + 2) \dots (2n + q) \times \left[ (2n - 2q + 2)(2n - 2q + 4) \dots (4n - 2q) \pm (2n + 2q + 1)(2n + 2q + 3) \dots (4n + 2q - 1) \right] \quad (48)$$

puis

$$N_{2q} = (-1)^{q+1} 2^n \frac{(n + q + 1) \dots (2n + 2q)}{1 \cdot 2 \dots 2q \times 1 \cdot 2 \dots (2n - q)} \times \left[ (2n - 2q + 2)(2n - 2q + 4) \dots (4n - 2q) \pm (2n + 2q + 1)(2n + 2q + 3) \dots (4n + 2q - 1) \right] \quad (49)$$

**XLIII. LEMME.** — Soient  $a, b, c$  des nombres entiers, et

$$N = (a + c)(a + 2c) \dots (a + nc) \pm (b + c)(b + 2c) \dots (b + nc) \quad (*)$$

On a

$$N = \mathfrak{N} [a + b + (n + 1)c] \dots \dots \dots (50)$$

En effet, la seconde partie de  $N$  peut être mise sous la forme :

$$\pm [a + b + (n + 1)c - (a + nc)] [a + b + (n + 1)c - (a + \overline{n-1}c)] \dots [a + b + (n + 1)c - (a + c)].$$

Donc

$$N = (a + c)(a + 2c) \dots (a + nc) \pm \mathfrak{N} [a + b + (n + 1)c] - (a + nc)(a + \overline{n-1}c) \dots (a + c);$$

etc. (\*\*).

(\*) On prend le signe  $+$ , si  $n$  est *impair*.

(\*\*) La fonction  $N$ , rencontrée par hasard, suggère les questions suivantes :

1° *Discuter les cônes dont l'équation est*

$$(x + z)(x + 2z) \dots (x + nz) = (y + z)(y + 2z) \dots (y + nz);$$

2° *Discuter les lignes représentées par*

$$(x - 1)(x - 2) \dots (x - n) = (y - 1)(y - 2) \dots (y - n);$$

etc.

**XLIV. Application.** — Soient :

$$a + c = 2n - 2q + 2, \quad b + c = 2n + 2q + 1. \quad c = 2.$$

Alors, dans la formule (49), le dernier facteur est divisible par  $6n + 1$ .

**XLV. Remarque.** — D'après la première valeur de  $X_{2n}$  (43), le coefficient  $N_{2q}$  est entier. Si donc  $6n + 1$  est un nombre premier,

$$N_{2q} = \dots (6n + 1) (*)$$

**XLVI. Vérification.** — Soit  $n = 3$ , auquel cas  $6n + 1 = 19$ . On a, par la formule (45) :

$$\begin{aligned} N_0 &= -[64 \cdot C_{6,5} + C_{12,6}] = -[64 \cdot 20 + 924] = -2\,204 = -19 \cdot 116, \\ N_2 &= 64 \cdot C_{6,2} \cdot C_{8,2} + C_{12,5} \cdot C_{14,2} = 64 \cdot 15 \cdot 28 + 792 \cdot 91 = 98\,952 = 19 \cdot 5\,208, \\ N_4 &= -[64 \cdot C_{6,1} \cdot C_{10,4} + C_{12,4} \cdot C_{16,4}] = -[64 \cdot 6 \cdot 210 + 495 \cdot 1\,820] = -981\,540 = -19 \cdot 51\,660, \\ N_6 &= 64 \cdot C_{12,6} + C_{12,5} \cdot C_{18,6} = 64 \cdot 9 \cdot 4 + 220 \cdot 18\,564 = 4\,145\,216 = 19 \cdot 218\,064, \\ N_8 &= -C_{12,2} \cdot C_{20,8} = -66 \cdot 125\,970 = -19 \cdot 457\,580, \\ N_{10} &= C_{12,1} \cdot C_{22,10} = 12 \cdot 22 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 15 = 19 \cdot 408\,408, \\ N_{12} &= -C_{24,12} = -14 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 15 \cdot 46 = -19 \cdot 142\,524. \end{aligned}$$

**XLVII. Recherche d'un quotient.** — Reprenons l'égalité

$$16^n (X_{2n} - X_{4n}) = N_0 + N_2 x^2 + N_4 x^4 + \dots + N_{4n} x^{4n}. \quad (44)$$

Il en résulte :

$$16^n \frac{X_{2n} - X_{4n}}{1 - x^2} = N_0 + N_0 \left| \begin{array}{c} x^2 + N_0 \\ + N_2 \\ + N_4 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} x^2 + \dots + N_0 \\ + N_2 \\ \dots \\ + N_{4n-2} \end{array} \right| \left. \begin{array}{c} x_{4n-2} \\ \dots \\ \dots \end{array} \right. \quad (51)$$

(\*) En effet, ce nombre premier surpasse les facteurs  $2q$  et  $2n - q$ , du dénominateur.

Lorsque  $x = 1$ , la vraie valeur de la fraction est

$$-\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dX_{2n}}{dx} \right) - \left( \frac{dX_{4n}}{dx} \right) \right]_{(x=1)} ;$$

c'est-à-dire (\*) :

$$-\frac{1}{2} \left[ \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{4n(4n+1)}{2} \right] = \frac{1}{2} n(6n+1).$$

D'un autre côté, le dernier terme du quotient cherché doit être  $-N_{4n}x^{4n-2}$ .  
Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

**XLVIII. THÉOREME.** — *Les coefficients  $N_0, N_2, \dots, N_{4n}$  satisfont aux relations*

$$(2n)N_0 + (2n-1)N_2 + \dots + N_{4n-2} = \frac{1}{2} 16^n \cdot n(6n+1) \dots \dots \dots (52)$$

$$N_0 + N_2 + N_4 + \dots + N_{4n} = 0 \dots \dots \dots (55)$$

**XLIX. Vérification.** — Lorsque  $n = 3$ , la première égalité devient, après suppression du facteur 19 :

$$-116 \cdot 6 + 5208 \cdot 5 - 51660 \cdot 4 + 218064 \cdot 3 - 457580 \cdot 2 + 408408 \dots = \frac{5}{2} 16^3 ;$$

ce qui est exact.

De même, la seconde se réduit à

$$-116 + 5208 - 51660 + 218064 - 457580 + 408408 - 142524 = 0,$$

ou

$$-651680 + 651680 = 0.$$

**L. LEMME.** — *Soit  $f(x)$  un polynôme entier, du degré  $m$ . Si l'équation  $f(x) = 0$  a toutes ses racines réelles, l'équation  $f'^2 - ff'' = 0$  a toutes ses racines imaginaires (\*\*).*

(\*) *Premier Mémoire*, p. 19.

(\*\*) Propriété presque évidente. Dans le tome III des *Mélanges mathématiques*, nous y reviendrons.

II. COROLLAIRE. — *L'équation*

$$\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2 - X_n \frac{d^2 X_n}{dx^2} = 0, \dots \dots \dots (54)$$

dont le degré est  $2n - 2$ , n'a aucune racine réelle.

Soit, par exemple,  $n = 4$ , auquel cas :

$$X_4 = \frac{1}{8}(53x^4 - 30x^2 + 5), \quad X'_4 = \frac{20}{8}(7x^3 - 5x), \quad X''_4 = \frac{60}{8}(7x^2 - 1).$$

L'équation (54) devient

$$20(7x^3 - 5x)^2 - 5(53x^4 - 30x^2 + 5)(7x^2 - 1) = 0,$$

ou

$$245x^6 - 105x^4 + 27x^2 + 9 = 0;$$

et les racines de celle-ci sont imaginaires.

III. *Intégrale définie remarquable.* — Dans nos précédentes recherches sur les fonctions  $X_n$ , nous avons omis de mettre, sous forme d'intégrale définie, la quantité  $u = (1 - 2zx + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ , fonction génératrice de  $X_n$ . Le problème est facile à résoudre.

En effet, si l'on écrit, par exemple,

$$X_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x, \theta) d\theta; \dots \dots \dots (55)$$

on aura, par la sommation de la série

$$\left. \begin{aligned} & f_0(x, \theta) + zf_1(x, \theta) + z^2 f_2(x, \theta) + \dots, \\ u = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} S d\theta, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (56)$$

$S$  désignant la somme dont il s'agit. Seulement, la quantité  $f_n(x, \theta)$  doit être convenablement choisie.



La solution la plus simple résulte, croyons-nous, de la formule

$$X_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos \varphi)^n (x \cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)^n d\varphi, \quad \dots \quad (21)$$

dont nous avons déjà montré l'utilité.

Soit donc, en négligeant le facteur  $\frac{2}{\pi}$ ,

$$S = 1 + 2z \cos \varphi (x \cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) + (2z \cos \varphi)^2 (x \cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)^2 + \dots;$$

le second membre étant, bien entendu, réduit à sa partie réelle.

Opérant comme nous l'avons fait ci-dessus (XXXVI), on trouve

$$S = \frac{1}{1 - 2z \cos \varphi (x \cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)} = \frac{1 - 2zx \cos^2 \varphi}{(1 - 2zx \cos^2 \varphi)^2 + 4z^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi};$$

puis, au lieu de la formule (56) :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2zx \cos^2 \varphi}{(1 - 2zx \cos^2 \varphi)^2 + 4z^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2zx \cos^2 \varphi}{1 + 4(z - x)z \cos^2 \varphi + 4z^2(x^2 - 1) \cos^4 \varphi} d\varphi \quad \dots \quad (K')$$

Voici donc une intégrale définie qui satisfait à la question proposée (\*). Comme elle contient deux paramètres, on pourra, si l'on veut, en déduire des séries d'autres intégrales, plus ou moins remarquables.

(\*) La formule de Jacobi réussit moins bien. Il en est de même, à peu près, pour l'expression de  $X_n$ , donnée à la page 13 du *premier Mémoire*.

Dans la *Théorie des fonctions sphériques*, du regretté Heine, on trouve (T. I, p. 36), cette autre formule, plus simple que (K') :

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}} = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{zx - z \cos \varphi \sqrt{x^2 - 1} - 1}.$$

Tout récemment, M. Hermite m'en a donné une démonstration simple et élégante.

LIII. *Vérification.* — L'intégrale considérée est la même chose que

$$H = \int_0^{\infty} \frac{t^2 + 1 - 2zx}{(t^2 + 1)^2 + 4(z-x)(t^2 + 1)z + 4z^2(x^2 - 1)} dt. \dots \dots (57)$$

Si l'on suppose le dénominateur décomposé en  $(t^2 + \alpha^2)(t^2 + \beta^2)$ , on a :

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2 + 4(z-x)z, \quad \alpha^2\beta^2 = 1 + 4(z-x)z^2 + 4z^2(x^2 - 1) = (1 - 2zx)^2;$$

puis :

$$\alpha\beta = 1 - 2zx, \quad \alpha + \beta = 2\sqrt{1 - 2zx + z^2}.$$

La fraction étant remplacée par

$$\frac{A}{t^2 + \alpha^2} + \frac{B}{t^2 + \beta^2}, \dots \dots \dots (58)$$

on trouve, après une réduction facile :

$$A = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad B = \frac{\beta}{\alpha + \beta}.$$

Mais, évidemment,

$$H = \frac{\pi}{2} \left( \frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta} \right) = \frac{\pi}{\alpha + \beta} = \frac{\pi}{2\sqrt{1 - 2zx + z^2}}.$$

Donc le second membre de (K') égale  $\frac{1}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}}$ .

LIV. *Autre intégrale définie.* — Au moyen des abréviations précédentes, la formule (57) se réduit à

$$H = \int_0^{\infty} \frac{t^2 + \alpha\beta}{(t^2 + \alpha^2)(t^2 + \beta^2)} dt.$$

Par conséquent,

$$\frac{\pi}{\alpha + \beta} = \int_0^{\infty} \frac{t^2 + \alpha\beta}{(t^2 + \alpha^2)(t^2 + \beta^2)} dt. \dots \dots \dots (L')$$

Cette formule, presque évidente, en rappelle une autre, bien connue :

$$\frac{1}{\alpha + \beta} = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+\beta)x} dx.$$

IV. *Remarque.* — La relation (L') suppose  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ . Si l'on faisait d'autres hypothèses sur ces paramètres, on s'exposerait à de graves erreurs. Soit, par exemple,  $\beta = 0$ . On trouve

$$\frac{\pi}{\alpha} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + \alpha^2};$$

ce qui est *faux*. De même, pour  $\beta = -\alpha$ , l'égalité (L') devient

$$\frac{\pi}{0} = \int_0^{\infty} \frac{t^2 - \alpha^2}{(t^2 + \alpha^2)^2} dt;$$

etc. La raison de ces *irrégularités* est facile à saisir : dans les expressions (57) et suivantes, 1° la fraction  $\frac{t^2 + \alpha\beta}{(t^2 + \alpha^2)(t^2 + \beta^2)}$  a été supposée irréductible ; 2°  $\beta^2$  a été supposé différent de  $\alpha^2$ .

P. S. En terminant, je m'aperçois que la formule (K') donne lieu à une foule de *nouvelles* questions. Le lecteur pourra se les poser ; et, peut-être, en résoudre quelques-unes. Qu'il me permette de quitter un sujet sur lequel, depuis douze ans, j'ai publié bon nombre de travaux.

Liège, 29 février 1888.



THÉORIE

DES

MOUVEMENTS DIURNE, ANNUEL ET SÉCULAIRE

DE

L'AXE DU MONDE

*(suite et fin)*

par F. FOLIE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

---

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 5 janvier 1887.)

---

TOME XLVII.

1



**THÉORIE**  
DES  
**MOUVEMENTS DIURNE, ANNUEL ET SÉCULAIRE**  
DE  
**L'AXE DU MONDE**  
*(suite et fin).*

---

**CHAPITRE IV.**

*Des termes du second ordre de la nutation en obliquité et en longitude.*

59. Dans les articles précédents, nous avons intégré les équations du mouvement de l'axe du monde en nous conformant à la marche suivie par Laplace, Poisson et Peters, afin de pouvoir établir, sous la forme la plus simple, la comparaison de nos résultats avec les leurs, et nous avons trouvé néanmoins des différences assez notables entre nos coefficients et ceux qui se déduisent de leurs formules (art. 50).

Mais on peut, et l'on doit aujourd'hui (\*) les intégrer d'une manière plus rigoureuse. On trouvera ainsi des termes dont il n'est tenu aucun compte dans les formules usuelles, que nous appellerons termes du second ordre, et qui ne sont nullement insignifiants à côté de ceux dont il est très généralement fait usage.

Pour comparer nos formules à celles de nos prédécesseurs, nous avons, comme eux, considéré, dans l'intégration de nos formules différentielles,

(\*) Si Laplace ni Poisson ne l'ont fait, c'est parce qu'ils croyaient pouvoir s'en tenir aux dixièmes de seconde d'arc au plus. Mais les formules de Peters, qui a tenu compte des 0''.0001, sont à cet égard, comme on le verra, bien défectueuses.

l'obliquité de l'écliptique comme une constante, parce qu'elle n'est sujette qu'à une variation séculaire très faible et à une nutation qui peut à peine s'élever à  $10''$ .

Mais puisque les astronomes jugent à propos de conserver jusqu'aux  $0''.0001$  dans leurs formules, il n'est plus permis de négliger la nutation en obliquité dans aucun des termes qui sont des fonctions de cette obliquité.

Nous allons donc l'y introduire, mais en nous bornant aux deux premiers termes seulement de la nutation ; c'est-à-dire que, dans nos équations différentielles, nous allons remplacer l'obliquité vraie  $\theta$  par  $\theta_0 + \varepsilon$ ,  $\theta_0$  désignant l'obliquité moyenne, considérée comme constante, et  $\varepsilon$  la nutation en obliquité, que nous ferons égale à

$$(96). \quad \dots \dots \dots \varepsilon = N_1 \cos \Omega + N_2 \cos 2\odot,$$

$N_1$  représentant la constante de la nutation,  $9''.223$  et  $N_2$  la constante  $0''.54$ .

**60.** Commençons par nous occuper du terme qui donne la précession. Nous avons trouvé (64)

$$\sin \theta \frac{d\psi}{dt} = s_2 u_0 \frac{\mu - \sigma}{1 - \sigma} = -s_2 P,$$

$P$  désignant une constante.

En remplaçant  $\theta$  par  $\theta_0 + \varepsilon$ , cette équation devient :

$$\frac{d\psi}{dt} = -2P(c_1 - s_1 \varepsilon) = -2Pc_1(1 - t_1 N_1 \cos \Omega - t_1 N_2 \cos 2\odot).$$

Si nous faisons  $2Pc_1 = P_1$ , constante de la précession, nous aurons

$$(97). \quad \dots \dots \dots \Delta\psi = -P_1 t + \frac{t_1 P_1 N_1}{\omega_1} \sin \Omega + \frac{t_1 P_1 N_2}{2m_1} \sin 2\odot.$$

Le premier terme du second membre est la précession.

Les deux autres, qui rentrent dans la nutation, ont été négligés par tous les géomètres.

Représentons-les par  $\Delta^2\Psi$ , et calculons-en la valeur numérique; il viendra

$$(98) \dots \Delta^2\psi = -0''.002896 \sin \Omega + 0''.0000045 \sin 2\Omega.$$

Tels sont les termes du second ordre, qui proviennent de ce que l'on n'a pas tenu compte de la nutation en obliquité dans l'intégration du terme qui donne la précession.

**61.** Recherchons maintenant ceux qui proviennent de la même négligence commise dans la recherche des termes de la nutation elle-même.

Nous pourrions écrire d'abord, en vertu des formules précédentes (64), (66), (84) et (41) :

$$\frac{d\theta}{dt} = k_1 \cos \theta \sin \Omega - k_2 \sin \theta \sin 2\Omega,$$

$k_1$  et  $k_2$  désignant des constantes.

En remplaçant  $\theta$  par  $\theta_0 + \varepsilon$  et posant, comme plus haut, les sinus, cosinus, tangente et cotangente de l'obliquité ou du double de l'obliquité égaux à  $s_1, c_1, t_1, c'_1; s_2, c_2, t_2, c'_2$ , il viendra

$$\frac{d\theta}{dt} = k_1 c_1 (1 - t_1 \varepsilon) \sin \Omega - k_2 c_1 (t_1 + \varepsilon) \sin 2\Omega,$$

ou par (96) :

$$\begin{aligned} &= k_1 c_1 \sin \Omega - \frac{1}{2} k_1 s_1 [N_1 \sin 2\Omega + N_2 \sin (2\Omega + \Omega) - N_2 \sin (2\Omega - \Omega)] \\ &- k_2 s_1 \sin 2\Omega - \frac{1}{2} k_2 c_1 [N_1 \sin (2\Omega + \Omega) + N_1 \sin (2\Omega - \Omega) + N_2 \sin 4\Omega]. \end{aligned}$$

L'intégration donnera

$$\begin{aligned} \Delta\theta = & -\frac{k_1 c_1}{\omega_1} \cos \Omega + \frac{k_2 s_1}{2m_1} \sin 2\Omega + \frac{1}{2} k_1 s_1 \left[ \frac{N_1}{2\omega_1} \cos 2\Omega + \frac{N_2}{2m_1 + \omega_1} \cos (2\Omega + \Omega) - \frac{N_2}{2m_1 - \omega_1} \cos (2\Omega - \Omega) \right] \\ & + \frac{1}{2} k_2 c_1 \left[ \frac{N_1}{2m_1 + \omega_1} \cos (2\Omega + \Omega) + \frac{N_1}{2m_1 - \omega_1} \cos (2\Omega - \Omega) + \frac{N_2}{2m_1} \cos 4\Omega \right]. \end{aligned}$$



Les deux premiers termes de cette expression sont les termes connus de la nutation en obliquité; les autres sont ceux qui proviennent de ce que, dans notre formule, nous avons substitué l'obliquité vraie à l'obliquité moyenne; en les représentant par  $\Delta^2\theta$ , il vient :

$$\Delta^2\theta = \frac{1}{4} \frac{k_1 s_1 N_1}{\omega_1} \cos 2\Omega + \frac{1}{2} \frac{k_1 s_1 N_2 + k_2 c_1 N_1}{2m_1 + \omega_1} \cos(2\odot + \Omega) + \frac{1}{2} \frac{k_2 c_1 N_1 - k_1 s_1 N_2}{2m_1 - \omega_1} \cos(2\odot - \Omega) + \frac{1}{4} \frac{k_2 c_1}{m_1} N_2 \cos 4\odot.$$

Pour le calcul numérique de cette expression, on remarquera que

$$-\frac{k_1 c_1}{\omega_1} = N_1 = 9''.225, \quad \frac{k_2 s_1}{2m_1} = N_2 = 0''.34.$$

En l'effectuant on trouvera

$$(99) \quad \Delta^2\theta = -0''.000045 \cos 2\Omega + 0''.000055 \cos(2\odot + \Omega) + 0''.000050 \cos(2\odot - \Omega).$$

Tels sont les termes du second ordre en obliquité.

62. On trouverait de même, en longitude :

$$\frac{d\psi}{dt} = k_1 \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} \cos \Omega - k_2 \cos \theta \cos 2\odot,$$

et, en remplaçant  $\theta$  par  $\theta_0 + \varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= k_1 \frac{c_2 - 2s_2\varepsilon}{s_1 + c_1\varepsilon} \cos \Omega - k_2 c_1 (1 - t_1\varepsilon) \cos 2\odot \\ &= k_1 \frac{c_2}{s_1} [1 - (2t_2 + c'_1)\varepsilon] \cos \Omega - k_2 c_1 (1 - t_1\varepsilon) \cos 2\odot \\ &= \frac{k_1 c_2}{s_1} \cos \Omega - k_2 c_1 \cos 2\odot \\ &\quad - \frac{k_1}{s_1} c_2 (2t_2 + c'_1) \left[ N_1 \frac{1 + \cos 2\Omega}{2} + \frac{1}{2} N_2 \cos(2\odot + \Omega) + \frac{1}{2} N_2 \cos(2\odot - \Omega) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} k_2 s_1 [N_1 \cos(2\odot + \Omega) + N_1 \cos(2\odot - \Omega) + N_2 (1 + \cos 4\odot)]. \end{aligned}$$

Intégrant, et nous bornant immédiatement à écrire les termes du second ordre, représentés par  $\Delta^2\psi$ , nous trouverons

$$\begin{aligned} \Delta^2\psi = & -\frac{1}{2} k_1 \frac{c_2}{s_1} (2t_2 + c'_1) \left[ N_1 t + N_1 \frac{\sin 2\Omega}{2\omega_1} \right] + \frac{1}{2} k_2 s_1 N_2 t + \frac{1}{8} k_2 s_1 N_2 \frac{\sin 4\odot}{m_1} \\ & + \frac{1}{2} \left[ -\frac{k_1 c_2}{s_1} (2t_2 + c'_1) N_2 + k_2 s_1 N_1 \right] \left[ \frac{\sin(2\odot + \Omega)}{2m_1 + \omega_1} + \frac{\sin(2\odot - \Omega)}{2m_1 - \omega_1} \right]. \end{aligned}$$

Pour effectuer le calcul numérique, on pourra observer que  $-\frac{k_1 c_2}{s_1 \omega_1} = 17''.24$ ,  $\frac{k_2 c_1}{2m_1} = 1''.25$ , et l'on obtiendra

$$(100) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta^2\psi = & -0''.00057t + 0''.00087 \sin 2\Omega + 0''.00002154 \sin(2\odot + \Omega) \\ & + 0''.00001819 \sin(2\odot - \Omega) + 0''.00000055 \sin 4\odot. \end{aligned} \right.$$

Un premier résultat qui frappe dans cette expression, est l'existence d'un terme non périodique, qui doit rentrer dans la précession.

Ainsi, de même que l'introduction de l'obliquité vraie au lieu de l'obliquité moyenne nous a donné, dans le terme de la précession, des termes du second ordre rentrant dans la nutation, de même elle nous donne, dans les termes principaux de la nutation en longitude, des termes du second ordre qui rentrent dans celui de la précession.

Ce n'est pas qu'en théorie pure il en puisse être ainsi. La présence de ces derniers termes provient en effet de ce que nous avons écrit  $\sin \varepsilon = \varepsilon$ . Sans cette simplification, les termes proportionnels au temps seraient devenus des termes périodiques. Mais leur période serait tellement longue qu'en pratique ils pourront se réduire à la première partie de leur développement, laquelle est proportionnelle au temps.

**63.** En combinant ces termes du second ordre avec ceux que nous avons déjà trouvés précédemment comme complément du terme qui donne la précession (98), et reproduisant les termes du second ordre en obliquité (99), nous aurons enfin :

$$(101) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta^2\theta = & -0''.000045 \cos 2\Omega + 0''.000055 \cos(2\odot + \Omega) + 0''.00005 \cos(2\odot - \Omega), \\ \Delta^2\psi = & -0''.00057t - 0''.00290 \sin \Omega + 0''.00086 \sin 2\Omega. \end{aligned} \right.$$

Tels sont les termes qui ont été négligés dans les formules relatives au mouvement de rotation de la Terre, et particulièrement dans celles de Peters, dont tous les astronomes font usage.

Afin de leur permettre de substituer à ces formules les formules plus exactes qui résultent de nos recherches, nous donnerons à la fin de ce travail les expressions complètes du mouvement de l'axe du monde, telles qu'elles résultent de la combinaison de nos précédentes formules (\*) avec ces dernières (101), en les arrêtant toutefois aux termes vraiment utiles.

Il serait prématuré de donner dès à présent ces formules. On verra en effet que, si l'intérieur de la Terre est fluide, cette circonstance pourrait introduire de nouveaux termes dans les formules de la nutation annuelle.

---

(\*) Nous y adopterons les coefficients trouvés par M. le Dr Ubaghs, qui a poussé nos développements jusqu'à la 4<sup>e</sup> puissance de l'excentricité. (*Mémoires cour. et des sav. étrangers de l'Académie royale de Belgique*, in-4<sup>o</sup>, t. XLVII.)

## CHAPITRE V.

*Calcul des termes dus aux inégalités du sphéroïde terrestre.*

64. Dans les chapitres précédents de ce livre II, nous avons intégré les équations du mouvement de l'axe du monde, en considérant la Terre, au point de vue de l'action exercée sur elle par les astres attirants, comme un ellipsoïde de révolution.

Et de fait, nous pensons qu'aucun terme, sensible aux observations, ne peut provenir des inégalités du sphéroïde, dans le mouvement de l'axe de notre globe envisagé comme une masse solide.

Il n'en sera plus de même bien évidemment si, au lieu du mouvement de l'axe de la Terre, nous étudions, en lui-même, celui de l'axe de son écorce solide, abstraction faite du noyau fluide.

Or la nutation diurne, dont l'existence est aujourd'hui certaine (\*), prouve le fait d'une indépendance assez grande entre le mouvement de l'écorce et celui du noyau; et l'axe, dont nous avons à déterminer le mouvement, est bien celui de l'écorce que nous habitons, et non celui de son noyau fluide, ni leur axe résultant, qui nous sont tous deux inconnus.

Nous allons donc rechercher les équations du mouvement de l'axe de la croûte terrestre.

Et ici nous ne pourrions certes pas négliger les inégalités de l'écorce.

Il en est une, en particulier, dont nous aurons à tenir compte, mais dont il n'est même pas possible de fixer le sens à priori.

Si, comme nous le ferons, nous regardons l'aplatissement comme étant le même dans les deux hémisphères, il n'en est pas moins vrai que la gravitation doit être évidemment plus grande dans l'hémisphère boréal que dans l'hémisphère austral, à cause de la prédominance marquée des continents dans le premier.

(\*) *Comptes rendus*. Séance du 13 décembre 1886, et *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 3<sup>e</sup> série, t. XIII.

Mais, d'autre part, il est aussi très probable, et cela pour la même raison, que l'épaisseur de la croûte solide est plus considérable dans ce dernier hémisphère. En sorte que le moment d'inertie de chaque hémisphère est à la fois augmenté et diminué, sans que nous puissions savoir dans quel rapport, par la même circonstance.

Celle-ci aura, dans tous les cas, absolument le même effet qu'aurait un aplatissement plus considérable de l'un des deux hémisphères. Pour la dénommer, nous nous servirons donc du terme *différence d'aplatissement*, mais en y attachant le sens que nous venons d'y donner.

65. Nous aurions pu prendre, comme point de départ de cette analyse, les formules par lesquelles Serret a exprimé l'action du Soleil et celle de la Lune sur le sphéroïde terrestre, dans son beau mémoire intitulé : *Théorie du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité* (\*).

Pour rester, toutefois, fidèle au principe que nous avons adopté dans cet ouvrage, de permettre au lecteur de nous suivre, sans recourir à aucune source étrangère, nous rechercherons d'une façon sommaire les termes dont l'influence ne nous paraît pas négligeable dans les actions des astres attirants sur l'écorce solide du globe.

Soit  $L$  la masse de l'astre, supposée concentrée en son centre de gravité;  $x, y, z$  ses coordonnées;  $x_1, y_1, z_1$  celles d'un élément  $dm$  de l'écorce terrestre, rapportées toutes aux axes principaux de celle-ci.

La force attractive de l'astre  $L$  sur l'élément  $dm$  est, si nous prenons le coefficient de l'attraction égal à l'unité,  $\frac{Ldm}{\Delta^2}$ ,  $\Delta^2$  étant égal à

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Les composantes de cette force suivant les trois axes sont  $Ldm \frac{x - x_1}{\Delta^3}$ , etc. Ses moments :

$$\frac{Ldm}{\Delta^3} \{ (x - x_1)z_1 - (z - z_1)x_1 \} = Ldm \frac{xz_1 - zx_1}{\Delta^3}; \text{ etc.}$$

(\*) *Annales de l'Observatoire de Paris*, publié par Leverrier, t. V.

La somme de ces moments sera l'intégrale

$$L \sum \frac{xx_1 - zz_1}{\Delta^3} dm,$$

étendue à toute la masse de l'écorce solide du globe. Or,  $D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  désignant la distance des centres de gravité des deux corps, on a :

$$\frac{1}{\Delta^3} = \frac{1}{D^3} \left\{ \begin{array}{l} 1 + 3 \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{D^3} \\ + \frac{3}{2} \left[ 5 \frac{(xx_1 + yy_1 + zz_1)^2}{D^6} - \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{D^2} \right] \\ + \frac{5}{2} \left[ 7 \frac{(xx_1 + yy_1 + zz_1)^3}{D^9} - 5 \frac{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(xx_1 + yy_1 + zz_1)}{D^2} \right] \\ + \dots \end{array} \right\}.$$

L'intégrale  $L \sum \frac{xx_1 - zz_1}{\Delta^3} dm$  pourra se mettre sous la forme

$$5L \frac{xx}{D^5} \sum (z_1^2 - x_1^2) dm + \delta P = P + \delta P;$$

la quantité P étant celle qui produit les termes de la nutation annuelle et de la nutation diurne trouvés précédemment, et qui est représentée par cette même lettre dans l'article 2.

De même, l'intégrale  $L \sum \frac{yy_1 - zz_1}{\Delta^3} dm$  s'écrira  $Q + \delta Q$ .

**66.** Occupons-nous donc exclusivement du calcul de  $\delta P$ .

Dans ce calcul, nous nous bornerons aux termes qui ne renferment que la première puissance des coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , multipliée ou non par  $x^2$ ,  $y^2$  ou  $z^2$ , puisqu'ils sont les seuls, comme nous le verrons, qui puissent introduire des corrections appréciables dans les résultats fournis par les termes qui proviennent de P.

Nous nous abstiendrons, dans le développement, d'avoir égard aux termes qui seront multipliés par des expressions de la forme  $\sum x_1 dm$ , etc.,  $\sum x_1 z_1 dm$ , etc., puisque celles-ci sont nulles en vertu des propriétés du centre de gravité et des axes principaux d'inertie.

Ceci posé, nous pourrions nous borner à écrire, pour cette recherche :

$$\begin{aligned}
\frac{zx_1 - xz_1}{\Delta^3} &= \frac{5}{2} \frac{zx_1 - xz_1}{D^3} \left[ \frac{(xx_1 + yy_1 + zz_1)^2}{D^4} - \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{D^2} \right] \\
&= \frac{5}{2} \frac{zx_1 - xz_1}{D^3} \left[ 4y_1^2 - x_1^2 - z_1^2 + 5 \frac{x^2}{D^2} x_1^2 + 5 \frac{z^2}{D^2} z_1^2 - 5 \frac{x^2 + z^2}{D^2} y_1^2 + 10 \frac{xyx_1y_1 + xzx_1z_1 + yzy_1z_1}{D^2} \right] \\
&= \frac{5}{2} \frac{zx_1}{D^3} \left[ 4y_1^2 - x_1^2 - z_1^2 + 5 \frac{x^2}{D^2} (x_1^2 - y_1^2) + 5 \frac{z^2}{D^2} (z_1^2 - y_1^2 - 2x_1^2) \right] \\
&- \frac{5}{2} \frac{xz_1}{D^3} \left[ 4y_1^2 - x_1^2 - z_1^2 + 5 \frac{z^2}{D^2} (x_1^2 - y_1^2) + 5 \frac{x^2}{D^2} (x_1^2 - y_1^2 - 2z_1^2) \right] \\
&+ 15 \frac{x_1y_1z_1}{D^4} \frac{4}{D} \frac{x^2 - z^2}{D^2} + 15 \frac{y_1(x_1^2 - z_1^2)}{D^4} \frac{xyz}{D^3}.
\end{aligned}$$

On remarquera que la seconde parenthèse carrée se déduit de la première par la simple permutation des  $x$  et des  $z$ .

Or, celle-ci peut s'écrire

$$4y_1^2 - x_1^2 - z_1^2 + 5 \frac{x^2 + z^2}{D^2} (x_1^2 - y_1^2) + 5 \frac{z^2}{D^2} (x_1^2 - 5x_1^2),$$

ou bien, en remplaçant  $x^2 + z^2$  par  $D^2 - y^2$  :

$$-y_1^2 + 4x_1^2 - z_1^2 - 5 \frac{y^2}{D^2} (x_1^2 - y_1^2) + 5 \frac{z^2}{D^2} (x_1^2 - 5x_1^2)$$

d'où, prenant la demi-somme, on déduira aisément, pour la valeur de la première parenthèse :

$$\frac{1}{2} \left[ (5y_1^2 - 5x_1^2 - 2z_1^2) \left( 1 - 5 \frac{z^2}{D^2} \right) + 5 (x_1^2 - y_1^2) \frac{x^2 - y^2 - 2x^2}{D^2} \right]$$

et, par suite, pour celle de la seconde :

$$\frac{1}{2} \left[ (5y_1^2 + 5x_1^2 - 2z_1^2) \left( 1 - 5 \frac{x^2}{D^2} \right) + 5 (z_1^2 - y_1^2) \frac{z^2 - y^2 - 2z^2}{D^2} \right].$$

Si maintenant nous posons, en représentant par  $r$  le rayon équatorial moyen de la Terre :

$$(102) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma dx_i(5y_i^2 + 5z_i^2 - 2x_i^2) = A_1 r; \quad \Sigma dmy_i(5z_i^2 + 5x_i^2 - 2y_i^2) = B_1 r; \\ \Sigma dmz_i(5y_i^2 + 5x_i^2 - 2z_i^2) = C_1 r; \quad \Sigma dx_i(y_i^2 - z_i^2) = D_1 r; \\ \Sigma dmy_i(z_i^2 - x_i^2) = E_1 r; \quad \Sigma dmz_i(x_i^2 - y_i^2) = F_1 r; \quad \Sigma dx_i y_i z_i = G_1 r; \end{array} \right.$$

si, de plus, nous écrivons  $\frac{r}{D} = \varpi = \varpi_0 \frac{a}{D}$ ,  $a$  désignant la distance moyenne de l'astre,  $\varpi_0$  sa parallaxe, et si nous nous rappelons que nous avons posé  $P = (C - A)np$  et  $\frac{L}{a^3} = fm_1^2$  (art. 2), il viendra :

$$\begin{aligned} \delta p = f \frac{m_1^2}{n} \varpi_0 \left(\frac{a}{D}\right)^4 & \left\{ \frac{5}{4} \frac{C_1}{C-A} \left(\frac{x}{D} - 5 \frac{xx^2}{D^3}\right) - \frac{5}{4} \frac{A_1}{C-A} \left(\frac{z}{D} - 5 \frac{zx^2}{D^3}\right) + \frac{15}{4} \frac{F_1}{C-A} \frac{x}{D} \frac{x^2 - y^2 - 2z^2}{D^2} \right. \\ & \left. + \frac{15}{4} \frac{D_1}{C-A} \frac{z}{D} \frac{z^2 - y^2 - 2x^2}{D^2} + 15 \frac{G_1}{C-A} \frac{y}{D} \frac{x^2 - z^2}{D^2} + 15 \frac{E_1}{C-A} \frac{xyz}{D^3} \right\} (*). \end{aligned}$$

Nous avons vu ci-dessus (102) que  $\delta Q$  se tire de  $\delta P$  en écrivant  $y$  au lieu de  $x$  et en changeant le signe; mais pour passer de  $\delta p$  à  $\delta q$  on doit changer  $A$  en  $B$  et également changer le signe. On aura donc, mutatis mutandis :

$$\begin{aligned} \delta q = f \frac{m_1^2}{n} \varpi_0 \left(\frac{a}{D}\right)^4 & \left\{ \frac{5}{4} \frac{C_1}{C-B} \left(\frac{y}{D} - 5 \frac{yz^2}{D^3}\right) - \frac{5}{4} \frac{B_1}{C-B} \left(\frac{x}{D} - 5 \frac{zy^2}{D^3}\right) - \frac{15}{4} \frac{F_1}{C-B} \frac{y}{D} \frac{y^2 - x^2 - 2z^2}{D^2} \right. \\ & \left. - \frac{15}{4} \frac{E_1}{C-B} \frac{z}{D} \frac{z^2 - x^2 - 2y^2}{D^2} + 15 \frac{G_1}{C-B} \frac{x}{D} \frac{y^2 - z^2}{D^2} - 15 \frac{D_1}{C-B} \frac{xyz}{D^3} \right\}. \end{aligned}$$

67. Les équations du mouvement de rotation de l'écorce solide seront évidemment les mêmes que celles de l'article 2, si nous y remplaçons  $P$  par  $P + \delta P$ , ou  $p, \dots$  par  $p + \delta p, \dots$  et  $l, m$  par  $l + \delta l, m + \delta m \dots$

En continuant à regarder la vitesse angulaire  $n$  comme constante, ces équations pourront s'écrire :

$$\frac{dl + d\delta l}{dt} = -\frac{b}{A} n(m + \delta m + q + \delta q), \quad \frac{dm + d\delta m}{dt} = \frac{a}{B} (n(l + \delta l + p + \delta p)),$$

(\*). C'est par méprisé que Serret n'a que le facteur  $\left(\frac{a}{D}\right)^3$  dans son expression, au lieu de  $\left(\frac{a}{D}\right)^4$  qui figure dans la nôtre.



ou en comparant aux équations (1) :

$$\frac{d\delta l}{dt} = -\frac{b}{A} n(\delta m + \delta q), \quad \frac{d\delta m}{dt} = \frac{a}{B} n(\delta l + \delta p),$$

équations qui sont absolument de la même forme que les équations primitives (1), et qui pourront, par conséquent, s'intégrer exactement par la même méthode (art. 32).

Vu l'extrême petitesse de  $A_1, B_1, C_1 \dots$  nous n'aurons à conserver, dans les expressions finales de  $\delta p$  et  $\delta q$ , que les seuls termes qui ne renferment pas la longitude de l'astre, en nous bornant même à la première puissance de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite.

Or, avec cette dernière restriction,  $\left(\frac{a}{b}\right)^4$  se réduit (80) à  $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = 1 + 7e^2 + 4e_1 \cos(\lambda - \Gamma)$ , en posant, pour abrégé,  $e(1 + \frac{19}{4}e^2) = e_1$ .

Pour que les expressions qui seront multipliées par ce facteur donnent des termes indépendants de la longitude, nous ne devons y conserver que ceux qui dépendent de la simple longitude de l'astre.

C'est ce que nous ferons dans les développements suivants.

68. Nos formules précédentes (81) nous donnent :

$$\begin{aligned} \frac{x}{D} - 5 \frac{xz^2}{D^3} &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + c_1 - \frac{5}{4} s_1^2 (1 + 3c_1) \right\} \cos(\lambda - \varphi) + \frac{1}{2} \left\{ 1 - c_1 - \frac{5}{4} s_1^2 (1 - 3c_1) \right\} \\ &\quad \cos(\lambda + \varphi) - \frac{is_1}{4} (2 - 5s_1^2 + 10c_1^2) \{ \cos(\lambda - \Omega - \varphi) - \cos(\lambda - \Omega + \varphi) \} \\ &\quad + \frac{5}{8} is_1 \{ (s_1^2 - 2c_1 - 2c_1^2) \cos(\lambda + \Omega - \varphi) - (s_1^2 + 2c_1 - 2c_1^2) \cos(\lambda + \Omega + \varphi) \}. \end{aligned}$$

On en déduirait  $\frac{y}{D} - 5 \frac{yz^2}{D^3}$  en changeant  $\varphi$  en  $90^\circ + \varphi$ .

Quant aux termes en  $\frac{z}{D}$ , multipliés ou non par des termes du second ordre en  $x$  ou  $y$ , il est aisé de voir qu'ils ne donneront que des termes indépendants de  $\varphi$  ou renfermant  $2\varphi$ ; ces termes appartiendraient à la nutation diurne, et nous pouvons donc nous dispenser de les calculer.

A la rigueur, il y aurait lieu encore de tenir compte des termes de  $\delta p$  et de  $\delta q$  qui ont pour facteurs  $F_1$  et  $G_1$ .

Mais ces facteurs sont, pour la Terre, considérée comme un ellipsoïde solide, de l'ordre de l'aplatissement par rapport à  $A_1$ ,  $B_1$  et  $C_1$  (\*), qui sont déjà eux-mêmes très petits.

Quoique cette dernière conclusion ne soit peut-être pas absolument vraie pour l'écorce solide, il est bien probable que  $F_1$  et  $G_1$  resteront très petits vis-à-vis de  $C_1$ , et nous négligerons les termes qui en seront affectés.

On voit par là qu'il n'y a plus à considérer que le terme en  $C_1$  de  $\partial p$  et de  $\partial q$ .

Or, en désignant par  $E$  le facteur  $\frac{5}{2} \frac{m_1^2}{n} \frac{C_1}{C-A} e_1 \omega_0 f$ , dans lequel  $f$  est égal à l'unité pour le Soleil, il est manifeste que le développement de  $\frac{1}{E} \partial p$ , si nous n'y conservons que les termes indépendants de  $\lambda$ , se déduira de celui que nous venons de trouver pour  $\frac{x}{D} - 5 \frac{xz^2}{D^3}$ , par le changement de  $\lambda$  en  $\Gamma$ .

Nous l'écrivons pour abrégier :

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \partial p = & a_1 \cos(\Gamma - \varphi) + a_1' \cos(\Gamma + \varphi) - b_1 [\cos(\Gamma - \Omega - \varphi) - \cos(\Gamma - \Omega + \varphi)] \\ & - g_1 \cos(\Gamma + \Omega - \varphi) - g_1' \cos(\Gamma + \Omega + \varphi), \end{aligned}$$

d'où il résultera (98), en négligeant ici, pour éviter des complications superflues, la très petite différence qui existe entre  $A$  et  $B$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \partial q = & a_1 \sin(\Gamma - \varphi) - a_1' \sin(\Gamma + \varphi) - b_1 [\sin(\Gamma - \Omega - \varphi) + \sin(\Gamma - \Omega + \varphi)] \\ & - g_1 \sin(\Gamma + \Omega - \varphi) + g_1' \sin(\Gamma + \Omega + \varphi), \end{aligned}$$

où  $a_1 \dots$  désignent les doubles valeurs numériques des coefficients respectifs des termes en  $\cos(\lambda - \varphi) \dots$  dans le développement de  $\frac{x}{D} - 5 \frac{xz^2}{D^3}$  (97).

69. Il s'agit actuellement de trouver les variations  $\partial \theta$  et  $\partial \psi$ , que vont subir les quantités  $\Delta \theta$  et  $\Delta \psi$  précédemment trouvées, du chef de ces variations  $\partial p$  et  $\partial q$  de  $p$  et de  $q$ .

Or, de même qu'à l'article 30, nous pouvons affirmer que, si  $\partial p_1, \partial p_2 \dots$  désignent chacun des termes dont la somme forme  $\partial p$ ;  $l_1, l_2, \dots$  les valeurs

(\*) SERRET, Mémoire cité.

de  $l$  qui leur correspondent séparément, et ainsi des autres, et si l'on satisfait séparément à chacun des systèmes d'équations :

$$\frac{d\delta l}{dt} = -\frac{b}{A} n(\delta m_1 + \delta q_1); \quad \frac{d\delta m}{dt} = \frac{a}{B} n(\delta l_1 + \delta p_1);$$

.....

on aura

$$\delta l = \Sigma \delta l_1, \quad \delta m = \Sigma \delta m_1.$$

Écrivons maintenant

$$\delta p = \Sigma u_1 \cos(v_1 t \pm \varphi), \quad \delta q = \Sigma [\mp u_1 \sin(v_1 t \pm \varphi)],$$

ce qui est la forme générale des termes dont se composent  $\delta p$  et  $\delta q$ , et appliquons la méthode d'intégration que nous avons développée à l'art. 32, en considérant tout d'abord  $u_1$  comme constant (\*).

Nous trouverons, après avoir fait  $\frac{a}{B} = \frac{b}{A} = \mu$ , ce qui est permis ici, vu la petitesse des termes que nous obtiendrons :

$$(103). \quad \delta\theta = \Sigma \frac{u_1}{v_1} \frac{\mu}{1 + \mu \pm v_2} \sin v_1 t, \quad \sin \theta \delta\psi = \Sigma \left( \pm \frac{u_1}{v_1} \frac{\mu}{1 + \mu \pm v_2} \cos v_1 t \right),$$

formules dans lesquelles  $v_2$  représente, comme dans les chapitres précédents, le rapport  $\frac{v_2}{n}$ .

**70.** Dans l'application de ces formules, nous ajouterons entre eux les termes qui proviennent des actions du Soleil et de la Lune.

On voit qu'ils auront pour facteur commun la quantité  $\frac{3}{2} \frac{m_1^2}{n} \frac{C_1}{C-A}$  provenant de E, multipliée par  $\mu = \frac{C-A}{B}$ , ou  $\frac{3}{2} \frac{m_1^2}{n} \frac{C_1}{B}$  que nous ferons égale à F'.

(\*) Il est aisé de s'assurer que cette simplification n'aura, en pratique, aucune influence sur le résultat.

Nous accentuerons, comme ci-dessus, les quantités qui sont relatives à la Lune, et nous trouverons :

$$\frac{1}{F'} \delta\theta = a_1 \left[ \frac{e_1 \varpi_0}{\gamma_1} \frac{\sin \Gamma}{1 + \mu - \gamma_2} + f \frac{e_1' \varpi_0'}{\gamma_1'} \frac{\sin \Gamma'}{1 + \mu - \gamma_2'} \right] + a_1' \left[ \frac{e_1 \varpi_0}{\gamma_1} \frac{\sin \Gamma}{1 + \mu + \gamma_2} + f \frac{e_1' \varpi_0'}{\gamma_1'} \frac{\sin \Gamma'}{1 + \mu + \gamma_2'} \right] \\ + f e_1' \varpi_0' \left\{ \frac{b_1}{\gamma_1' - \omega_1} \left[ \frac{1}{1 + \mu + \gamma_2' - \omega_2} - \frac{1}{1 + \mu - \gamma_2' + \omega_2} \right] \sin(\Gamma' - \Omega) \right. \\ \left. - \frac{f e_1' \omega_0'}{\gamma_1' + \omega_1} \left[ \frac{g_1}{1 + \mu - \gamma_2' - \omega_2} + \frac{g_1'}{1 + \mu + \gamma_2' + \omega_2} \right] \sin(\Gamma' + \Omega) \right\}$$

et

$$\frac{1}{F'} \sin \theta \delta\psi = -a_1 \left[ \frac{e_1 \varpi_0}{\gamma_1} \frac{\cos \Gamma}{1 + \mu - \gamma_2} + f \frac{e_1' \varpi_0'}{\gamma_1'} \frac{\cos \Gamma'}{1 + \mu - \gamma_2'} \right] + a_1' \left[ \frac{e_1 \varpi_0}{\gamma_1} \frac{\cos \Gamma}{1 + \mu + \gamma_2} + f \frac{e_1' \varpi_0'}{\gamma_1'} \frac{\cos \Gamma'}{1 + \mu + \gamma_2'} \right] \\ + f e_1' \varpi_0' \left\{ \frac{b_1}{\gamma_1' - \omega_1} \left[ \frac{1}{1 + \mu + \gamma_2' - \omega_2} + \frac{1}{1 + \mu - \gamma_2' + \omega_2} \right] \cos(\Gamma' - \Omega) \right. \\ \left. + \frac{f e_1' \omega_0'}{\gamma_1' + \omega_1} \left[ \frac{g_1}{1 + \mu - \gamma_2' - \omega_2} - \frac{g_1'}{1 + \mu + \gamma_2' + \omega_2} \right] \cos(\Gamma' + \Omega) \right\}.$$

Dans ces termes, qui sont tous très petits, nous pourrions, sans erreur appréciable, négliger  $\gamma_2$ ,  $\gamma_2'$  et  $\omega_2$  vis-à-vis de l'unité. Le dénominateur  $1 + \mu$  deviendra alors commun à tous ces termes, et, si nous écrivons  $\frac{F'}{1 + \mu}$  ou  $\frac{F'}{1.0055} = F$ , et que nous remplacions les coefficients  $a_1 \dots$  par leurs valeurs numériques, déduites des données de l'article 51, il viendra, pour l'expression des variations produites par l'action de la Lune :

$$\frac{1}{F e_1' \varpi_0'} \delta\theta = \frac{1.1757 + 0.4299}{\gamma_1'} \sin \Gamma' - \frac{0.1505 + 0.0159}{\gamma_1' + \omega_1} \sin(\Gamma' + \Omega),$$

le terme en  $\Gamma' - \Omega$  ayant un coefficient tout à fait insensible; et

$$(104). \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{F e_1' \varpi_0'} \sin \theta \delta\psi &= \frac{-1.1757 + 0.4299}{\gamma_1'} \cos \Gamma' + 2 \frac{0.17246}{\gamma_1' - \omega_1} \cos(\Gamma' - \Omega) \\ &+ \frac{0.1505 - 0.0159}{\gamma_1' + \omega_1} \cos(\Gamma' + \Omega); \end{aligned} \right.$$

ou enfin, en calculant les valeurs numériques de ces coefficients et en

écrivait, au lieu de ceux-ci, leurs logarithmes, pour la facilité du calcul :

$$\frac{1}{F/e_1\varpi_0'} \partial\theta = [0.55275] \sin \Gamma' - [9.64465] \sin(\Gamma' + \Omega),$$

$$\frac{1}{F/e_1\varpi_0'} \sin \theta \partial\varphi = [0.02009] \cos \Gamma' + [9.51844] \sin(\Gamma' - \Omega) + [9.56420] \cos(\Gamma' + \Omega).$$

Enfin, si l'on exprime les coefficients qui entrent dans les premiers membres en fonction de la quantité  $\frac{C_1}{B}$ , représentée par  $\nu$ , on trouvera, en admettant pour la constante de la parallaxe lunaire la valeur  $\varpi_0'$ ,

$$(105) \left\{ \begin{array}{l} \partial\theta = \nu[1.58050] \sin \Gamma' - \nu[0.67222] \sin(\Gamma' + \Omega) \\ s_1 \partial\psi = -\nu[1.04866] \cos \Gamma' + \nu[0.54601] \cos(\Gamma' - \Omega) + \nu[0.59177] \cos(\Gamma' + \Omega) \quad (*) \end{array} \right.$$

En faisant usage de cette dernière formule, on ne doit pas oublier que nous avons compté  $\Psi$  dans le sens direct.

71. L'action du Soleil produira les variations suivantes, qui, à cause de la longueur excessive de leur période, ne devront pas rentrer, comme les précédentes, dans les termes de la nutation annuelle : en premier lieu, une variation séculaire de l'obliquité  $\partial\theta$  donnée par

$$(106) \dots \dots \dots \frac{1}{F e_1 \varpi_0} \partial\theta = \frac{1.6056}{\gamma_1} \sin \Gamma = [3.72824] \sin \Gamma;$$

en second lieu, une variation en longitude, que nous devons considérer comme une variation séculaire de la constante de la précession :

$$(107) \dots \dots \dots \frac{1}{F e_1 \varpi_0} \sin \theta \partial\psi = -\frac{0.7458}{\gamma_1} \cos \Gamma = -[3.59560] \cos \Gamma (**).$$

(\*) Nous avons, comme on le voit, considéré ici  $\sin \theta$  comme une quantité constante dans l'intégration ; à cause de la valeur très petite de  $F$ , cette simplification n'est pas de nature à altérer le résultat d'une manière qui pourrait être sensible à l'observation.

(\*\*) Pour l'époque 1850.0, les coefficients numériques des formules (99) deviendraient :

$$[1.58279] \text{ et } [0.67562], \quad [1.04945], \quad [0.54742] \text{ et } [0.59520].$$

72. On voit que le rapport des termes qui dépendent respectivement du périhélie du Soleil et de celui de la Lune est une fraction qui approche de 0.4.

Il est en effet égal à

$$\frac{e_1 \varpi_0 \gamma_1'}{e_1' \varpi_0' \gamma_1} = [9.3951] = 0.592.$$

Si donc les termes qui dépendent du périhélie de la Lune ne sont pas négligeables (et nous pensons que tel est, en effet, le cas) on ne peut pas négliger non plus ceux qui dépendent du périhélie du Soleil.

Comme leur période est extrêmement longue, il sera utile de rechercher les variations qui en résultent, en obliquité et en longitude, pendant un nombre d'années assez peu considérable relativement à cette période.

Écrivons les deux équations précédentes, pour abrégé, sous la forme :

$$\delta\theta = \frac{x}{\gamma_1} \sin \Gamma \quad \text{et} \quad \sin \theta \delta\psi = -\frac{x'}{\gamma_1} \cos \Gamma,$$

ou, en faisant abstraction des constantes, qui rentrent dans les valeurs initiales de  $\theta$  et de  $\psi$

$$(108) \quad \delta\theta = x \cos \Gamma_0 \cdot t - \frac{1}{2} x \gamma_1 \sin \Gamma_0 t^2; \quad s_1 \delta\psi = x' \sin \Gamma_0 t + \frac{1}{2} x' \gamma_1 \cos \Gamma_0 t^2.$$

Telles sont les variations en obliquité et en longitude qui proviennent de la différence d'aplatissement et qui, à cause de la longueur de leur période, ne doivent pas être considérées comme des termes de nutation.

Vu la petitesse des facteurs  $x$  et  $x'$ , ces termes seront probablement très peu importants.

S'il n'en était pas ainsi, il y aurait dans l'obliquité un terme proportionnel au temps; et quant à la variation en longitude, elle se compose de deux parties, l'une  $\frac{x'}{s_1} \sin \Gamma_0 \cdot t$  qui rentre dans la précession; l'autre qui en est une variation séculaire. En sorte que si nous désignons par  $P_0$  la constante de la précession luni-solaire trouvée ci-dessus, par  $P$  l'expression complète de cette précession (abstraction faite des variations séculaires dont il va être question), on aura :

$$(109) \quad P = P_0 + \frac{x}{s_1} \sin \Gamma_0 + \frac{1}{2} x' \gamma_1 \cos \Gamma_0 \cdot t.$$

Les quantités  $\alpha$  et  $\alpha'$ , qui renferment en facteur la parallaxe du Soleil, sont tellement petites qu'il n'est pas possible de les déterminer par les observations. Si l'on veut faire usage des observations modernes, l'intervalle de temps  $t$  sera trop peu considérable, et quant aux observations anciennes de l'obliquité, elles sont trop peu précises pour qu'on puisse en déduire avec quelque assurance le facteur  $\alpha$ .

Mais on pourra, sans doute, au moyen de bonnes observations bien réduites de circompolaires, déterminer le facteur  $\nu$  qui entre dans les termes des formules (105) dépendants du périégée de la Lune.

Et de ce facteur se déduiront aisément les valeurs de ceux des formules (108).

## LIVRE III.

### LA NUTATION SÉCULAIRE.

---

#### CHAPITRE I.

*Des variations liées à la variation d'excentricité.*

73. Ce dernier Livre traitera des variations séculaires proprement dites de l'axe du monde.

Le titre de nutation séculaire qu'il porte sera justifié par la détermination de l'orbite elliptique, à grand axe variable, que le pôle moyen décrit autour du pôle fixe dans une période de 30000 ans environ.

La recherche de cette orbite exige que la nutation séculaire, tant en obliquité qu'en longitude, puisse s'exprimer, comme la nutation diurne et la nutation annuelle, par des fonctions périodiques.

Au surplus, les formules usitées, qui développent les variations séculaires suivant les puissances du temps, sont devenues fort insuffisantes, non seulement pour de longues périodes, auxquelles elles ne sont nullement applicables, mais peut-être même pour un intervalle de temps de quelques siècles à peine, à cause du degré de précision auquel atteignent les observations modernes.

On verra que la méthode d'intégration que nous avons exposée dans les deux Livres qui précèdent, pour la recherche de la nutation diurne et de la nutation annuelle, peut s'appliquer également à la recherche de la nutation séculaire.

Les résultats auxquels nous arriverons, développés suivant les puissances du temps, concorderont, à de très petites quantités près, qui ne sont cepen-



dant pas négligeables, avec les formules usitées, et la comparaison des valeurs de l'obliquité, dans les temps reculés, avec les résultats déduits de nos formules et de celles des géomètres, montrera la supériorité des premières, même sur celle de Laplace, qui renferme cependant aussi des fonctions périodiques du temps.

74. Occupons-nous d'abord des variations séculaires qui sont liées à la variation d'excentricité de l'orbite terrestre.

Si, dans l'expression de  $p$  donnée à l'article 47, nous posons  $e = e_0 + e_1 t$ , et que nous nous arrêtons à la première puissance des quantités  $e_1$  et  $t$ , le seul terme complémentaire de  $p$  sera pour le Soleil,

$$\delta p = \frac{5}{4} h s_2 e_1 t \sin \varphi,$$

d'où

$$(110). \dots \dots \delta q = \frac{5}{4} h s_2 e_1 t \cos \varphi$$

que nous écrirons

$$\begin{cases} \delta p = \alpha \varphi \sin \varphi, \\ \delta q = \alpha \varphi \cos \varphi. \end{cases}$$

Posons

$$l = h_1 \varphi \sin \varphi + k_1 \cos \varphi + \Phi',$$

$\Phi'$  étant la dérivée, prise par rapport à  $\varphi$ , d'une fonction  $\Phi$  de cette variable; et substituons dans la seconde des équations (1)

$$\frac{dl}{dt} = -n\mu(m + q), \quad \frac{dm}{dt} = n\mu(l + p),$$

dans lesquelles nous ferons ici

$$\frac{a}{B} = \frac{b}{A} = \mu;$$

il viendra :

$$\frac{dm}{dt} = n\mu[(h_1 + \alpha)\varphi \sin \varphi + k_1 \cos \varphi + \Phi']$$

et en intégrant :

$$m = \mu[-(h_1 + \alpha)(\varphi \cos \varphi - \sin \varphi) - k_1 \sin \varphi + \Phi].$$

Cette expression, portée dans la première équation (1), donne

$$\frac{dl}{d\varphi} = -\mu^2 [-(h_1 + \alpha)(\varphi \cos \varphi - \sin \varphi) - k_1 \sin \varphi + \Phi] - \mu \alpha \varphi \cos \varphi.$$

Identifiant avec

$$\frac{dl}{d\varphi} = h_1 \varphi \cos \varphi + (h_1 - k_1) \sin \varphi + \Phi''$$

on aura :

$$\mu^2(h_1 + \alpha) - \mu \alpha - h_1 = 0, \quad \mu^2(h_1 + \alpha) + \mu^2 k_1 - (h_1 - k_1) = 0, \quad \Phi'' + \mu^2 \varphi = 0$$

De cette dernière équation on déduit :

$$\Phi = \alpha_1 \sin(\mu \varphi + \xi),$$

expression qui rentre dans les termes précédemment trouvés, et renfermant les constantes arbitraires.

Des deux autres on tire

$$h_1 = -\frac{\alpha \mu}{1 + \mu}, \quad k_1 = h_1 \frac{1 - \mu}{1 + \mu^2}, \quad h_1 + \alpha = \frac{\alpha}{1 + \mu} = -\frac{h_1}{\mu};$$

et par là  $l$  et  $m$  deviennent :

$$l = h_1 \left\{ \varphi \sin \varphi + \frac{1 - \mu}{1 + \mu^2} \cos \varphi \right\}, \quad m = h_1 \left\{ \varphi \cos \varphi - \frac{1 + \mu}{1 + \mu^2} \sin \varphi \right\}.$$

Les équations (11) donneront alors

$$\frac{d\theta}{dt} = -h_1 \frac{(1 - \mu) \cos^2 \varphi + (1 + \mu) \sin^2 \varphi}{1 + \mu^2} = -h_1 \frac{1 - \mu \cos^2 \varphi}{1 + \mu^2}$$

$$\sin \theta \frac{d\psi}{dt} = h_1 \varphi - \frac{\mu}{1 + \mu^2} \sin 2\varphi.$$

Intégrons, en faisant abstraction des termes qui rentrent dans la nutation diurne, nous aurons :

$$(111). \quad \delta\theta = -\frac{h_1 \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{1 + \mu^2} t = -\frac{\alpha \mu \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{(1 + \mu)(1 + \mu^2)} t = -\frac{5}{4} \frac{hs_2 e_1 \mu \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{n(1 + \mu)(1 + \mu^2)} t.$$

$$\sin \theta \delta\psi = \frac{1}{2} h_1 n t^2 = -\frac{1}{2} n \frac{\alpha \mu}{1 + \mu} t^2 = -\frac{5}{8} \frac{hs_2 e_1 \mu}{1 + \mu} t^2.$$

ou puisque  $s_2 = \sin 2\theta_0$  :

$$(111^{bis}) \dots \dots \delta\psi = -\frac{3}{4} \frac{hc_1 e_1 \mu}{1 + \mu} t^2.$$

75. L'action de la Lune produirait des variations dont la forme serait absolument la même, à part le changement de  $e$  en  $e'$  et de  $h$  en  $h'$ ; en recourant à l'expression  $p$  de l'article 47, on verrait immédiatement que  $h' = f'h$ ,  $f'$  étant égal à  $f(1 - \frac{5}{3}i^2)$ .

En sorte que, si nous remplaçons, dans les formules précédentes (111) et (111<sup>bis</sup>),  $h$  par  $h(1 + f')$ , nous aurons les expressions complètes des variations qui sont liées à celle de l'excentricité de l'orbite terrestre.

La dernière expression, ainsi réduite en nombres, devient :

$$(112) \dots \dots \delta\psi = -0'' 00001946 t^2.$$

Il en résulte que celle de  $\delta\theta$  sera

$$\delta\theta = -0'' 000000021 t.$$

On peut donc considérer la variation d'obliquité, due à celle de l'excentricité de l'orbite terrestre, comme absolument négligeable.

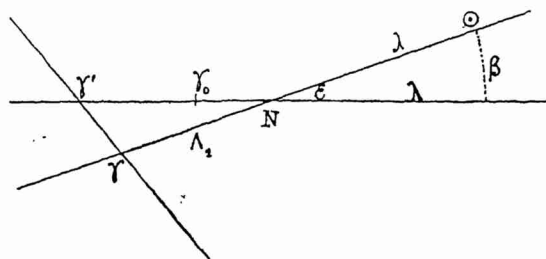
CHAPITRE II.

*Des variations séculaires dues au mouvement de l'écliptique.*

76. Jusqu'à présent le plan de l'écliptique a été considéré comme fixe. Ayons égard maintenant à son mouvement séculaire.

Soient  $\gamma_0$  et  $\gamma_0\gamma'$  l'équinoxe et l'écliptique fixes;  $\gamma'\gamma$  et  $\gamma N$  l'équateur moyen et l'écliptique vraie au temps  $t$ .

$\beta$ ,  $\lambda$ ,  $\Lambda$  désigneront respectivement la latitude et la longitude du Soleil, ainsi que la longitude du nœud ascendant  $N$  de l'écliptique vraie, rapportées à l'écliptique fixe;  $l$  la différence  $\lambda - \Lambda$ ,  $\Lambda_1$  la longitude du nœud comptée sur l'écliptique vraie;  $\epsilon$  et  $\theta$  les inclinaisons de ce dernier plan sur l'écliptique fixe et sur l'équateur.



naisons de ce dernier plan sur l'écliptique fixe et sur l'équateur.

Nous aurons à former, comme précédemment, le produit  $\frac{4xz}{D^2} \left(\frac{a}{D}\right)^2$ , dans lequel  $\frac{x}{D}$  et  $\frac{z}{D}$  s'expriment au moyen de  $\beta$  et de  $\lambda$ .

Il s'agit donc de trouver ces dernières quantités en fonction de la longitude vraie  $\lambda$  du Soleil, et des quantités  $\Lambda$ ,  $\psi$  et  $\epsilon$ .

Nous avons d'abord (73)  $tg\beta = tg\epsilon \sin l$  que nous pourrions écrire

(113). . . . .  $\sin \beta = \sin \epsilon \sin l$ ,

puis

(114). . . . .  $\lambda = \Lambda_1 + l \sec \epsilon$ .

Pour exprimer  $\Lambda_1$  en fonction des données, on tire du triangle  $\gamma\gamma'N$

115) . . . . .  $\cotg (\Lambda - \psi) \sin \Lambda_1 = \cos \Lambda_1 \cos \epsilon - \sin \epsilon \cotg \theta$ .

Afin de déduire  $\Lambda_1$  de cette équation, sans négliger  $\epsilon^2$ , nous poserons

$$\Lambda_1 = \Lambda' - k_1 \sin \epsilon - k_2 \epsilon^2,$$

$\Lambda'$  représentant  $\Lambda - \psi = N\gamma'$ . D'où, en nous arrêtant aux termes en  $\varepsilon^2$  :

$$\sin \Lambda_1 = \sin \Lambda' \left( 1 - \frac{1}{2} k_1^2 \varepsilon^2 \right) - \cos \Lambda' (k_1 \sin \varepsilon + k_2 \varepsilon^2)$$

et

$$\cos \Lambda_1 \cos \varepsilon = \cos \Lambda' \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{1}{2} k_1^2 \varepsilon^2 \right) + \sin \Lambda' (k_1 \sin \varepsilon + k_2 \varepsilon^2).$$

La première de ces deux relations donne :

$$\cotg \Lambda' \sin \Lambda_1 = \cos \Lambda' \left( 1 - \frac{1}{2} k_1^2 \varepsilon^2 \right) - \frac{\cos^2 \Lambda'}{\sin \Lambda'} (k_1 \sin \varepsilon + k_2 \varepsilon^2).$$

En substituant ces expressions dans la relation (115) on trouvera :

$$k_1 = \cotg \theta \sin \Lambda'; \quad k_2 = \frac{1}{4} \sin 2\Lambda';$$

d'où

$$\Lambda_1 = \Lambda' - \cotg \theta \sin \Lambda' \sin \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{4} \sin 2\Lambda';$$

ou, plus simplement,  $\chi$  désignant la précession planétaire  $\gamma'\gamma_1$ , et  $c_1$ , comme précédemment,  $\cos \theta_0$  :

$$(116) \quad \dots \dots \dots \Lambda_1 = \Lambda' - c_1 \sin \chi - \frac{\varepsilon^2}{4} \sin 2\Lambda'.$$

La relation (114) donnera alors :

$$(117) \quad \text{I ou } \lambda - \Lambda = (\lambda - \Lambda_1) \cos \varepsilon = \lambda - \Lambda' + c_1 \sin \chi - \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \lambda + c_1 \sin \chi - \Lambda' - \frac{1}{2} \sin 2\Lambda' \right),$$

d'où l'on tirera

$$\lambda - \psi = \lambda + c_1 \sin \chi - \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \lambda + c_1 \sin \chi - \frac{1}{2} f\Lambda' \right),$$

en faisant  $2\Lambda' + \sin 2\Lambda' = f\Lambda'$ .

Écrivant enfin, pour abrégé,  $\chi$  au lieu de  $\sin \chi$  on aura :

$$(118) \quad \dots \dots \dots \begin{cases} \sin(\lambda - \psi) = \sin(\lambda + c_1 \chi) - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos(\lambda + c_1 \chi) \sin \left( \lambda - \frac{1}{2} f\Lambda' \right). \\ \cos(\lambda - \psi) = \cos(\lambda + c_1 \chi) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin(\lambda + c_1 \chi) \sin \left( \lambda - \frac{1}{2} f\Lambda' \right). \end{cases}$$

77. Reprenons maintenant les formules de l'article 44 :

$$\frac{2x}{D} = \cos \beta [(1 + c_1) \cos(\lambda - \psi - \varphi) + (1 - c_1) \cos(\lambda - \psi + \varphi)] - 2s_1 \sin \beta \sin \varphi.$$

$$\frac{z}{D} = s_1 \cos \beta \sin(\lambda - \psi) + c_1 \sin \beta.$$

Il ne nous restera plus qu'à y remplacer  $\sin \beta$  et  $\cos \beta$  par leurs valeurs tirées de la relation (113),  $\sin(\lambda - \psi)$  et  $\cos(\lambda - \psi)$  par celles que nous venons de trouver.

Dans les développements qui suivent, nous ferons abstraction des termes en  $\varepsilon^2$ , que nous avons conservés jusqu'à présent.

On voit alors, par les relations (118), que  $\lambda - \psi$  pourra se remplacer simplement par  $\lambda + c_1 \chi$ .

La combinaison des relations (113) et (117) donnera :

$$\sin \beta = \sin \varepsilon \sin(\lambda + c_1 \chi - \Lambda') = \frac{1}{2} [\cos(\lambda + c_1 \chi - \Lambda' - \varepsilon) - \cos(\lambda + c_1 \chi - \Lambda' + \varepsilon)] \cos \beta = 1.$$

On trouvera alors :

$$(119) \left\{ \begin{array}{l} \frac{2x}{D} = (1 + c_1) \cos(\lambda + c_1 \chi - \varphi) + (1 - c_1) \cos(\lambda + c_1 \chi + \varphi) \\ - \frac{1}{2} s_1 [\sin(\lambda + c_1 \chi - \Lambda' + \varepsilon + \varphi) - \sin(\lambda + c_1 \chi - \Lambda' + \varepsilon - \varphi) - \sin(\lambda + c_1 \chi - \Lambda' - \varepsilon + \varphi) \\ + \sin(\lambda + c_1 \chi - \Lambda' - \varepsilon - \varphi)] \\ \frac{z}{D} = s_1 \sin(\lambda + c_1 \chi) + \frac{1}{2} c_1 [\cos(\lambda + c_1 \chi - \Lambda' - \varepsilon) - \cos(\lambda + c_1 \chi - \Lambda' + \varepsilon)]. \end{array} \right.$$

Il reste à effectuer le produit  $\frac{4xz}{D^2}$  et à le multiplier par  $\left(\frac{a}{D}\right)^3$  dont l'expression est (80)

$$\left(\frac{a}{D}\right)^3 = 1 + \frac{9}{2} e^2 + 3e \left(1 + \frac{15}{4} e^2\right) \cos(\lambda - \Gamma) + \frac{5}{2} e^2 \cos 2(\lambda - \Gamma),$$

en omettant, dans le résultat, tous les termes qui renferment  $\lambda$  ou qui sont indépendants de  $\varepsilon$  et de  $\Lambda'$ , puisqu'ils rentrent parmi ceux que nous avons

trouvés précédemment dans les expressions de la précession et de la nutation annuelles.

Si l'on multiplie enfin l'expression ainsi obtenue de  $\frac{4xz}{D^2} \left(\frac{a}{D}\right)^3$  par  $-\frac{5}{4} \frac{m_1^2}{n}$ , on obtiendra les termes de  $p$  qui dépendent du mouvement séculaire de l'écliptique, puisque (article 44)

$$p = -5 \frac{m_1^2}{n} \frac{xz}{D^2} \left(\frac{a}{D}\right)^3.$$

Cela posé, en continuant à désigner par  $p$  ces termes complémentaires, on trouvera, toutes réductions faites :

$$(120) \left\{ p = \frac{5}{4} \frac{m_1^2}{n} \left(1 + \frac{9}{2} e^2\right) \left[ \begin{array}{l} \frac{5}{4} s_2 \left\{ \sin \varphi - \frac{1}{2} \sin(2\varepsilon + \varphi) + \frac{1}{2} \sin(2\varepsilon - \varphi) \right\} \\ - \frac{1}{8} s_1(1 + c_1) \left\{ \sin(2\Lambda' - \varphi) - \frac{1}{2} \sin(2\Lambda' + 2\varepsilon - \varphi) - \frac{1}{2} \sin(2\Lambda' - 2\varepsilon - \varphi) \right\} \\ - \frac{1}{8} s_1(1 - c_1) \left\{ \sin(2\Lambda' + \varphi) - \frac{1}{2} \sin(2\Lambda' + 2\varepsilon - \varphi) - \frac{1}{2} \sin(2\Lambda' - 2\varepsilon + \varphi) \right\} \\ - \frac{1}{2} (c_1 + c_2) \left\{ \cos(\Lambda' + \varepsilon - \varphi) - \cos(\Lambda' - \varepsilon - \varphi) \right\} \\ - \frac{1}{2} (c_1 - c_2) \left\{ \cos(\Lambda' + \varepsilon + \varphi) - \cos(\Lambda' - \varepsilon + \varphi) \right\} \end{array} \right] \right. \\ \left. - \frac{9}{32} e^2 \frac{m_1^2}{n} \left[ \begin{array}{l} (c_1 + c_2) \left\{ \cos(2\Gamma + 2c_1\chi - \Lambda' - \varepsilon - \varphi) - \cos(2\Gamma + 2c_1\chi - \Lambda' + \varepsilon - \varphi) \right\} \\ + (c_1 - c_2) \left\{ \cos(2\Gamma + 2c_1\chi - \Lambda' - \varepsilon + \varphi) - \cos(2\Gamma + 2c_1\chi - \Lambda' + \varepsilon + \varphi) \right\} \\ + \frac{1}{2} s_1(1 + c_1) \left\{ \sin(2\Gamma + 2c_1\chi - \varphi) + \frac{1}{2} \sin(2\Gamma + 2c_1\chi + 2\varepsilon - \varphi) + \frac{1}{2} \sin(2\Gamma + 2c_1\chi - 2\varepsilon - \varphi) \right\} \\ + \frac{1}{2} s_1(1 - c_1) \left\{ \sin(2\Gamma + 2c_1\chi + \varphi) + \frac{1}{2} \sin(2\Gamma + 2c_1\chi + 2\varepsilon + \varphi) + \frac{1}{2} \sin(2\Gamma + 2c_1\chi - 2\varepsilon + \varphi) \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \sin(2\Gamma + 2c_1\chi - 2\Lambda' + \varphi) - \sin(2\Gamma + 2c_1\chi - 2\Lambda' - \varphi) \\ - \frac{1}{2} \sin(2\Gamma + 2c_1\chi - 2\Lambda' - 2\varepsilon + \varphi) + \frac{1}{2} \sin(2\Gamma + 2c_1\chi - 2\Lambda' - 2\varepsilon - \varphi) \\ - \frac{1}{2} \sin(2\Gamma + 2c_1\chi - 2\Lambda' + 2\varepsilon + \varphi) + \frac{1}{2} \sin(2\Gamma + 2c_1\chi - 2\Lambda' + 2\varepsilon - \varphi) \end{array} \right\} \end{array} \right] \right.$$

78. Appliquons maintenant les formules d'intégration de l'article (32),

formules que nous écrirons en négligeant au dénominateur la quantité  $v_2(69)$ , qui est partout très petite :

$$\begin{aligned} \text{pour } p = \sum u \sin(v_1 t \pm \varphi) & \left\{ \begin{aligned} \Delta\theta &= - \sum \frac{u}{v_1} \frac{\mu}{1 + \mu} \cos v_1 t \\ \sin \theta \Delta\chi &= \pm \sum \frac{u}{v_1} \frac{\mu}{1 + \mu} \sin v_1 t \end{aligned} \right. ; \\ \text{pour } p = \sum u \cos(v_1 t \pm \varphi) & \left\{ \begin{aligned} \Delta\theta &= \sum \frac{u}{v_1} \frac{\mu}{1 + \mu} \sin v_1 t \\ \sin \theta \Delta\psi &= \pm \sum \frac{u}{v_1} \frac{\mu}{1 + \mu} \cos v_1 t \end{aligned} \right. ; \end{aligned}$$

nous obtiendrons, en faisant provisoirement

$$\varepsilon = \varepsilon_1 t, \quad \Lambda' = \Lambda_0 + \lambda'_1 t, \quad \Gamma + c_1 \chi = \Gamma_1 = \Gamma_0 + \gamma_1 t$$

et

$$(121) \quad \dots \quad \frac{5}{4} \frac{m_1^2}{n} \frac{\mu}{1 + \mu} \left( 1 + \frac{9}{2} e^2 \right) = h_1; \quad \frac{9}{52} e^2 \frac{m_1^2}{n} \frac{\mu}{1 + \mu} = h_2.$$

$$(122) \quad \dots \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta\theta &= h_1 \left[ \begin{aligned} &c_1 \left\{ \frac{\sin(\Lambda' - \varepsilon)}{\lambda'_1 - \varepsilon_1} - \frac{\sin(\Lambda' + \varepsilon)}{\lambda'_1 + \varepsilon_1} \right\} \\ &+ \frac{1}{4} s_1 \left\{ \frac{\cos 2\Lambda'}{2\lambda'_1} - \frac{\cos 2(\Lambda' + \varepsilon)}{2(\lambda'_1 + \varepsilon_1)} - \frac{\cos 2(\Lambda' - \varepsilon)}{2(\lambda'_1 - \varepsilon_1)} \right\} \end{aligned} \right] \\ &- h_2 \left[ \begin{aligned} &2c_1 \left\{ \frac{\sin(2\Gamma_1 - \Lambda' - \varepsilon)}{2\gamma_1 - \lambda'_1 - \varepsilon_1} - \frac{\sin(2\Gamma_1 - \Lambda' + \varepsilon)}{2\gamma_1 - \lambda'_1 + \varepsilon_1} \right\} + 4s_1 \frac{\cos 2\Gamma_1}{2\gamma_1} \\ &- s_1 \left\{ \frac{\cos 2\Gamma_1}{2\gamma_1} - \frac{1}{2} \frac{\cos 2(\Gamma_1 + \varepsilon)}{2(\gamma_1 + \varepsilon_1)} - \frac{1}{2} \frac{\cos 2(\Gamma_1 - \varepsilon)}{2(\gamma_1 - \varepsilon_1)} \right\} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right.$$

$$(122^{bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} \sin \theta \Delta\psi &= h_1 \left[ \begin{aligned} &- c_2 \left\{ \frac{\cos(\Lambda' - \varepsilon)}{\lambda'_1 - \varepsilon_1} - \frac{\cos(\Lambda' + \varepsilon)}{\lambda'_1 + \varepsilon_1} \right\} \\ &+ \frac{1}{8} s_2 \left\{ \frac{\sin 2\Lambda'}{2\lambda'_1} - \frac{1}{2} \frac{\sin 2(\Lambda' + \varepsilon)}{2(\lambda'_1 + \varepsilon_1)} - \frac{1}{2} \frac{\sin 2(\Lambda' - \varepsilon)}{2(\lambda'_1 - \varepsilon_1)} \right\} + \frac{5}{4} s_2 \left\{ t - \frac{\sin 2\varepsilon}{2\varepsilon_1} \right\} \end{aligned} \right] \\ &+ h_2 \left[ \begin{aligned} &2c_2 \left\{ \frac{\cos(2\Gamma_1 - \Lambda' - \varepsilon)}{2\gamma_1 - \lambda'_1 - \varepsilon_1} - \frac{\cos(2\Gamma_1 - \Lambda' + \varepsilon)}{2\gamma_1 - \lambda'_1 + \varepsilon_1} \right\} + 2s_2 \frac{\sin 2\Gamma_1}{2\gamma_1} \\ &- \frac{1}{2} s_2 \left\{ \frac{\sin 2\Gamma_1}{2\gamma_1} - \frac{1}{2} \frac{\sin 2(\Gamma_1 + \varepsilon)}{2(\gamma_1 + \varepsilon_1)} - \frac{1}{2} \frac{\sin 2(\Gamma_1 - \varepsilon)}{2(\gamma_1 - \varepsilon_1)} \right\} \\ &- \frac{3}{2} s_2 \left\{ \frac{\sin 2(\Gamma_1 - \Lambda')}{2(\gamma_1 - \lambda'_1)} - \frac{1}{2} \frac{\sin 2(\Gamma_1 - \Lambda' - \varepsilon)}{2(\gamma_1 - \lambda'_1 - \varepsilon_1)} - \frac{1}{2} \frac{\sin 2(\Gamma_1 - \Lambda' + \varepsilon)}{2(\gamma_1 - \lambda'_1 + \varepsilon_1)} \right\} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right.$$



79. Jusqu'à présent nous n'avons envisagé que les termes qui proviennent de l'action du Soleil. Abstraction faite de l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique, il va de soi que l'action de la Lune introduira, dans  $\Delta\theta$  et  $\Delta\Psi$  des termes absolument analogues aux précédents, à part le seul changement de  $h_1$  et  $h_2$  en  $fh'_1$  et  $fh'_2$  respectivement,  $f$  désignant le coefficient de l'action lunaire,  $h'_1$  et  $h'_2$  ce que deviennent  $h_1$  et  $h_2$ , si l'on y remplace l'excentricité  $e$  de l'orbite solaire par celle  $e'$  de l'orbite lunaire.

Nous verrons toutefois, en étudiant l'action provenant de l'inclinaison de l'orbite de la Lune, qu'elle produit des termes de même forme que ceux en  $\Lambda' \pm \varepsilon$  des expressions de  $\Delta\theta$  et de  $s_1\Delta\psi$ ; en sorte que ces termes, au lieu d'avoir pour coefficient  $h'_1$ , auront  $h'_1(1 - \frac{5}{2}i^2)$ ; et nous introduirons immédiatement ce dernier dans les expressions de l'action combinée des deux astres.

Dans ces expressions, nous omettrons les termes en  $\cos 2\Gamma_1$  et  $\sin 2\Gamma_1$  qui dépendent exclusivement de leurs périodes. Il est bien évident, en effet, par cela même que ces termes sont indépendants de l'inclinaison et de la longitude du nœud de l'écliptique vraie sur l'écliptique fixe, qu'ils ne peuvent rentrer dans les variations séculaires qui proviennent du mouvement de l'écliptique. Ils se détruiraient du reste, identiquement, comme ils le font dans les formules du mouvement annuel de l'axe du monde, si l'on faisait le développement complet des termes qui renferment en facteur le carré de l'excentricité de l'orbite.

En faisant donc (voir 121)

$$(123) \dots \dots \begin{cases} H_1 = \frac{5}{4} \frac{m_1^2}{n} \frac{\mu}{1+\mu} \left[ 1 + \frac{9}{2} e^2 + f \left( 1 - \frac{5}{2} i^2 + \frac{9}{2} e'^2 \right) \right], \\ h'_1 = \frac{5}{4} \frac{m_1^2}{n} \frac{\mu}{1+\mu} f \left( 1 + \frac{9}{2} e'^2 \right), \quad h'_2 = \frac{9}{32} \frac{m_1^2}{n} \frac{\mu}{1+\mu} f e'^2, \end{cases}$$

on aura, pour les actions combinées du Soleil et de la Lune :

$$124) \begin{cases} \Delta\theta = \hat{H}_1 \left[ c_1 \left\{ \frac{\sin(\Lambda' - \varepsilon)}{\lambda'_1 - \varepsilon_1} - \frac{\sin(\Lambda' + \varepsilon)}{\lambda'_1 + \varepsilon_1} \right\} + \frac{s_1}{4} \left\{ \frac{\cos 2\Lambda'}{2\lambda'_1} - \frac{\cos 2(\Lambda' + \varepsilon)}{2(\lambda'_1 + \varepsilon_1)} - \frac{\cos 2(\Lambda' - \varepsilon)}{2(\lambda'_1 - \varepsilon_1)} \right\} \right] \\ - h_2 \left[ 2c_1 \left\{ \frac{\sin(2\Gamma_1 - \lambda' - \varepsilon)}{2\gamma_1 - \lambda'_1 - \varepsilon_1} - \frac{\sin(2\Gamma_1 - \Lambda' + \varepsilon)}{2\gamma_1 - \lambda'_1 + \varepsilon_1} \right\} - s_1 \left\{ \frac{\cos 2\Gamma_0}{2\gamma_1} - \frac{1 \cos 2(\Gamma_1 + \varepsilon)}{2 \cdot 2(\gamma_1 + \varepsilon_1)} - \frac{1 \cos 2(\Gamma_1 - \varepsilon)}{2 \cdot 2(\gamma_1 - \varepsilon_1)} \right\} \right] \\ - h'_2 \left[ 2c_1 \left\{ \frac{\sin(2\Gamma'_1 - \Lambda' - \varepsilon)}{2\gamma'_1 - \lambda'_1 - \varepsilon_1} - \frac{\sin(2\Gamma'_1 - \Lambda' + \varepsilon)}{2\gamma'_1 - \lambda'_1 + \varepsilon_1} \right\} - s_1 \left\{ \frac{\cos 2\Gamma'_1}{2\gamma'_1} - \frac{1 \cos(2\Gamma'_1 + \varepsilon)}{2 \cdot 2(\gamma'_1 + \varepsilon)} - \frac{1 \cos 2(\Gamma'_1 - \varepsilon)}{2 \cdot 2(\gamma'_1 - \varepsilon_1)} \right\} \right]. \end{cases}$$

$$(124^{bis}) \left\{ \begin{aligned} & s_1 \Delta \psi = H_1 \left[ -c_2 \left\{ \frac{\cos(\Lambda' - \varepsilon)}{\lambda'_1 - \varepsilon_1} - \frac{\cos(\Lambda' + \varepsilon)}{\lambda'_1 + \varepsilon_1} \right\} + \frac{s_2}{8} \left\{ \frac{\sin 2\Lambda'}{2\lambda'_1} - \frac{1}{2} \frac{\sin 2(\Lambda' + \varepsilon)}{2(\lambda'_1 + \varepsilon_1)} - \frac{1}{2} \frac{\sin 2(\Lambda' - \varepsilon)}{2(\lambda'_1 - \varepsilon_1)} \right\} \right. \\ & + \frac{3s_2}{4} \left\{ t - \frac{\sin 2\varepsilon}{2\varepsilon_1} \right\} \left. + h_2 \left[ 2c_2 \left\{ \frac{\cos(2\Gamma_1 - \Lambda' - \varepsilon)}{2\gamma_1 - \lambda'_1 - \varepsilon_1} - \frac{\cos(2\Gamma_1 - \Lambda' + \varepsilon)}{2\gamma_1 - \lambda'_1 + \varepsilon_1} \right\} \right. \right. \\ & - \frac{s_2}{2} \left\{ \frac{\sin 2\Gamma_1}{2\gamma_1} - \frac{1}{2} \frac{\sin 2(\Gamma_1 + \varepsilon)}{2(\gamma_1 + \varepsilon_1)} - \frac{1}{2} \frac{\sin(\Gamma_1 - \varepsilon)}{2(\gamma_1 - \varepsilon_1)} \right\} \\ & - \frac{3s_2}{2} \left\{ \frac{\sin 2(\Gamma_1 - \Lambda')}{2(\gamma_1 - \lambda'_1)} + \frac{1}{2} \frac{\sin 2(\Gamma_1 - \Lambda' + \varepsilon)}{2(\gamma_1 - \lambda'_1 + \varepsilon_1)} - \frac{1}{2} \frac{\sin 2(\Gamma_1 - \Lambda' - \varepsilon)}{2(\gamma_1 - \lambda'_1 - \varepsilon_1)} \right\} \left. \right] \\ & + h'_2 \left[ 2c_2 \left\{ \frac{\cos(2\Gamma'_1 - \Lambda' - \varepsilon)}{2\gamma'_1 - \lambda'_1 - \varepsilon_1} - \frac{\cos(2\Gamma'_1 - \Lambda' + \varepsilon)}{2\gamma'_1 - \lambda'_1 + \varepsilon_1} \right\} - \frac{s_2}{2} \left\{ \frac{\sin 2\Gamma'_1}{2\gamma'_1} - \frac{1}{2} \frac{\sin 2(\Gamma'_1 + \varepsilon)}{2(\gamma'_1 + \varepsilon_1)} - \frac{1}{2} \frac{\sin(\Gamma'_1 - \varepsilon)}{2(\gamma'_1 - \varepsilon_1)} \right\} \right. \\ & \left. - \frac{3s_2}{2} \left\{ \frac{\sin 2(\Gamma'_1 - \Lambda')}{2(\gamma'_1 - \lambda'_1)} + \frac{1}{2} \frac{\sin 2(\Gamma'_1 - \Lambda' + \varepsilon)}{2(\gamma'_1 - \lambda'_1 + \varepsilon_1)} - \frac{1}{2} \frac{\sin 2(\Gamma'_1 - \Lambda' - \varepsilon)}{2(\gamma'_1 - \lambda'_1 - \varepsilon_1)} \right\} \right]. \end{aligned} \right.$$

On remarquera que nous avons laissé subsister, dans ces formules, sous les coefficients  $h_2$  et  $h'_2$ , des termes en  $2\Gamma_1$  et  $2\Gamma'_1$ , et, sous le coefficient  $H_1$ , un terme en  $t$ , qui, s'ils ne disparaissaient identiquement, ne pourraient être maintenus parmi ceux des variations séculaires. Mais ces termes sont détruits par ceux qui les suivent.

80. Afin de comparer plus aisément nos formules à celles dont on fait usage en astronomie, et de nous faire une idée plus nette de la valeur des termes qui se rencontrent dans les nôtres, et non dans ces dernières, nous commencerons par développer les formules (124) suivant les puissances du temps, en nous arrêtant à la troisième, et en nous bornant aux termes à longue période. Ceux qui dépendent du périégée de la Lune, et qui sont compris sous le coefficient  $h'_2$ , devront figurer parmi les termes à courte période que nous trouverons en calculant l'action de cet astre (article 87).

Prenant les intégrales précédentes entre les limites 0 et  $t$ , on trouvera :

$$(125) \left\{ \begin{aligned} & \Delta \theta = H_1 c_1 \varepsilon_1 t^2 \left\{ \sin \Lambda'_0 + \frac{2}{3} \lambda'_1 \cos \Lambda'_0 \cdot t \right\} - \frac{1}{6} H_1 s_1 \varepsilon_1 \left( \lambda'_1 - \frac{\varepsilon_1}{2} \right) \sin 2\Lambda'_0 \cdot t^3 \\ & - 2h_2 c_1 \varepsilon_1 t^2 \left\{ \sin(2\Gamma_0 - \Lambda'_0) + \frac{2}{3} (2\gamma_1 - \lambda'_1) \cos(2\Gamma_0 - \Lambda'_0) t \right\} - \frac{2}{3} h_2 s_1 \varepsilon_1 \left( \gamma_1 - \frac{\varepsilon_1}{2} \right) \sin 2\Gamma_0 \cdot t^3. \end{aligned} \right.$$

$$(125^{bis}) \left\{ \begin{aligned} & s_1 \Delta \psi = -H_1 c_2 \varepsilon_1 t^2 \left\{ \cos \Lambda'_0 - \frac{2}{3} \lambda'_1 \sin \Lambda'_0 \cdot t \right\} + \frac{1}{12} H_1 s_1 \varepsilon_1 \left( \lambda'_1 - \frac{\varepsilon_1}{2} \right) \cos 2\Lambda'_0 \cdot t^3 \\ & + \frac{1}{2} H_1 s_2 \varepsilon_1^2 \cdot t^3 + 2h_2 c_2 \varepsilon_1 t^2 \left\{ \cos(2\Gamma_0 - \Lambda'_0) - \frac{2}{3} (2\gamma_1 - \lambda'_1) \sin(2\Gamma_0 - \Lambda'_0) t \right\} \\ & - \frac{1}{3} h_2 s_1 \varepsilon_1 \left( \gamma_1 - \frac{\varepsilon_1}{2} \right) \cos 2\Gamma_0 \cdot t^3 - h_2 s_2 \varepsilon_1 \left( \gamma_1 - \lambda'_1 - \frac{\varepsilon_1}{2} \right) \cos 2(\Gamma_0 - \Lambda'_0) \cdot t^3. \end{aligned} \right.$$

81. Dans l'établissement de ces formules, nous avons posé provisoirement (article 78)  $\Lambda' = \Lambda_0 + \lambda_1' t = \Lambda_0 + (\lambda_1 - \psi_1) t$ , et  $\varepsilon = \varepsilon_1 t$ . A la rigueur cependant  $\Lambda'$  est égal à  $\Lambda_0 - \psi + \lambda_1 t = \Lambda_0 + \lambda_1' t - \psi_2 t^2$ , puisque  $\psi = \psi_1 t + \psi_2 t^2$ , si nous négligeons les termes du troisième ordre; et  $\varepsilon$  est égal à  $\varepsilon_1 t - \varepsilon_2 t^2$ .

Nous allons tenir compte des termes du second ordre; mais nous verrons que ceux du troisième auxquels ils donnent naissance dans les expressions de  $\Delta\theta$  et de  $\Delta\psi$  sont absolument sans importance, à moins qu'il ne s'agisse d'observations très reculées.

Si, au lieu des expressions de l'article 78, nous prenons  $\Lambda' = \Lambda_0 + \lambda_1' t - \psi_2 t^2$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_1 t - \varepsilon_2 t^2$  les intégrales des formules (124),  $\sin \frac{(\Lambda' - \varepsilon)}{\lambda_1' - \varepsilon_1}$  etc., qui provenaient de  $\int \cos(\Lambda' - \varepsilon) dt$  etc., seront à remplacer par les expressions complètes de ces dernières intégrales.

Faisant donc

$$\begin{aligned}\Lambda' - \varepsilon &= \Lambda_0 + (\lambda_1' - \varepsilon_1) t - (\psi_2 - \varepsilon_2) t^2 = \Lambda_1' - \varepsilon_1 t - (\psi_2 - \varepsilon_2) t^2, \\ \Lambda' + \varepsilon &= \Lambda_0 + (\lambda_1' + \varepsilon_1) t - (\psi_2 + \varepsilon_2) t^2 = \Lambda_1' + \varepsilon_1 t - (\psi_2 + \varepsilon_2) t^2,\end{aligned}$$

formules dans lesquelles  $\Lambda_1'$  représente  $\Lambda_0 + \lambda_1' t$ , on aura :

$$\begin{aligned}\cos(\Lambda' - \varepsilon) &= \cos(\Lambda_1' - \varepsilon_1 t) + \sin(\Lambda_1' - \varepsilon_1 t) \cdot (\psi_2 - \varepsilon_2) t^2 \\ &= \cos(\Lambda_1' - \varepsilon_1 t) + \sin(\Lambda_1' - \varepsilon_1 t) - \sin(\Lambda_1' - \varepsilon_1 t) \cos \sqrt{2(\psi_2 - \varepsilon_2) t^2} \\ &= \cos(\Lambda_1' - \varepsilon_1 t) + \sin(\Lambda_1' - \varepsilon_1 t) - \frac{1}{2} \sin[\Lambda_1' - (\varepsilon_1 - \sqrt{2(\psi_2 - \varepsilon_2) t^2})] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin[\Lambda_1' - (\varepsilon_1 + \sqrt{2(\psi_2 - \varepsilon_2) t^2})].\end{aligned}$$

L'intégrale  $\int \cos(\Lambda' - \varepsilon) dt$  sera donc égale à

$$\frac{\sin(\Lambda_1' - \varepsilon_1 t)}{\lambda_1' - \varepsilon_1} \left\{ \frac{\cos(\Lambda_1' - \varepsilon_1 t)}{\lambda_1' - \varepsilon_1} - \frac{1}{2} \frac{\cos[\Lambda_1' - \varepsilon_1 t + \sqrt{2(\psi_2 - \varepsilon_2) t^2}]}{\lambda_1' - \varepsilon_1 + \sqrt{2(\psi_2 - \varepsilon_2) t^2}} - \frac{1}{2} \frac{\cos[\Lambda_1' - \varepsilon_1 t - \sqrt{2(\psi_2 - \varepsilon_2) t^2}]}{\lambda_1' - \varepsilon_1 - \sqrt{2(\psi_2 - \varepsilon_2) t^2}} \right\}.$$

Cette dernière parenthèse est l'expression qui provient des termes du second ordre en  $\varepsilon$  et en  $\psi$ ; elle ne donne que des termes du troisième ordre.

Si on la développe, l'expression complète de l'intégrale précédente,

c'est-à-dire celle par laquelle il faudra remplacer  $\frac{\sin(\Lambda' - \varepsilon)}{\lambda'_1 - \varepsilon_1}$  dans les formules (124), sera

$$\frac{\sin(\Lambda' - \varepsilon)}{\lambda'_1 - \varepsilon_1} + \frac{1}{5} \sin \Lambda_0 (\psi_2 - \varepsilon_2) t^5.$$

De même, au lieu de  $\frac{\sin(\Lambda' + \varepsilon)}{\lambda'_1 + \varepsilon_1}$ , il faudra écrire

$$\frac{\sin(\Lambda' + \varepsilon)}{\lambda'_1 + \varepsilon_1} + \frac{1}{5} \sin \Lambda_0 (\psi_2 + \varepsilon_2) t^5;$$

de sorte qu'à la différence

$$\frac{\sin(\Lambda' - \varepsilon)}{\lambda'_1 - \varepsilon_1} - \frac{\sin(\Lambda' + \varepsilon)}{\lambda'_1 + \varepsilon_1}$$

il y aura à ajouter

$$- \frac{2}{5} \sin \Lambda_0 \varepsilon_2 t^5.$$

Et à la différence

$$\frac{\cos(\Lambda' - \varepsilon)}{\lambda'_1 - \varepsilon_1} - \frac{\cos(\Lambda' + \varepsilon)}{\lambda'_1 + \varepsilon_1}$$

on ajoutera

$$- \frac{2}{5} \cos \Lambda_0 \varepsilon_2 t^5.$$

Il est inutile que nous recherchions l'effet de la même circonstance dans les autres termes des formules (124), qui sont eux-mêmes très petits.

Si l'on complète, comme il vient d'être dit, les formules (125), et qu'on omette les termes tout à fait insignifiants, elles s'écriront :

$$(125^{bis}) \left\{ \begin{aligned} \Delta\theta &= H_1 c_1 \left\{ \varepsilon_1 \sin \Lambda_0 t^2 + \frac{2}{5} \varepsilon_1 \lambda'_1 \cos \Lambda_0 t^3 - \frac{2}{5} \varepsilon_2 \sin \Lambda_0 t^3 \right\} - \frac{1}{6} H_1 s_1 \varepsilon_1^2 \sin 2\Lambda_0 t^3 - 2h_2 c_1 \varepsilon_1 \sin (2\Gamma_0 - \Lambda_0) t^2, \\ \Delta\psi &= -H_1 \frac{c_2}{s_1} \left\{ \varepsilon_1 \cos \Lambda_0 t^2 - \frac{2}{5} \varepsilon_1 \lambda'_1 \sin \Lambda_0 t^3 - \frac{2}{5} \varepsilon_1^2 \cos \Lambda_0 t^3 \right\} \\ &\quad + H_1 c_1 \varepsilon_1^2 t^3 - \frac{1}{12} H_1 \varepsilon_1^2 \cos 2\Lambda_0 t^3 + 2h_2 \frac{c_2}{s_1} \varepsilon_1 \cos (2\Gamma_0 - \Lambda_0) t^2. \end{aligned} \right.$$

82. Avant de comparer les formules (125) à celles dont les astronomes font usage, il sera utile de les réduire en nombres.

Dans cette réduction, nous pourrions omettre, comme tout à fait inappréciables aux observations, les termes qui renferment le produit de  $\varepsilon_1$  par un moyen mouvement, tels que  $\lambda'_1, \gamma_1$ , etc.

Nous prendrons, en partant des formules de Le Verrier, et en adoptant, pour les premiers termes de  $\Lambda$  et de  $\varepsilon$ , les valeurs données par Oppolzer (\*):

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= 175^\circ 0' 12'' - 8''.688 t \\ \varepsilon &= 0''.47951 t - 0''.00000525 t^2 \end{aligned} \right\} \text{(Le Verrier et Oppolzer).}$$

$$- \psi = 50''.36858 \text{ (Bessel) (**);}$$

d'où

$$\lambda'_1 = 41''.680.$$

Au moyen de ces valeurs et de celles de l'article 31, nous trouverons, en désignant par  $s$  le temps exprimé en siècles :

$$(126) \left\{ \begin{array}{l} \Delta\theta = 0''.071809 \\ \quad \quad \quad - \dots 18 \\ \Delta\psi = 1''.09560 \\ \quad \quad \quad + \dots 6 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} s^2 - 0''.0078798 \\ \quad \quad \quad - \dots 522 \\ \quad \quad \quad + \dots 20 \\ s^2 + 0''.0018085 \\ \quad \quad \quad - \dots 4911 \\ \quad \quad \quad + \dots 157 \\ \quad \quad \quad + \dots 1208 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} s^3 = 0''.071791 \quad s^2 - 0''.007910 s^3 \\ s^3 = 1''.09567 \quad s^2 + 0''.001452 s^3 \end{array} \right.$$

Les formules données par Oppolzer sont :

$$\Delta\theta = 0.0713 s^2 - 0.00786 s^3,$$

$$\Delta\psi = 1.0888 s^2 + 0.00174 s^3.$$

(\*) *Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Planeten und Cometen*, Leipzig, 1882, t. I, pp. 186 et 192, et *Traité de la détermination des orbites des Planètes et des Comètes*, traduction de Pasquier, mêmes pages.

(\*\*) Voir p. 53 ci-dessous.

Nous pouvons omettre de parler des nouveaux termes en  $s^2$  introduits par nos formules, vu leur peu d'importance.

Quant aux termes en  $s^3$ , il n'en est pas de même, comme on voit; tandis que le coefficient du premier terme de cet ordre est, dans nos formules, à très peu près le même que dans celles d'Oppolzer, les coefficients des termes complets en  $s^5$  sont assez différents des siens; et cela provient de ce qu'il a omis des termes qui ne sont nullement négligeables vis-à-vis de ceux qu'il conserve. Mais, nous le répétons, c'est afin de faciliter le calcul numérique que nous avons développé les formules (124) suivant les puissances du temps. Ces dernières seules donnent les véritables expressions des variations séculaires en obliquité et en longitude, et nous conduiront à la notion de la nutation séculaire.

83. Un criterium de l'exactitude de ces formules est leur application aux observations anciennes de l'obliquité de l'écliptique.

Parmi ces observations, nous choisirons les suivantes, comme étant les meilleures. Années : — 1100, — 250, + 173, 461, 880, 1000, 1279, 1487. Elles sont toutes rapportées par Laplace (\*), à l'exception de la dernière, que nous avons empruntée aux observations de Regiomontanus (\*\*). Le grand géomètre français en rapporte quelques autres également, que nous avons rejetées comme défectueuses (\*\*\*) ; elles s'écartent au moins autant, du reste, de la formule de Laplace que de la nôtre.

Afin de calculer plus rigoureusement la réduction de l'écliptique fixe à l'écliptique vraie, au lieu de la formule usitée, nous avons tiré de

$$\cos \theta_1 = \cos \theta \cos \varepsilon - \sin \theta \sin \varepsilon \cos \Lambda',$$

$\theta$  étant l'inclinaison de l'équateur moyen sur le premier plan,  $\theta_1$  sur le

(\*) *Connaissance des temps pour 1811.*

(\*\*) HOZEAU, *Constantes de l'astronomie* (ANNALES DE L'OBSERVATOIRE ROYAL DE BRUXELLES, 2<sup>e</sup> série, t. I.

(\*\*\*) Voir la Notice sur ce sujet dans l'*Annuaire de l'Observatoire royal de Bruxelles pour 1886.*

second, l'expression suivante de l'obliquité moyenne :

$$\theta_1 = \theta + \varepsilon \cos \Lambda' + x,$$

l'arc  $x$ , qui se déduit de l'identification des deux valeurs de  $\cos \theta_1$ , étant donné par

$$x = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \Lambda' \cot \theta (1 - \varepsilon \cos \Lambda' \cot \theta).$$

En sorte que, si  $\theta_0$  est l'obliquité moyenne au temps  $t = 0$ , on aura, au temps  $t$ , en négligeant le terme en  $\varepsilon^3$  :

$$(127) \quad \theta_1 = \theta_0 + \Delta\theta + \varepsilon \cos \Lambda' + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \Lambda' \cot \theta,$$

$\Delta\theta$  étant donné par la formule (125<sup>bis</sup>).

Si l'on veut développer cette expression suivant les puissances du temps, elle s'écrira :

$$\begin{aligned} \theta_1 = \theta_0 + \Delta\theta + \varepsilon_1 \cos \Lambda'_0 t + (-\varepsilon_2 \cos \Lambda'_1 - \varepsilon_1 \lambda'_1 \sin \Lambda'_0 + \frac{1}{2} c'_1 \varepsilon_1^2 \sin^2 \Lambda'_0) t^2 \\ + (\varepsilon_2 \lambda'_1 \sin \Lambda'_0 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \lambda'_1{}^2 \cos \Lambda'_0 + \frac{1}{2} c'_1 \varepsilon_1^2 \lambda'_1 \sin 2\Lambda'_0 - c'_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin^2 \Lambda'_0) t^3. \end{aligned}$$

Réduisant en nombres d'après les données de l'article 82, on trouvera, pour la valeur de l'obliquité moyenne après  $s$  siècles :

$$(127^{bis}) \quad \theta_1 = \theta_0 - 47''.594 s - 0''.0127 s^2 + 0''.001266 s^3.$$

Oppolzer donne :

$$\theta_1 = \theta_0 - 47''.594 s - 0''.00204 s^3.$$

Les différences entre l'observation et le calcul, fait suivant notre formule et suivant celle d'Oppolzer, sont portées dans les deux dernières colonnes ci-après; dans la précédente figurent les différences que Laplace a trouvées

en adoptant la variation séculaire de  $52''$  ;

ANNÉES.	Observ.	O — L.	O — O.	O — F.
— 1100	25° 54' 2''.0	+ 2' 4''.1	+ 4' 10''.4	+ 5' 58''.9.
— 250	45 7.0	— 12.0	+ 1 50.9	+ 1 5.2
+ 175	41 55.0	— 44.1	+ 56.6	+ 46.9
+ 461	58 52.5	— 1 0.7	+ 27.6	+ 21.7
+ 880	55 41.0	+ 28.0	+ 30.7	+ 28.8
+ 1000	54 26.0	— 24.0	+ 11.9	+ 11.2
+ 1279	52 2.4	— 20.0	— 0.5	— 0.0
+ 1460	50 49.0		+ 11.9	+ 11.0

84. Nous avons enfin à ajouter, aux expressions précédentes (126) des variations séculaires de l'axe du monde, celles que nous avons données ci-dessus (articles 71 et 72); les expressions complètes de ces variations deviendront ainsi :

$$(128) \begin{cases} \Delta\theta = 0''.071791 s^2 - 0''.0079100 s^3 + \nu[9.11259] \cos \Gamma_0 s - \nu[7.2884] \sin \Gamma_0 s^2, \\ \Delta\psi = 1''.09567 s^2 + 0''.0014519 s^3 + \nu[9.17917] \sin \Gamma_0 s + \nu[7.3550] \cos \Gamma_0 s^2. \end{cases}$$

Le coefficient  $\nu$ , qui entre dans ces formules, ne peut, comme nous l'avons dit, être déterminé que par l'observation.

85. Il nous reste à chercher la valeur de la précession générale  $\psi_1$ , qui est représentée par  $N_{\gamma_0} - N_{\gamma'}$  dans la figure de l'article 76.

Les formules de Gauss, appliquées au triangle  $N_{\gamma'}\gamma$ , dont l'angle  $\gamma'$  est  $\pi - \theta$ , l'angle  $\gamma$ ,  $\theta_1$ , et dont les côtés  $N_{\gamma'}$ ,  $N_{\gamma}$  et  $\gamma'\gamma$  sont respectivement  $\Lambda - \psi_1$ ,  $\Lambda - \psi$  et  $\chi$ , cette dernière lettre représentant la précession planétaire, nous donneront :

$$\begin{aligned} \cos \frac{\varepsilon}{2} \sin \frac{\psi_1 - \psi}{2} &= \sin \frac{\chi}{2} \cos \frac{\theta_1 + \theta}{2}, \\ \sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left( \Lambda - \frac{\psi_1 + \psi}{2} \right) &= \sin \frac{\chi}{2} \sin \frac{\theta_1 + \theta}{2}, \\ \sin \frac{\varepsilon}{2} \cos \left( \Lambda - \frac{\psi_1 + \psi}{2} \right) &= \cos \frac{\chi}{2} \sin \frac{\theta_1 + \theta}{2}. \end{aligned}$$



Des deux dernières on tire, avec une exactitude amplement suffisante,

$$\chi^2 \sin^2 \frac{\theta_1 + \theta}{2} = \varepsilon^2 - (\theta_1 - \theta)^2,$$

et, si l'on remplace  $\theta_1 - \theta$  par  $\varepsilon \cos \Lambda_1$ ,

$$\frac{\theta_1 + \theta}{2} \text{ par } \theta_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \cos \Lambda_1 t = \theta_0 - 0''.258 t:$$

d'où

$$\begin{aligned} \chi^2 \sin^2 \theta_0 &= \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \Lambda}{1 - 0''.476 t}, \\ \chi \sin \theta_0 &= \varepsilon \sin \Lambda (1 + 0''.258 t), \end{aligned}$$

ou, en écrivant, pour  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_1 t - \varepsilon_2 t^2$  et développant :

$$\chi \sin \theta_0 = \varepsilon_1 \sin \Lambda_0 t + \sin \Lambda_0 (0''.258 \varepsilon_1 - \varepsilon_2) t^2 + \varepsilon_1 \lambda_1' \cos \Lambda_0 t^2.$$

La première des trois formules précédentes peut s'écrire :

$$\psi_1 - \psi = \chi \left( \cos \theta_0 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \sin \theta_0 \cos \Lambda_1 t \right) = \chi \sin \theta_0 \left( \cot \theta_0 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \cos \Lambda_0 t \right).$$

Substituant à  $\chi \sin \theta_0$  l'expression qui vient d'être donnée, et effectuant les calculs numériques, on trouvera :

$$\psi_1 - \psi = 0'' 15464 t - 0''.0002216 t^2;$$

or, pour 1750.0, Bessel a donné  $\psi_1 = -50''.21129 t$ .

Si nous combinons la formule précédente avec la formule (128), en appliquant cette donnée, nous obtiendrons, pour 1850 :

$$(129) \dots \dots \dots - \psi = 50''.36858 t - 0''.0001089 t^2;$$

et la précession générale aura pour expression

$$(129^{bis}) \dots \dots \dots - \psi_1 = 50''.23583 t + 0''.0001127 t^2.$$

86. Mais les expressions (128) des variations séculaires de l'axe du monde ne sont applicables qu'à un nombre très limité de siècles. La nécessité de cette restriction résulte, en effet, de ce que les fonctions circulaires ont été développées en séries, dans lesquelles on s'est arrêté à la troisième puissance du temps.

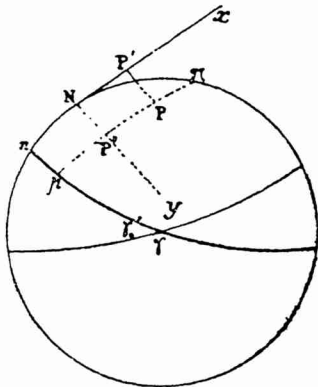
Si l'on veut se faire une idée précise du mouvement de l'axe du monde à travers une suite de siècles dont la durée soit en rapport avec celle des révolutions que la terre a subies depuis les premiers âges géologiques, il faudra recourir aux formules primordiales (124 et 124<sup>bis</sup>).

Dans celles-ci, nous nous bornerons à tenir compte du premier terme seulement, à cause de la faiblesse des suivants vis-à-vis de celui-ci, et de la complication inextricable à laquelle on serait conduit, si l'on voulait faire usage des formules complètes.

Nous écrirons donc simplement, en omettant la constante, puisqu'elle rentre dans l'unique constante arbitraire de l'intégrale  $\theta$  ;

$$(130) \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \Delta\theta = H_1 c_1 \left[ \frac{\sin(\Lambda' - \varepsilon)}{\lambda'_1 \varepsilon_1} - \frac{\sin(\Lambda' + \varepsilon)}{\lambda'_1 + \varepsilon_1} \right] \\ \sin \theta_0 \Delta\psi = -H_1 c_2 \left[ \frac{\cos(\Lambda' - \varepsilon)}{\lambda' - \varepsilon_1} - \frac{\cos(\Lambda' + \varepsilon)}{\lambda'_1 + \varepsilon_1} \right]. \end{array} \right.$$

Ces formules déterminent la variation séculaire de l'équateur, due au mouvement de l'écliptique, et estimée par rapport à l'équateur moyen, supposé soustrait aux variations séculaires, pris pour plan de référence.



Or  $\pi$  représentant le pôle boréal de l'écliptique fixe, N et P ceux du plan de référence et de l'équateur soumis à ses variations séculaires, menons par N un plan tangent à la sphère, et, dans ce plan, deux axes rectangulaires  $x$  et  $y$ , l'axe des  $x$  positifs étant dirigé vers le pôle de l'écliptique.

L'arc  $P\pi$  sera égal à  $\theta$ ,  $NP$  à  $\theta - \partial\theta$ , et on pourra les prendre tous deux comme égaux à  $\theta$  ; l'angle  $\pi$ , mesuré par l'arc  $np$ , sera égal à  $\partial\psi$ .

La distance des pôles P et N étant excessivement petite, nous pourrions admettre que les arcs PP' et PP'', normaux respectivement à N $\pi$  et à  $n\gamma$ , rencontrent, le premier l'axe  $x$ , et le second l'axe  $y$ ; et, de plus, que  $x$  ou NP', abscisse du pôle moyen P est égal à  $\text{tg } \partial\theta$  ou à  $\partial\theta$ ; quant à  $y$ , ou NP'', il sera égal à  $\sin N\pi \cdot \sin N\pi P''$  ou à  $\sin \theta_0 \cdot \delta\psi = s_1 \delta\psi$ .

Si nous appelons pôle normal le pôle du plan de référence, plan qui se confond avec l'équateur moyen, non soumis aux variations séculaires, que nous nommerons également équateur normal, nous pourrions donc dire que les coordonnées de la position séculaire du pôle, rapportées à deux axes rectangulaires menés, par le pôle normal, dans l'équateur normal, sont simplement donnés par les seconds membres des formules précédentes (130).

Si l'on fait la somme des carrés de ces coordonnées, on trouvera :

$$\frac{1}{4H_1^2} \left( \frac{x^2}{c_1^2} + \frac{y^2}{c_2^2} \right) = \frac{\lambda_1'^2 \sin^2 \varepsilon + \varepsilon_1^2 \cos^2 \varepsilon}{(\lambda_1'^2 - \varepsilon_1^2)},$$

le second membre de cette équation peut s'écrire :

$$\frac{\varepsilon_1^2}{\lambda_1'^2 - \varepsilon_1^2} + \sin^2 \varepsilon.$$

La valeur numérique du premier terme est 0.00013, et  $\sin \varepsilon$  étant moindre que 0.000002  $t$ , on peut dire que l'équation précédente représente, pour une époque déterminée, une ellipse dont le grand axe reste à très peu près constant pendant un grand nombre d'années.

87. En vertu du mouvement séculaire de l'écliptique, le pôle de l'équateur est donc animé d'un mouvement périodique autour du pôle normal défini ci-dessus.

A la différence près de la longueur des périodes, ce mouvement est complètement analogue à celui de la nutation annuelle. Il est donc naturel de lui donner le nom de NUTATION SÉCULAIRE.

Et le résultat de l'analyse précédente montre que :

*En vertu de la nutation séculaire, le pôle moyen décrit autour du pôle normal, considéré comme fixe, une ellipse dont le grand axe, dirigé vers le*

*pôle de l'écliptique, reste sensiblement constant pendant plusieurs siècles ; et le rapport du grand axe au petit est égal à celui des cosinus de l'obliquité de l'écliptique et du double de cette obliquité.*

La trajectoire du pôle moyen est l'ensemble des éléments de ces ellipses à grand axe variable.

Si l'on recherche la valeur du demi-grand axe, en rendant l'expression de  $x$  maximum, on trouve qu'elle correspond à  $\Lambda' = \pi$ , et qu'elle est égale à :

$$a = 2H_1 c_1 \frac{\lambda'_1 \sin \varepsilon_m}{\lambda_1'^2 - \varepsilon_1^2},$$

$\varepsilon_m$  représentant la limite absolue de l'inclinaison de l'écliptique mobile sur l'écliptique fixe.

Quant à la période de  $T$  de la nutation séculaire, elle sera donnée par :

$$\Lambda'_T \text{ ou } \Lambda'_0 + \lambda'_1 T = \Lambda'_0 + 2\pi,$$

d'où

$$T = \frac{2\pi}{\lambda'_1}.$$

88. Calculons les valeurs numériques de ces quantités, en nous bornant, toutefois, à considérer les termes de  $\varepsilon, \psi, \dots$  qui ne dépendent que de la première puissance du temps.

La valeur que nous trouverons pour  $a$  sera, sous ces réserves, le maximum absolu de l'accroissement séculaire de l'obliquité de l'écliptique.

Nous prendrons, outre les données numériques de l'article 82,  $\varepsilon_m = 3^\circ 6'$  (Stockwell).

Ceci posé, on obtiendra  $a = 3^\circ 48'.4$ .

Quant à la période  $T$ , on la trouvera de 31100 ans environ.

On peut donc dire, sous les réserves qui précèdent, que la limite des variations du pôle moyen, dues à la nutation séculaire, est de  $3^\circ 48'.4$ , et que l'intervalle de temps nécessaire pour que cette limite soit atteinte est de 15550 ans.

Ces résultats sont fondés sur l'hypothèse de l'uniformité du mouvement

séculaire de l'écliptique. Une connaissance plus exacte de ce mouvement serait indispensable, pour pouvoir affirmer la validité absolue, à travers une longue série de siècles, des conclusions qui précèdent, et que nous résumons en ces lignes :

*Le demi-grand axe de la courbe décrite par le pôle moyen, dans son mouvement de nutation séculaire est de 3°48'.4 ;*

*La période de ce mouvement est de 31000 ans environ.*

89. Les calculs exposés ci-dessus s'appliquent sans difficulté à l'action de la Lune.

Il suffira de remplacer la formule (113) par la suivante :

$$(151) \dots \dots \dots \text{tg } \beta = \sin \varepsilon \sin (\lambda - \Lambda) + i \sin (\lambda - \Omega),$$

et de multiplier, en outre, par le rapport  $f$  des actions de la Lune et du Soleil.

Évidemment les termes indépendants de  $i$  seront identiquement les mêmes pour les deux astres ; en sorte que le coefficient  $h_1$  trouvé précédemment, article 78, dans le premier terme de l'action du Soleil deviendra  $h_1 + fh'_1 = H_1$ , en faisant

$$(152) \dots \dots \dots h_1 = \frac{3}{4} \frac{m_1^2}{n} \frac{\mu}{1 + \mu} \cdot \left( 1 + \frac{9}{2} e'^2 - \frac{3}{2} i^2 \right)^{(*)};$$

le coefficient  $h_2$  des deux termes suivants se changera de même, pour la Lune, en

$$(152^{bis}) \dots \dots \dots h_2 = \frac{9}{32} f e'^2 \frac{m_1^2}{u} \frac{\mu}{1 + \mu};$$

et le périégée du Soleil,  $\Gamma$ , sera remplacé par celui de la Lune  $\Gamma'$ .

C'est de cette manière que nous avons déjà écrit les formules (124).

(\*) On remarquera que nous avons introduit dans la parenthèse, le facteur  $-\frac{3}{2} i^2$ , qui doit y figurer, comme il a été dit à l'article 75.

Mais ces formules sont encore incomplètes, puisque les termes dépendants de l'inclinaison et du nœud de l'orbite lunaire y sont omis.

Pour les trouver, nous aurons à substituer, dans le produit  $\frac{4xz}{D^2}$ , article 77, à  $\sin 2\beta$  et à  $\cos 2\beta$  leurs expressions tirées de (133) et à multiplier, de plus, le résultat par

$$\left(\frac{a}{D}\right)^2 = 1 + \frac{9}{2}e^2 + 5e \cos(\lambda - \Gamma) + \frac{3}{2}e^2 \cos 2(\lambda - \Gamma),$$

en laissant toutefois de côté les termes indépendants de  $i$  et de  $\Omega$ , dont la formule précédente a tenu compte, ainsi que ceux qui sont indépendants de  $\varepsilon$  ou de  $\Delta$ , et qui rentrent dans la précession et la nutation annuelles.

Parmi ces derniers, nous mentionnerons en particulier celui qui provient du terme :

$$-\frac{5}{4}s_2i^2 \{ \sin(2\varepsilon + \varphi) - \sin(2\varepsilon - \varphi) \}$$

du développement précédent. Ce terme donnera, pour  $s_1\Delta\psi$  une intégrale de la forme  $-\frac{5}{4}s_2i^2 \frac{\sin 2\varepsilon}{\varepsilon_1}$  qui se réduira, comme le terme analogue trouvé ci-dessus, à une variation séculaire insignifiante de la constante de la précession (125<sup>bis</sup>).

On trouverait de même, affectés de  $-\frac{3}{2}i^2$  tous les termes en  $\Delta'$  des formules (122). C'est pourquoi nous avons introduit le facteur  $1 - \frac{3}{2}i^2 + \frac{9}{2}e'^2$  au lieu de  $1 + \frac{9}{2}e'^2$  dans les formules (123).

Le développement des termes qui ne dépendent que de  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\varepsilon$  et  $\Delta$  ne présente pas une grande complication, puisqu'il n'exige que la formation du produit  $\frac{4xz}{D^2}$ , dans lequel on peut tout d'abord faire abstraction des termes indépendants de la longitude  $\lambda$  de l'astre, de l'inclinaison  $i$  et du nœud  $\Omega$  de son orbite.

Au contraire, celui des termes qui dépendent à la fois de l'inclinaison et du périégée est un peu plus long; il exige, en effet, que l'on conserve, dans le produit  $\frac{4xz}{D^2}$ , les termes en  $2\lambda$ , qui sont multipliés par  $i$  et par  $i^2$ , puisque ce sont ces termes mêmes, dont le produit par  $\frac{3}{2}e^2 \cos 2(\lambda - \Gamma)$  donnera des termes dépendants du périégée de la Lune et de l'inclinaison de son orbite.

Avant de les calculer, il sera donc prudent de rechercher quelle en peut être l'importance.

Or, le terme de l'expression  $\frac{4xz}{D^2}$  :

$$\sin^2 \beta [(1 + c_1) \sin (2\lambda - \varphi) + (1 - c_1) \sin (2\lambda + \varphi)],$$

par exemple, fournira ainsi des termes de la forme :

$$e^{2i} \left\{ \begin{array}{l} (1 + c_1) [\cos (2\Gamma + \Omega - \Lambda - \varepsilon - \varphi) - \cos (2\Gamma + \Omega - \Lambda + \varepsilon - \varphi)] \\ (1 - c_1) [\cos (2\Gamma + \Omega - \Lambda - \varepsilon + \varphi) - \cos (2\Gamma + \Omega - \Lambda + \varepsilon + \varphi)] \end{array} \right\}$$

qui donneront, par l'intégration, des expressions telles que :

$$f \frac{m_1^2}{n} \frac{\mu}{1 + \mu} e^{2i} \left[ \frac{\sin (2\Gamma + \Omega - \Lambda - \varepsilon)}{2\gamma_1 + \omega_1 - \lambda_1 - \varepsilon_1} - \frac{\sin (2\Gamma + \Omega - \Lambda + \varepsilon)}{2\gamma_1 + \omega_1 - \lambda_1 + \varepsilon_1} \right].$$

Le développement de celle-ci suivant les puissances du temps, se réduit à

$$f \frac{m_1^2}{n} \frac{\mu}{1 + \mu} e^{2i\varepsilon_1} \sin (2\Gamma_0 + \Omega_0 - \Lambda_0) . t^2.$$

Si l'on calcule les facteurs numériques qui entrent dans cette expression, on trouve que le produit n'en atteint pas même des cent millionnièmes de seconde.

Ces termes seront donc tout à fait insensibles.

**90.** Pour la même raison, nous pouvons nous borner à ne considérer, dans le développement de  $\frac{4xz}{D^2}$ , que les seuls termes qui dépendent de la première puissance de l'inclinaison, et à écrire, par suite, en posant, pour abrégé,  $\lambda + c_1 \sin \chi = \lambda'$  :

$$\begin{aligned} \sin 2\beta &= \cos (\lambda' - \Lambda' - \varepsilon) - \cos (\lambda' - \Lambda' + \varepsilon) \\ -\frac{1}{2} i \left\{ \begin{array}{l} 2 \sin (\lambda' - \Omega) - \sin (\lambda' - \Omega - 2\varepsilon) - \sin (\lambda' - \Omega + 2\varepsilon) \\ + \sin (\lambda' + \Omega - 2\Lambda') - \frac{1}{2} \sin (\lambda' + \Omega - 2\lambda' - 2\varepsilon) - \frac{1}{2} \sin (\lambda' + \Omega - 2\Lambda' + 2\varepsilon) \end{array} \right\}, \\ \sin^2 \beta &= \frac{1}{2} i \left\{ \begin{array}{l} \sin (2\lambda' - \Omega - \Lambda' - \varepsilon) - \sin (2\lambda' - \Omega - \Lambda' + \varepsilon) \\ - \sin (\Omega - \Lambda' - \varepsilon) + \sin (\Omega - \Lambda' + \varepsilon) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

On trouvera alors que les termes à considérer se réduisent au produit de  $\frac{1}{4}i$  par

$$\begin{aligned}
 & (c_1 + c_2) \left[ \begin{array}{l} \sin(\Omega - \varphi) - \sin(\Omega + 2\varepsilon - \varphi) - \sin(\Omega - 2\varepsilon - \varphi) \\ -\sin(\Omega - 2\Lambda' - \varphi) + \frac{1}{2}\sin(\Omega - 2\Lambda' + 2\varepsilon - \varphi) + \frac{1}{2}\sin(\Omega - 2\Lambda' - 2\varepsilon - \varphi) \end{array} \right] \\
 & + (c_1 - c_2) \left[ \begin{array}{l} 2\sin(\Omega + \varphi) - \sin(\Omega + 2\varepsilon + \varphi) - \sin(\Omega - 2\varepsilon + \varphi) \\ -\sin(\Omega - 2\Lambda' + \varphi) + \frac{1}{2}\sin(\Omega - 2\Lambda' + 2\varepsilon + \varphi) + \frac{1}{2}\sin(\Omega - 2\Lambda' - 2\varepsilon + \varphi) \end{array} \right] \\
 & s_1 \left\{ \begin{array}{l} (1 + c_1) [\cos(\Omega + \Lambda' - \varepsilon - \varphi) - \cos(\Omega + \Lambda' + \varepsilon - \varphi)] \\ + (1 - c_1) [\cos(\Omega + \Lambda' - \varepsilon + \varphi) - \cos(\Omega + \Lambda' + \varepsilon + \varphi)] \end{array} \right\} \\
 & + 3s_2 \left\{ \begin{array}{l} \cos(\Omega - \Lambda' - \varepsilon - \varphi) - \cos(\Omega - \Lambda' + \varepsilon - \varphi) \\ -\cos(\Omega - \Lambda' - \varepsilon + \varphi) + \cos(\Omega - \Lambda' + \varepsilon + \varphi) \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

91. Ces termes sont à multiplier par  $-\frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n}$  pour fournir les termes correspondants de  $p$ , qui seront donc le produit des précédents par  $-\frac{3}{16}\frac{m_1^2}{n}i$ ; et, en tenant compte de la notation (123), on trouvera, par l'intégration :

$$\begin{aligned}
 \Delta\theta &= \frac{1}{2}ih_1c_1 \left[ \begin{array}{l} \frac{2\cos\Omega}{\omega_1} - \frac{\cos(\Omega + 2\varepsilon)}{\omega_1 + 2\varepsilon_1} - \frac{\cos(\Omega - 2\varepsilon)}{\omega_1 - 2\varepsilon_1} \\ -\frac{\cos(\Omega - 2\Lambda')}{\omega_1 - 2\lambda'_1} + \frac{\frac{1}{2}\cos(\Omega - 2\Lambda' + 2\varepsilon)}{\omega_1 - 2\lambda'_1 + 2\varepsilon_1} + \frac{\frac{1}{2}\cos(\Omega - 2\Lambda' - 2\varepsilon)}{\omega_1 - 2\lambda'_1 - 2\varepsilon_1} \end{array} \right] \\
 & + \frac{1}{2}ih_1s_1 \left[ \frac{\sin(\Omega + \Lambda' - \varepsilon)}{\omega_1 + \lambda'_1 - \varepsilon_1} - \frac{\sin(\Omega + \Lambda' + \varepsilon)}{\omega_1 + \lambda'_1 + \varepsilon_1} \right]. \\
 \Delta\psi &= \frac{1}{2}ih_1\frac{e_2}{s_1} \left[ \begin{array}{l} \frac{2\sin\Omega}{\omega_1} - \frac{\sin(\Omega + 2\varepsilon)}{\omega_1 + 2\varepsilon_1} - \frac{\sin(\Omega - 2\varepsilon)}{\omega_1 - 2\varepsilon_1} \\ -\frac{\sin(\Omega - 2\Lambda')}{\omega_1 - 2\lambda'_1} + \frac{\frac{1}{2}\sin(\Omega - 2\Lambda' + 2\varepsilon)}{\omega_1 - 2\lambda'_1 + 2\varepsilon_1} + \frac{\frac{1}{2}\sin(\Omega - 2\Lambda' - 2\varepsilon)}{\omega_1 - 2\lambda'_1 - 2\varepsilon_1} \end{array} \right] \\
 & - \frac{1}{2}ih_1c_1 \left[ \frac{\cos(\Omega + \Lambda' - \varepsilon)}{\omega_1 + \lambda'_1 - \varepsilon_1} - \frac{\cos(\Omega + \Lambda' + \varepsilon)}{\omega_1 + \lambda'_1 + \varepsilon_1} \right] \\
 & + \frac{3}{2}ih_1s_2 \left[ \frac{\cos(\Omega - \Lambda' - \varepsilon)}{\omega_1 - \lambda'_1 - \varepsilon_1} - \frac{\cos(\Omega - \Lambda' + \varepsilon)}{\omega_1 - \lambda'_1 + \varepsilon_1} \right].
 \end{aligned}$$

La première partie de  $\Delta\theta$ , de même que de  $\Delta\psi$ , développée, donne, à la vérité, des termes qui dépendent de la troisième puissance du temps, mais



qui sont affectés du coefficient  $\varepsilon_1^2$ , et, par conséquent, absolument négligeables.

Les expressions de  $\Delta\theta$  et de  $\Delta\psi$  se réduisent ainsi, la première à son dernier terme, la seconde aux deux derniers. Quant aux termes des formules (122), qui dépendent du mouvement de l'écliptique et du périégée de la Lune, ils sont tellement insignifiants, à cause du facteur très petit  $h'_2$  dont ils sont affectés, que nous pouvons les négliger complètement.

En ne conservant que les termes qui pourraient devenir sensibles, les variations à courte période qui sont liées au mouvement de l'écliptique se réduiront à

$$(155) \quad \dots \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{1}{2} ih'_1 s_1 \left[ \frac{\sin(\Omega + \Lambda' - \varepsilon)}{\omega_1 + \lambda'_1 - \varepsilon_1} - \frac{\sin(\Omega + \Lambda' + \varepsilon)}{\omega_1 + \lambda'_1 + \varepsilon_1} \right] \\ \Delta\psi &= \frac{5}{2} ih'_1 s_2 \left[ \frac{\cos(\Omega - \Lambda' - \varepsilon)}{\omega_1 - \lambda'_1 - \varepsilon_1} - \frac{\cos(\Omega - \Lambda' + \varepsilon)}{\omega_1 - \lambda'_1 + \varepsilon_1} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} ih'_1 c_1 \left[ \frac{\cos(\Omega + \Lambda' - \varepsilon)}{\omega_1 + \lambda'_1 - \varepsilon_1} - \frac{\cos(\Omega + \Lambda' + \varepsilon)}{\omega_1 + \lambda'_1 + \varepsilon_1} \right]. \end{aligned} \right.$$

92. Ces variations, quoique dépendant, par la longitude du nœud ascendant de l'écliptique et par son inclinaison sur l'écliptique fixe, du mouvement séculaire de ce plan, doivent évidemment, à cause de la brièveté de leur période, rentrer, comme nous l'avons dit, parmi les termes de la nutation annuelle.

Cela étant, les termes des formules (133) devront se calculer de la même manière que les termes usuels de la nutation; c'est-à-dire sans prendre les intégrales entre les limites 0 et  $t$ , comme nous l'avons fait pour les termes séculaires proprement dits (art. 76). Ce procédé est absolument rigoureux, quoiqu'il semble, au premier abord, que les termes des formules (133), complètement analogues aux termes séculaires, doivent se calculer de même que ceux-ci, et qu'il ne faudrait pas laisser subsister, dans leur développement, les termes indépendants du temps qui disparaissent dans ce dernier mode de calcul (\*).

(\*) Si l'on désigne par  $c$  la constante de la précession, par  $k$  une constante arbitraire,

Dans le développement suivant des formules (133), nous n'écrirons que les deux premiers termes, les autres étant tellement faibles qu'ils ne pourraient devenir sensibles que pour une époque très-éloignée, et les observations qui ont été faites à une pareille époque ne possédant pas le degré de précision nécessaire pour que la présence de ces termes puisse s'y accuser.

Le développement se réduit ainsi à :

$$\Delta\theta = \frac{fih'_1s_1\varepsilon_1}{(\omega_1 + \lambda'_1)^2 - \varepsilon_1^2} [\sin(\Omega + \Lambda') - (\omega_1 + \lambda'_1) \cos(\Omega + \Lambda') \cdot t],$$

$$\Delta\psi = \frac{3fih'_1c_1\varepsilon_1}{(\omega_1 - \lambda'_1)^2 - \varepsilon_1^2} [\cos(\Omega - \Lambda') + (\omega_1 - \lambda'_1) \sin(\Omega - \Lambda') \cdot t]$$

$$- \frac{fih'_1c_1\varepsilon_1}{(\omega_1 + \lambda'_1)^2 - \varepsilon_1^2} [\cos(\Omega + \Lambda') + (\omega_1 + \lambda'_1) \sin(\Omega + \Lambda') \cdot t],$$

ou, en nombres, à

$$(134) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\theta = [5.1469] \sin(\Omega + \Lambda') + [4.67266] \cos(\Omega + \Lambda') \cdot t, \\ \Delta\psi = [5.8000] \cos(\Omega - \Lambda') - [5.55092] \sin(\Omega - \Lambda') \cdot t \\ \quad - [5.5095] \cos(\Omega + \Lambda') + [5.05508] \sin(\Omega + \Lambda') \cdot t, \end{array} \right.$$

par  $F$  la fonction périodique qui remplace absolument tous les termes de la nutation, l'expression complète de  $\psi$  sera :

$$\psi = k + ct + F,$$

ou, en prenant l'intégrale entre 0 et  $t$  :

$$\psi = \psi_0 - F_0 + ct + F.$$

Or  $\psi_0 - F_0$  est la longitude moyenne au temps  $t = 0$ , c'est-à-dire celle que l'on obtient abstraction faite de la nutation;  $\psi_0 - F_0 + ct$  est donc la longitude moyenne au temps  $t$ ; la dernière formule devient, par suite :

$$\psi = \psi_m + F,$$

c'est-à-dire qu'en ajoutant à la longitude moyenne, au temps  $t$ , la nutation calculée pour ce même moment sans l'introduction d'une constante arbitraire, on obtient absolument le même résultat qu'en prenant l'intégrale entre les limites 0 et  $t$ .

Ces termes, dont aucun géomètre n'a tenu compte, Oppolzer excepté, pourront devenir sensibles lorsqu'on voudra comparer entre elles des observations séparées par un intervalle de plusieurs siècles. Les premiers d'entre eux, indépendants du temps, peuvent toujours être négligés, même dans la réduction des circompolaires.



## RÉCAPITULATION

---

Nous arrêtons ici ce travail, quoi qu'il nous reste encore un point important à examiner : celui de l'uniformité du mouvement diurne à travers les siècles. On verra, dans l'Addition, que les irrégularités de ce mouvement sont du même ordre de grandeur que la nutation diurne.

L'existence aujourd'hui démontrée de cette nutation (\*), celle aussi des termes nouveaux que nous avons trouvés dans l'expression de la nutation annuelle, nous imposent une tâche importante : la détermination des constantes de la nutation diurne d'abord ; et, ensuite, une détermination nouvelle des constantes de l'aberration et de la nutation annuelle du coefficient des termes qui, dans l'expression de cette dernière, dépendent des inégalités du sphéroïde terrestre, de ceux enfin qui renferment les constantes arbitraires, et dont la période, estimée égale à 305 jours environ, est, plus exactement, de  $1 \frac{1}{505}$  jour.

C'est vers ce but que vont tendre actuellement nos premiers efforts.

Sa poursuite exigera l'emploi des formules qui ont fait l'objet du présent travail, et que nous allons récapituler.

La plupart des notations sont celles que nous avons employées précédemment, et qui sont, du reste, familières aux astronomes. On voudra bien ne pas oublier, toutefois, que  $\psi$  est pris partout dans le sens direct, et que nous conservons, pour les motifs énumérés à l'article 57, la longitude moyenne du Soleil, au lieu de la remplacer, comme on le fait généralement, par la longitude vraie.

Dans cette récapitulation, il sera plus simple et plus pratique à la fois d'exprimer les termes de la nutation diurne en coordonnées écliptiques,

(\*) C. R., 13 décembre 1886. — *Bull. Acad. de Belgique*, 2 avril 1887. — A. N., n° 2768. — *Annuaire de l'Observatoire royal* pour 1888 et pour 1889. [Déc. 1888.]

d'une part, afin de les rapporter aux mêmes arguments que ceux de la nutation annuelle; d'autre part, afin de savoir, parmi ces derniers, quels sont ceux qu'il est indispensable de conserver.

A cette fin, on partira des formules (59), qui donnent les expressions tout à fait générales des composantes  $l$  et  $m$  de la vitesse angulaire de l'écorce solide du globe autour des axes principaux  $x$  et  $y$ , et d'où se déduisent celles de  $\frac{d\theta}{dt}$  et  $\frac{d\psi}{dt}$  (11).

Si l'on y tient compte à la fois de la nutation annuelle et de la nutation diurne, on trouvera que, pour obtenir cette dernière, il suffira d'ajouter aux seconds membres des formules (68)

$$135) \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{en } \Delta\theta: \quad \pm \frac{1}{2} \frac{u}{n} \frac{c}{A} \frac{1 \pm v_2}{(1 \pm \frac{1}{2} v_2) [(1 \pm v_2)^2 - \omega]} \sin(vt \pm 2\varphi), \\ \text{en } \sin \theta \Delta\psi: \quad + \frac{1}{2} \frac{u}{n} \frac{c}{A} \frac{1 \pm v_2}{(1 \pm \frac{1}{2} v_2) [(1 \pm v_2)^2 - \omega]} \cos(vt \pm 2\varphi). \end{array} \right.$$

L'application de ces formules à chacun des termes de l'expression (84) de  $p$  donnera les termes de la nutation diurne. Ceux-ci auront tous pour coefficient

$$-\frac{h}{4} \times \frac{1}{2} \frac{c}{A} \frac{1}{n} = \frac{5}{8} \left(\frac{m_1}{n}\right)^2 \left(\frac{C-A}{B} - \frac{C-B}{A}\right) = \frac{5}{8} \left(\frac{m_1}{n}\right)^2 (B-A) \frac{B+A-C}{AB},$$

que nous appellerons le coefficient de la nutation diurne, et que nous représenterons par  $k$ .

$\frac{B+A-C}{AB}$  peut s'écrire

$$\frac{C - (2C - A - B)}{AB} = \frac{C(1 - 2\mu_1)}{AB},$$

$\mu_1$  représentant  $\frac{\mu - \omega}{1 - \omega}$ ; et, puisque  $\frac{A+B}{2C} = 1 - \mu_1$ , on pourra ici poser

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{C} = 1 - \mu_1, \quad \text{d'où} \quad \frac{AB}{C^2} = 1 - 2\mu_1.$$

Cela étant, le coefficient de la nutation diurne se réduit à  $\frac{3}{8} \left(\frac{m_1}{n}\right)^2 \frac{B-A}{C}$ .

Il est bien entendu que, dans cette expression, les moments d'inertie A, B, C sont relatifs à l'écorce solide du globe, et non au globe entier.

Dans ces formules intervient nécessairement encore une autre constante, dont il a été question dans le Livre I : c'est la longitude du premier méridien.  $t$  étant l'heure sidérale de l'observation, on a, en temps,

$$\varphi + L = t.$$

L étant la longitude orientale du lieu, rapportée au premier méridien.

Quand les constantes  $k$  et L seront déterminées, il n'y aura rien à changer aux formules (135), dans lesquelles il suffira de remplacer  $\varphi$  par  $t - L$ ; et c'est ainsi que nous les développerons ci-dessous.

S'agit-il, au contraire, de déterminer ces constantes, il faudra procéder comme à l'article 13.

Pour être complètes, les formules de la nutation doivent renfermer encore les termes qui contiennent les constantes arbitraires, et qui proviennent de  $l = \alpha_1 \sin(\iota\varphi + \beta_1)$ , article 15.

Ces derniers seront, si l'on écrit simplement  $\alpha_1$  au lieu de  $\frac{\alpha_1}{n(1+\iota)}$ , et qu'on néglige la très petite différence qui existe entre l'unité et  $\frac{\alpha_1}{B} \frac{1}{\iota} = \sqrt{\frac{\alpha A}{Bb}}$ :

$$\Delta\theta = \alpha_1 \cos[(1 + \iota)\varphi + \beta_1]; \quad s_1\Delta\psi = -\alpha_1 \sin[(1 + \iota)\varphi + \beta_1].$$

Ces termes sont nuls, si le mouvement de rotation initial de l'écorce s'est effectué autour de son axe polaire principal, et si celui-ci n'a pas varié. Mais la croûte s'étant durcie insensiblement, et plus rapidement sous les mers que sous les masses continentales, il est possible et même probable que l'axe principal, autour duquel tournait le globe dans son état fluide, n'est pas resté un axe principal de la croûte ou du sphéroïde. Dans quelle mesure s'en est-il écarté, c'est l'observation seule qui peut nous l'apprendre; et nous devons conserver à cette fin les deux termes précédents dans les expressions de la nutation.

A la vérité, nous ne connaissons que très imparfaitement la valeur de

$$i^2 = \frac{ab}{AB} = \frac{(C-A)(C-B)}{AB}.$$

Nous ne savons pas même de science certaine si cette valeur doit se calculer pour le sphéroïde terrestre tout entier, ou pour la croûte solide seule. Nous ferons remarquer cependant que, dans ce dernier cas, il se pourrait que la valeur de l'expression précédente fût négative, ce qui modifierait la forme des intégrales au point qu'il ne serait plus possible d'y retrouver la période que plusieurs astronomes croient avoir découverte dans les variations de la latitude et du lieu apparent des étoiles.

On doit observer, de plus, que le coefficient de la nutation annuelle et celui de la précession concordent bien entre eux et avec la valeur assignée par la Mécanique Céleste à l'action de la Lune.

Il semble donc que l'intervention du frottement, qui s'exerce entre le noyau fluide et l'écorce, a pour effet de soumettre celle-ci, dans les mouvements à longue période, à ceux mêmes du noyau, en sorte que ces mouvements s'effectuent comme si le noyau et l'écorce étaient solidaires, tandis que le mouvement diurne de l'écorce serait à peu près indépendant de celui du noyau.

Quoiqu'il puisse sembler étonnant, au premier abord, que l'action du frottement s'exerce de deux manières aussi dissemblables, suivant la longueur de la période des mouvements de l'écorce, la théorie rend toutefois compte de cette dissimilitude.

Or, la révolution complète du mouvement que nous considérons actuellement, et qui dépend de l'angle  $\varphi$ , serait de  $\frac{1}{i} = \frac{1}{0.00325} = 308$  jours environ pour la Terre entière. Cette période est à peu près l'année; et puisque, pour les mouvements qui dépendent de la durée beaucoup plus courte d'une lunaison, les coefficients, calculés pour le sphéroïde entier, semblent concorder fort bien avec les observations, sans nul doute sommes-nous en droit de calculer  $i$  également pour le sphéroïde.

Dans les expressions suivantes de la précession et de la nutation, nous avons tenu compte de tous les résultats précédemment trouvés, ainsi que des inégalités de la Lune, que nous n'avons pas fait entrer dans nos formules (84) à (95) par les motifs exposés dans la préface.

Les formules sont calculées pour 1850.0.

Pour le calcul de la constante de la précession, nous sommes parti de la valeur  $50''.36838$  de la précession luni-solaire, calculée ci-dessus (129) d'après la précession générale de Bessel (\*); de cette quantité nous avons à retrancher  $0''.00057$  pour obtenir la constante de la précession (art. 162) qui sera  $P = 50''.36781$ .

Réduite à l'année Julienne, prise pour unité dans nos formules, cette valeur sera  $P = 50'',36886$ .

Reprenant, avec cette donnée et la constante de la nutation de Peters, les calculs des articles 52 et suivants, on trouvera  $f = 2.181$ ;  $\frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi} = 0,0032693$ ; d'où l'on déduira  $\mu = 0.00328$ ,  $\varpi = 0.0000104$ .

L'accord assez satisfaisant de cette valeur de  $f$ , avec celle que lui assigne la Mécanique Céleste, milite en faveur de l'exactitude de la constante de Peters et de la constante de la précession luni-solaire, qui résulte de notre théorie et de la précession générale déterminée par Bessel.

La constante de la nutation de Peters devra être multipliée dans nos formules par  $(1 + \eta)$ , en vue de la détermination ultérieure de sa correction; celle de la précession par  $(1 + \kappa)$ .

Indépendamment des constantes arbitraires  $\alpha_1$  et  $\beta_1$ , il reste encore un facteur indéterminé dans nos formules: c'est  $\nu$ , qui multiplie les termes dépendants des périégées de la Lune et du Soleil; ce facteur ne pourra être déterminé qu'au moyen d'observations bien précises. On verra ailleurs (\*\*)

(\*) On a vu qu'en théorie elle est préférable à celle de Struve (art. 53). Des recherches récentes ont confirmé ce résultat (1888.)

(\*\*) Traité des réductions stellaires, p. 37.



que Bessel, Poisson, Peters et Nyrén ont commis une erreur de théorie quand ils ont cru pouvoir déterminer  $\nu$  par des observations du pendule.

Nos formules donnent : pour la précession générale, d'après Bessel, 50.23383 ; pour la nutation annuelle, en tenant compte des termes du second ordre et de ceux qui proviennent des inégalités de la Lune, en obliquité (\*) :

$$\begin{aligned} \Delta\theta = & 9''.2235 \cos \Omega - 0.08727 \cos 2\Omega + 0.5514 \cos 2\odot \\ & + 0.0887 \cos 2\zeta + 0.02341 \cos (3\odot - \Gamma) - 0.0092 \cos (\odot + \Gamma) - 0.0017 \cos (2\odot - \Omega) \\ & + 0.0161 \cos (2\zeta - \Omega) + 0.0148 \cos (3\zeta - \Gamma') \\ & - 0.0055 \cos (\zeta + \Gamma') - 0.0010 \cos (\zeta - \Gamma') \\ & - \alpha_1 \sin [(1 + \iota) \varphi + \beta_1] \\ & + \nu [1.04265] \sin \Gamma' - \nu [0.55321] \sin (\Gamma' + \Omega); \end{aligned}$$

en longitude :

$$\begin{aligned} - \Delta\psi = & - 17''.2472 \sin \Omega + 0.2020 \sin 2\Omega - 1.1403 \sin 2\odot \\ & - 0.2044 \sin 2\zeta + 0.1283 \sin (\odot - \Gamma) - 0.0458 \sin (3\odot - \Gamma) \\ & + 0.0215 \sin (\odot + \Gamma) + 0.00317 \sin (2\odot - \Omega) \\ & + 0.0045 \sin (2\odot - 2\Gamma') - 0.0522 \sin (2\zeta - \Omega) \\ & - 0.0301 \sin (3\zeta - \Gamma') + 0.0108 \sin (\zeta + \Gamma') + 0.0675 \sin (\zeta - \Gamma') \\ & + \frac{\alpha_1}{s_1} \cos [(1 + \iota) \varphi + \beta_1] \\ & - \frac{\nu}{s_1} [0.11090] \cos \Gamma' + \frac{\nu}{s_1} [0.60566] \cos (\Gamma' - \Omega) \\ & + \frac{\nu}{s_1} [0.65272] \cos (\Gamma' + \Omega). \end{aligned}$$

Pour la nutation diurne, en désignant par  $k$  son coefficient, et par  $s_1$  le sinus de l'obliquité, qui a pour logarithme 9.599980 :

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= k\Sigma_1 \cos 2\varphi + k\Sigma_2 \sin^2\varphi, \\ s_1\Delta\psi &= k\Sigma_1 \sin 2\varphi - k\Sigma_2 \cos 2\varphi; \end{aligned}$$

les symboles  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  représentent les facteurs suivants :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = & - 1.156 - 0.154 \cos \Omega + 0.546 \cos 2\Omega + 0.819 \cos 2\mathbb{C} \\ & + 0.022 \cos (5\Omega - \Gamma) + 0.139 \cos (2\mathbb{C} - \Omega) \\ & + 0.160 \cos (5\mathbb{C} - \Gamma') - 0.130 \cos (\mathbb{C} - \Gamma') - 0.022 \cos (\mathbb{C} + \Gamma'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 = & - 0.154 \sin \Omega + 0.576 \sin 2\Omega + 0.888 \sin 2\mathbb{C} \\ & + 0.023 \sin (5\Omega - \Gamma) + 0.185 \sin (2\mathbb{C} - \Omega) \\ & + 0.175 \sin (5\mathbb{C} - \Gamma') - 0.024 \sin (\mathbb{C} + \Gamma'); \end{aligned}$$

ou, si l'on préfère avoir les coefficients exprimés par leurs logarithmes :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = & - [0.0650] - [9.1271] \cos \Omega + [9.5591] \cos 2\Omega + [9.9135] \cos 2\mathbb{C} \\ & + [8.5424] \cos (5\Omega - \Gamma) + [9.1450] \cos (2\mathbb{C} - \Omega) \\ & + [9.2041] \cos (5\mathbb{C} - \Gamma') - [9.1139] \cos (\mathbb{C} - \Gamma') - [8.5424] \cos (\mathbb{C} + \Gamma'). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 = & - [9.1271] \sin \Omega + [9.5752] \sin 2\Omega + [9.9484] \sin 2\mathbb{C} \\ & + [8.5617] \sin (5\Omega - \Gamma) + [9.2625] \sin (2\mathbb{C} - \Omega) \\ & + [9.2581] \sin (5\mathbb{C} - \Gamma') - [8.5802] \sin (\mathbb{C} + \Gamma'). \end{aligned}$$

On voit que nous avons conservé, parmi les termes de la nutation annuelle, ceux qui se retrouvent, dans la nutation diurne, affectés d'un coefficient un peu important; et l'on aperçoit les raisons pour lesquelles nous n'avons pas réduit les longitudes moyennes du Soleil en longitudes vraies: outre l'inexactitude forcée de cette réduction, la complication, qu'elle amène dans les termes de la nutation diurne, compense la simplification qu'elle introduit dans ceux de la nutation annuelle.

Sans doute ces formules sont bien compliquées, quoique nous ayons omis les termes dont le coefficient est inférieur à 0.01. Des tables, que nous nous proposons de dresser, en simplifieront considérablement le calcul.

Dans les longues séries d'observations, on pourra se dispenser d'avoir égard aux termes en  $3\mathbb{C} - \Gamma'$  et en  $\mathbb{C} \pm \Gamma'$ ; mais, dans le calcul des éphémérides, il ne semble pas qu'on puisse le faire.





## ADDITION AU LIVRE I.

---

Dans toutes les théories qui précèdent, la vitesse de rotation de la Terre a été supposée constante.

Laplace, Poisson et Serret ont démontré qu'elle ne peut subir que des variations tout à fait inappréciables dans l'hypothèse, où ils se sont placés, d'une Terre solide.

Mais le fait de l'existence d'une nutation diurne, dans le mouvement de l'écorce solide du globe, rend également certain celui d'une variation correspondante dans son mouvement de rotation, sans que cette variation atteigne toutefois le noyau fluide intérieur, pas plus qu'il n'est affecté d'une façon appréciable par la nutation diurne.

Nous nous proposons de rechercher ici sommairement la variation de la vitesse angulaire de l'écorce solide, sous les actions combinées du Soleil et de la Lune.

Cette vitesse, représentée par  $n$ , est donnée par l'équation différentielle (21), article 2 :

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{d}{C}(lm + nr) = -\frac{d}{C}\left(lm - 3m_1^2 \frac{x_0 y_0}{D_0^3}\right).$$

Or il est facile de s'assurer que le rapport du terme  $lm$  au suivant est de l'ordre de  $\frac{ab}{AB}$ ; nous pourrons donc le négliger, et écrire

$$\frac{dn}{dt} = \frac{3}{4} m_1^2 \frac{d}{C} \left[ \sin 2(\alpha - \varphi) + \frac{1}{2} \sin 2(\alpha + \delta - \varphi) + \frac{1}{2} \varphi \sin 2(\alpha - \delta - \varphi) \right],$$

$\alpha$  et  $\delta$  désignant comme ci-dessus les coordonnées équatoriales de l'astre attirant.

$n$  étant égal à  $\frac{d\varphi}{dt}$ , si nous prenons  $\varphi$  pour variable indépendante, nous aurons, en représentant  $\frac{dt}{d\varphi}$  par  $\tau$  :

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{1}{d\varphi} \frac{d\tau}{\tau^3}.$$

Portant cette valeur dans l'équation précédente, et faisant passer  $d\varphi$  dans le second membre, le produit  $-\frac{d\tau}{\tau^3}$  aura pour intégrale  $\frac{1}{2\tau^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ .

La constante à ajouter au second membre, après l'intégration, sera donc  $\frac{1}{2}n^2$ , et l'on aura :

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = n^2 - \frac{5}{4} m_1^2 \frac{d}{C} \left[ \frac{\cos 2(\alpha - \varphi)}{1 - a_2} + \frac{1}{2} \frac{\cos 2(\alpha + \delta - \varphi)}{1 - a_2 - d_2} + \frac{1}{2} \frac{\cos 2(\alpha - \delta - \varphi)}{1 - a_2 + d_2} \right]$$

En se bornant aux termes du premier ordre, ce qui suffit amplement, et en désignant par  $\Delta\varphi$  la variation de la vitesse angulaire, on trouvera

$$\frac{d\Delta\varphi}{ndt} = -\frac{5}{8} \left(\frac{m_1}{n}\right)^2 \frac{d}{C} \left[ \frac{\cos 2(\alpha - \varphi)}{1 - a_2} + \frac{1}{2} \frac{\cos 2(\alpha + \delta - \varphi)}{1 - a_2 - d_2} + \frac{1}{2} \frac{\cos 2(\alpha - \delta - \varphi)}{1 - a_2 + d_2} \right],$$

où l'on pourra écrire, au lieu du premier membre,  $\frac{d\Delta\varphi}{d\varphi}$ . L'intégration donnera alors :

$$\Delta\varphi = \frac{5}{16} \left(\frac{m_1}{n}\right)^2 \frac{d}{C} \left[ \frac{\sin 2(\alpha - \varphi)}{(1 - a_2)^2} + \frac{1}{2} \frac{\sin 2(\alpha + \delta - \varphi)}{(1 - a_2 - d_2)^2} + \frac{1}{2} \frac{\sin 2(\alpha - \delta - \varphi)}{(1 - a_2 + d_2)^2} \right].$$

On obtiendra l'expression complète et rigoureuse (autant que l'astronomie peut l'exiger) de la variation de l'angle  $\varphi$ , en ajoutant à l'expression précédente, que nous supposons relative au Soleil, l'expression analogue pour la Lune, multipliée par le coefficient  $f = 2.18$  de l'action lunaire.

En pratique, on pourra même négliger  $d_2$  vis-à-vis de 1, ce qui est d'autant plus licite que cette très petite quantité intervient successivement avec les signes + et -.

On obtiendra ainsi l'expression complète plus simple

$$\Delta\varphi = \frac{5}{8} \left(\frac{m_1}{n}\right)^2 \frac{d}{C} \left[ \frac{\sin 2(\alpha - \varphi)}{(1 - a_2)^2} \cos^2 \delta + f \frac{\sin 2(\alpha' - \varphi)}{(1 - a_2')^2} \cos^2 \delta' \right].$$

Cette expression (\*) montre immédiatement que la variation de la vitesse de rotation de l'écorce solide est la plus grande, lorsque le Soleil et la Lune sont dans le plan de l'équateur, résultat évident à priori.

On voit, de plus, que le maximum absolu se présentera, dans ce cas, lorsque  $\sin 2(\alpha - \varphi)$  et  $\sin 2(\alpha' - \varphi)$  seront à la fois égaux à 1, c'est-à-dire aux syzigies. Dans ce même cas de  $\alpha = \alpha'$  ou  $\alpha' + 12^h$ , la variation sera nulle pour  $\varphi = \alpha$ ; elle atteindra son maximum positif pour  $\varphi = \alpha + \frac{\pi}{4}$ ; redeviendra nulle pour  $\varphi = \alpha + \frac{\pi}{2}$ ; arrivera à son maximum négatif pour  $\varphi = \alpha + \frac{5\pi}{4}$ ; et ainsi de suite. C'est donc de 6 en 6 heures que cette variation passe du maximum au minimum.

Pour nous faire une idée de sa grandeur, commençons par remarquer que la valeur maximum de la parenthèse est égale à 3.2 environ, et que le coefficient  $\frac{5}{8} \left(\frac{m_1}{n}\right)^2 \frac{d}{c}$  diffère très peu, comme il vient d'être dit, du coefficient de la nutation diurne, qui est probablement compris entre 0''.1 et 0''.2.

En prenant 0''.15 en chiffre rond pour la valeur de ce coefficient, la plus grande variation de l'angle  $\varphi$  serait égale à  $3.2 \times 0''.15 = 0''.48 = 0^s.032$  environ.

Il pourrait donc arriver, au moment des syzigies qui ont lieu lorsque le Soleil et la Lune sont dans le voisinage de l'équateur, qu'une pendule astronomique, dont la marche serait parfaite, accusât en 6<sup>h</sup>, comparée au mouvement du ciel, une variation de 0<sup>s</sup>.064, due à un balancement de l'écorce solide autour de son axe de rotation. Ce balancement, qui n'affecte que l'heure, pourrait se nommer *libration de l'écorce terrestre*.

Dans les quadratures voisines de l'équateur et de l'équinoxe, l'action de la Lune sera contraire à celle du Soleil, et la variation de la vitesse angulaire se réduira, par suite, dans le rapport de 1.2 à 3.2 environ.

Enfin, pendant l'été et l'hiver, cette variation sera généralement moins sensible qu'au printemps et en automne.

De bonnes observations, instituées spécialement dans ce but, pourront permettre de vérifier l'existence de ce fait capital, qui provoquera chez les astronomes un étonnement très vif, peut-être accompagné de scepticisme.

(\*) On trouvera l'expression de  $\Delta\varphi$  en coordonnées écliptiques dans notre *Traité des réductions stellaires*. Bruxelles, Hayez. (Déc. 1888.)

Nous reconnaissons volontiers, au surplus, qu'on ne pourra pas tenir compte de notre formule, dans la détermination de l'heure, avant que le coefficient de la nutation diurne et la position du premier méridien aient été calculés avec une précision suffisante.

Il est un point toutefois que nous pouvons signaler dès à présent à l'attention des astronomes.

La théorie donne d'une manière indiscutable la formule de la variation de la vitesse angulaire.

Si même on hésite à en accorder l'existence, malgré celle de la nutation diurne, dont le coefficient est à très peu près égal à celui de cette variation, on reconnaîtra du moins que, s'il est possible d'éliminer cette variation de la détermination de l'heure, il y a tout intérêt à le faire.

Or cela est possible.

La variation de vitesse angulaire est nulle en effet si

$$\frac{\sin 2(\alpha - \varphi)}{(1 - a_2)^2} \cos^2 \delta + f \frac{\sin 2(\alpha' - \varphi)}{(1 - a_2')^2} \cos^2 \delta' = 0.$$

Si l'on résout cette équation par rapport à  $\varphi$ , on trouvera, en posant

$$f \frac{\cos^2 \delta' (1 - a_2)^2 \sin 2\alpha'}{\cos^2 \delta (1 - a_2')^2 \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\xi:$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\sin 2(\alpha + \xi) \sin 2\alpha'}{\sin 2(\alpha' + \xi) \cos 2\alpha}.$$

Or,  $L$  désignant la longitude occidentale du premier méridien par rapport au lieu de l'observation,  $T$  l'heure sidérale en ce lieu, on a  $\varphi = T - L$ , et, connaissant  $\varphi$  et  $L$ , on aura l'heure  $T$  à laquelle le mouvement diurne n'éprouve aucune variation du chef des attractions lunisolaires.

Ici encore, la connaissance de  $L$  est indispensable; mais avant peut-être que le présent travail ait vu le jour, la longitude du premier méridien sera déterminée d'une manière suffisante (\*), pour que les astronomes puissent

(\*) V. *Annuaire de l'Observatoire royal de Bruxelles*, pour 1889. (Déc. 1888.)

effectuer des déterminations de l'heure, indépendantes des variations du mouvement de rotation de l'écorce terrestre.

Celles-ci, pour nous, existent bien certainement.

La nutation diurne, en effet, n'est possible que si le mouvement de l'écorce solide est plus ou moins indépendant de celui du noyau fluide qu'elle recouvre. Or la nutation diurne est prouvée par les meilleures observations. Cette indépendance existe donc. Pourquoi, dès lors, l'écorce n'obéirait-elle pas, dans son mouvement de rotation autour de son axe, aux attractions luni-solaires, de même que leur obéit l'Océan dans ses marées, dont les oscillations présentent la plus grande analogie avec celles de cette écorce ?

Ainsi donc, cette majestueuse horloge du ciel, sur la régularité absolue de laquelle les astronomes de tous les temps ont cru pouvoir étayer leurs observations, est sujette elle-même à des fluctuations périodiques, dans le court intervalle de quelques heures. Et l'homme, à qui il a été donné, par le Créateur, de pénétrer de plus en plus les secrets de la nature, parviendra un jour, si même il n'y est déjà arrivé, à réaliser des appareils doués d'un mouvement plus uniforme que celui qui anime l'écorce solide du globe autour de son axe instantané de rotation.







**DESCRIPTION**  
DES  
**FOSSILES DU CALCAIRE GROSSIER DE MONS.**

---

**QUATRIÈME PARTIE.**

---

**GASTÉROPODES.**

**ORDRE I. — PROSOBRANCHES.**

**SECTION B. — HOLOSTOMES.**

*(Suite et fin.)*

**ORDRE II. — PULMONÉS.**

**ORDRE III. — OPISTHOBRANCHES;**

PAR

ALPH. BRIART & F.-L. CORNET,  
INGÉNIEURS CIVILS,  
MEMBRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

---

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 8 janvier 1887.)

---



# DESCRIPTION

DES

## FOSSILES DU CALCAIRE GROSSIER DE MONS.

---

### GASTÉROPODES.

#### ORDRE I. — PROSOBRANCHES.

##### SECTION B. — HOLOSTOMES.

(Suite et fin.)

---

Genre **SOLARIUM**, Lamk., 1801.

*Car. gén.* — Coquille solide, en cône déprimé, quelquefois trochiforme, anguleuse à la circonférence ; ombilic large et profond, caréné à la périphérie, laissant voir tous les tours de la spire ; ouverture quadrangulaire ou subcirculaire, non nacrée ; labre aigu, tranchant.

*Remarques.* — Le nom d'*Architectonica*, donné à ce genre par Bolten en 1798, ne remplacera probablement pas le nom proposé par Lamarck, malgré son antériorité de quelques années et bien que MM. Adams aient essayé de le rétablir (*Gen. of Moll.*, I, p. 241).

Deshayes établit quatre simples groupes, dont un : *Torinia*, proposé comme genre par Gray en 1840 et qui renferme le plus grand nombre des *Solarium* du bassin de Paris. Il se fonde sur ce fait intéressant qu'il a découvert le squelette calcaire d'un opercule semblable à celui du *Torinia*

dans les couches où abondent le plus les coquilles du *S. patulum*, Lamk. (1824, II, p. 215). Cet opercule se compose d'un cône calcaire évidé et à l'extérieur duquel s'enroule une lame spirale. Mais M. Fischer fait remarquer (*Man. de Conch.*, p. 714) que cette pièce remarquable n'a jamais été trouvée en place et que, sans pousser les déductions aussi loin que Deshayes, on peut au moins en conclure que le genre *Torinia* se trouve à l'état fossile dans le bassin de Paris.

Le genre *Solarium* est apparu dès les temps secondaires, mais on émet quelques doutes sur les plus anciennes espèces. Les espèces tertiaires sont nombreuses; les espèces actuelles sont des mers chaudes.

Le calcaire grossier de Mons ne nous en a fourni qu'une seule espèce. Si les déductions de Deshayes rapportées ci-dessus venaient, plus tard, à être justifiées, elle devrait également entrer dans le genre *Torinia*.

**SOLARIUM MONTENSE, nov. sp.**

Pl. XIX, fig 1a, b, c, d, e.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,005	—	40
Largeur — . . . . .	0,0075	—	100
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0025	—	35
Largeur de l'ombilic à la base . . . . .	0,005	—	40
Angle apical . . . . .			140°

Coquille assez petite, discoïde, deux fois et demie plus large que longue, composée de cinq tours s'enroulant en une spire très peu saillante sous un angle un peu convexe, séparés par des sutures bien marquées; l'extérieur des tours du côté de la spire est orné de nombreux filets longitudinaux, le plus fort à la partie postérieure près de la suture et débordant un peu le tour précédent, les autres au nombre de huit ou neuf, plus petits et plus serrés surtout vers le milieu du tour; l'un d'eux, à la partie antérieure en avant de la circonférence de la base, est un peu plus fort et fait saillie sans atteindre les dimensions du filet postérieur. Tous ces ornements portent des granules en forme d'anneaux disposés suivant la direction de stries d'accroissement fort obliques; base très large, limitée extérieurement par une carène très saillante et obtuse, ornée de nombreux filets longitudinaux serrés et plus finement granuleux, sauf vers l'ombilic; celui-ci large et profond, limité par une carène portant une côte granuleuse plus forte que toutes les autres, la paroi rejoignant le tour précédent de façon à laisser déborder ce dernier; ouverture polygonale à peu près aussi haute que large.

*Remarques.* — Cette belle coquille est très rare dans le calcaire grossier de Mons; nous n'en possédons qu'un spécimen très bien conservé.

Les espèces du genre *Solarium* ont souvent des liens de parenté si rapprochés que les comparaisons peuvent être aussi nombreuses qu'embarrassantes. Nous ne citerons que deux espèces du bassin de Paris, le *S. plicatum*, Lamk. (*Ann. du Museum*, t. IV, p. 55, et t. VIII, pl. XXXIII, fig. 1 à 6, et Desh., 1824, II, p. 219, pl. XXIV, fig. 16, 17, 18), dont les ornements sont beaucoup plus gros surtout à la carène périombilicale, et le *S. canaliculatum*, Lamk. (*Ann. du Museum*, t. IV, p. 54, n° 3, et Desh., 1824, p. 220, pl. XXIV, fig. 19-21), dont, au contraire, tous les ornements sont plus fins et la circonférence de la base plus fortement carénée. En général, ce qui semble différencier notre coquille de toutes celles du bassin de Paris, c'est la manière d'être de l'ombilic : le retour de la spire s'y fait d'une façon abrupte, laissant déborder fortement la carène périombilicale du tour précédent en produisant une suture profonde, tandis que dans les espèces de France le retour de la spire se fait beaucoup plus près et quelquefois sur la carène même de façon à produire une suture semi-superficielle.

- FIG. 1a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.  
 — 1b, vue par-dessus, grossie trois fois.  
 — 1c, vue du côté de la spire, grossie trois fois.  
 — 1d, vue du côté de l'ombilic, grossie trois fois.  
 — 1e, grandeur naturelle.

Genre **LACUNA**, Turton, 1827.

*Car. gén.* — Coquille mince, ovale, conoïde; ouverture entière, ovale, anguleuse à l'extrémité postérieure; labre aigu, arqué; columelle aplatie, bordée en dehors par un sillon parallèle descendant dans l'ombilic.

*Remarques.* — Les espèces de ce genre ont ordinairement un faciès spécial qui les fait facilement reconnaître. On en indique une du Trias (*L. canalifera*, Laube). Elles sont très nombreuses dans les terrains tertiaires. Le calcaire grossier de Mons ne nous en a fourni qu'une seule.

## DESCRIPTION DES FOSSILES

LACUNA LINEATA, *nov. sp.*

Pl. XIX, fig. 2a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille. . . . .	0,003	— 100
Largeur — . . . . .	0,0015	— 50
Hauteur du dernier tour .. . . .	0,00125	— 42
Angle apical . . . . .		29°

Coquille petite, allongée, composée de cinq tours légèrement arrondis, s'enroulant sous un angle assez régulier, le sommet de la spire un peu obtus, séparés par des sutures à peu près superficielles et peu discernables à cause de sa ressemblance avec les ornements qui se composent de filets longitudinaux très fins, au nombre de douze à quatorze à l'extérieur des tours; base conique proéminente, ornée d'une dizaine de filets semblables en avant d'une carène obtuse qui la limite extérieurement et sur laquelle se fait le retour de la spire; ouverture ovale, assez grande, droite, un peu dilatée, sinueuse en arrière; bord droit arqué, rejoignant la suture en ligne droite; bord antérieur un peu sinueux et comme tronqué; columelle inclinée sur l'ouverture; le bord columellaire fortement infléchi au milieu.

*Remarques.* — Cette jolie espèce est rare dans le calcaire grossier de Mons. Elle est plus petite que le *L. praelonga*, Desh. (1861, II, p. 577, pl. XVII, fig. 10-12) du calcaire grossier de Paris dont elle se rapproche beaucoup par ses ornements, mais elle a la spire plus courte et l'ouverture plus allongée.

FIG. 2a, vue du côté de l'ouverture, grossie dix fois.  
— 2b, vue par-dessus, grossie dix fois.  
— 2c, grandeur naturelle.

Genre **RISSOA.**

*Car. gén.* — Coquille petite, souvent turriculée, quelquefois courte et subglobuleuse; ouverture oblongue, entière; péristome simple ou réfléchi ou à bourrelet plus ou moins saillant.

*Remarques.* — Ce qui distingue le genre *Rissoa* des genres suivants, c'est l'ouverture simple, non sinueuse ni canaliculée en avant.

On cite quelques espèces des terrains secondaires, mais elles deviennent surtout abondantes dans les terrains tertiaires. Elles sont à leur maximum dans les mers actuelles.

*RISSOA PULCHRA*, nov. sp.

Pl. XIX, fig. 4a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille. . . . .	0,0025	— 100°
Largeur — . . . . .	0,00125	— 50
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,001	— 40
Angle apical . . . . .		40° à 42°

Coquille très petite, globuleuse, formée de quatre à cinq tours s'enroulant sous un angle assez peu convexe, arrondis, saillants, séparés par des sutures profondes crénelées, ornés de côtes transverses, obliques, un peu arquées à la partie postérieure, bien marquées et traversées de très fines stries longitudinales; ouverture arrondie; bord columellaire infléchi au milieu; bord droit arqué, fortement épaissi en un bourrelet extérieur; bord antérieur un peu sinueux vers la columelle.

*Remarques.* — Cette élégante petite coquille n'est pas complète, le bord droit manque en partie à l'unique spécimen que nous possédons, mais nous ne conservons aucun doute quant à la détermination générique. Elle est très rare dans le calcaire grossier de Mons. C'est un *R.* du groupe du *R. nana*, Lamk. (*Bulimus nanus*, ANN. DU MUSEUM et *Paludina nana*, Desh., 1824, II, p. 132, pl. XV, fig. 17-18 et *Rissoa nana*, 1861, II, p. 409, pl. XXIV, fig. 10-12) qui a les côtes transverses beaucoup moins obliques. La figure de la même espèce, donnée par Baudon (*Journ. de conch.*, 1853, IV, p. 328, pl. IX, fig. 6) sous le nom de *R. abbreviata*, lui ressemble davantage sous ce rapport, mais l'ouverture est notablement différente, le bord n'étant pas continu. Cette espèce est du calcaire grossier. Mais il est une autre forme des sables inférieurs qui s'en rapproche beaucoup plus, ayant à peu près les mêmes dimensions et les côtes également obliques, c'est le *R. misera*, Desh. (1861, II, p. 410, pl. XXIV, fig. 13-15). Pour cette nouvelle comparaison, il est nécessaire de corriger notablement la figure de Deshayes d'après la description qu'il donne de la coquille, en réalité plus élancée et qui a sensiblement les proportions de l'espèce de Mons. Nous ne pouvons



les distinguer que par cette circonstance que les sillons séparant les côtes s'arrêtent brusquement à la circonférence de la base dans l'espèce parisienne, tandis qu'ils finissent insensiblement et se prolongent même sur la base dans l'espèce de Mons.

FIG. 4a, vue du côté de l'ouverture, grossie treize fois.  
 — 4b, vue par-dessus, grossie treize fois.  
 — 4c, grandeur naturelle.

**RISSOA CRATICULA, nov. sp.**

Pl. XIX, fig. 5a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,002	—	100
	Largeur — . . . . .	0,0013	—	65
	Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,001	—	50
	Angle apical . . . . .			55°

Très petite coquille, globuleuse, de dimensions proportionnelles assez variables, formée de cinq à six tours arrondis, saillants, séparés par des sutures profondes et crénelées, s'enroulant sous un angle un peu convexe, ornés de fortes côtes transverses, obliques, un peu arquées à la partie postérieure où elles acquièrent leur maximum de saillie en y dessinant une vague carène, traversées de cordonnets longitudinaux moins saillants, dont huit ou neuf restent à découvert, produisant à l'extérieur des tours une cancellation régulière, et se continuant sur toute la base avec une égale intensité, tandis que les côtes transverses finissent insensiblement et s'y prolongent à l'état de simples stries de croissance jusqu'à la columelle; ouverture assez régulièrement ovale, oblique; bord droit légèrement arqué, terminé par un bourrelet extérieur assez saillant; bord gauche également arqué.

*Remarques.* — Nous possédons plusieurs spécimens de cette espèce qui, comme l'espèce précédente (*R. Pulchra*), appartient au groupe du *R. nana*, Lamk., mais qui, par ses côtes transverses obliques, est plus voisine du *R. misera*, Desh. Notre coquille, étant cancellée d'une manière très remarquable et très persistante, s'écarte notablement de ces deux espèces. Le *R. cingulata*, Desh. (1861, II, p. 408, pl. XXIV, fig. 16-18), est une autre espèce très rare du calcaire grossier de Paris, qui, d'après la figure, paraît être également cancellée, mais pas d'une façon aussi caractéristique que l'espèce

de Mons. Cette dernière a les ornements transverses beaucoup plus forts et moins nombreux.

FIG. 5a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.  
 — 5b, vue par-dessus, grossie trois fois.  
 — 5c, grandeur naturelle.

**RISSOA INCERTA, nov. sp.**

Pl. XIX, fig. 6a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,005 — 100
	Largeur — . . . . .	0,003 — 60
	Angle apical . . . . .	40° à 42°

Coquille petite, turriculée, conique, composée de sept à huit tours s'enroulant régulièrement, séparés par des sutures profondes, portant deux carènes bien marquées limitant une partie plate à l'extérieur des tours, la carène antérieure s'effaçant un peu à la circonférence de la base; ces tours sont ornés de côtes longitudinales, dont la plus forte occupe la carène antérieure; en arrière de cette côte, il y en a cinq autres plus petites et trois en avant; ces ornements sont recoupés par d'autres côtes transversales presque d'égales dimensions et passant au-dessus des premières en les rendant tuberculeuses, tandis que les sillons qui les séparent produisent des ponctuations à leurs intersections avec les sillons longitudinaux; base conique, non ombiliquée, lisse et ne montrant plus, vers la circonférence, que trois ou quatre sillons concentriques peu accusés et non recoupés de sillons transverses; ouverture arrondie.

*Remarques.* — Le spécimen que nous possédons de cette espèce très rare est assez incomplet; la partie antérieure de l'ouverture est enlevée ainsi que le sommet de la spire, ce qui rend un peu douteux le nombre de tours que nous avons indiqué. Si nous en jugeons d'après le fragment conservé du quatrième tour, les premiers pourraient bien avoir été lisses, ce qui tendrait à la rapprocher du *R. cingulata*, Desh. (1866, II, p. 408, pl. XXIV, fig. 16-18). Les deux espèces sont très voisines par les côtes longitudinales dont elles sont ornées, mais les ornements transverses sont tout différents. Du reste, il est facile de les distinguer par la taille, l'espèce de Mons étant beaucoup plus forte, et surtout par sa base presque dépourvue d'ornements.

Nous devons dire cependant que nous ne sommes pas absolument certains

du genre que nous donnons à cette espèce : ce pourrait bien être un *Mathildia* ; mais l'extrémité de la spire, qui seule pourrait décider la question, manquant, nous préférons nous en tenir à notre première détermination.

FIG 6a, vue du côté de l'ouverture, grossie six fois.  
— 6b, vue par-dessus, grossie six fois.  
— 6c, grandeur naturelle.

**RISSOA TENUIS, nov. sp.**

Pl. XIX. fig. 3a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0025	—	100
Largeur — . . . . .	0,001	—	67
Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,001	—	67
Angle apical . . . . .			20°

Petite coquille allongée, turriculée, lisse, brillante, ornée de fines stries de croissance presque droites, composée de six à huit tours fortement carénés au milieu, séparés par des sutures profondes, s'enroulant sous un angle aigu et régulier aux premiers tours, mais devenant convexe aux derniers, ce qui donne à la coquille un aspect cylindrique ; base conique, arrondie, terminée à la circonférence par une seconde carène plus légère, sur laquelle se fait le retour de la spire ; ouverture ovale, oblique, arrondie en avant, aiguë en arrière ; péristome presque continu, simple mais muni un peu en arrière d'un bourrelet arrondi, saillant ; bord droit largement arqué ; bord gauche recouvrant en partie une fente ombilicale bordée, du côté de la base, par une carène saillante, un peu arrondie.

*Remarques.* — Cette espèce remarquable est très rare ; il n'en existe aucune qui s'en approche dans le bassin de Paris, et si nous voulions trouver des points de comparaison, nous devrions avoir recours plutôt aux espèces vivantes qu'aux espèces fossiles.

FIG. 3a, vue du côté de l'ouverture, grossie douze fois.  
— 3b, vue par-dessus, grossie douze fois.  
— 3c, grandeur naturelle.

Genre **RISSOINA.**

*Car. gén.* — Coquille turriculée, à tours nombreux peu arrondis ; ouverture ovale, semi-lunaire, aiguë en arrière, canaliculée ou subcanaliculée en avant ; labre épaissi et un peu réfléchi, saillant en avant.

*Remarques.* — La forme de l'ouverture suffit amplement pour distinguer ce genre du genre *Rissoa*. Il possède cependant un caractère plus tranché dans la forme de l'opercule qui, à sa face interne, porte un appendice clavi-forme dirigé vers le bord columellaire. Mais ce caractère échappe toujours aux paléontologistes dans les cas d'opercules cornés.

Les *Rissoina* sont moins abondantes que les *Rissoa*. Elles ont aussi commencé à se montrer dès les temps secondaires, sont également devenues plus nombreuses aux temps tertiaires et ont acquis leur maximum dans les mers actuelles. On les trouve dans les mers chaudes et tempérées.

**RISSOINA NUDA, nov. sp**

Pl. XIX, fig. 7a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,008	— 100
	Largeur — . . . . .	0,00575	— 47
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,005	— 55
	Angle apical . . . . .		52°

Coquille conique, turriculée, composée de huit tours presque plats, assez larges, séparés par des sutures linéaires, s'enroulant en une spire aiguë, régulière, ornés seulement de stries de croissance presque droites, le dernier assez développé; base circonscrite par un renflement sur lequel se fait le retour de la spire; ouverture assez grande, semi-lunaire, oblique, dilatée, subcanaliculée en avant et munie d'une gouttière à l'angle postérieur, à péristome continu; bord droit largement arqué, saillant en avant sur l'ouverture, mince et tranchant, mais épaissi en un bourrelet intérieur très peu visible en dehors; bord gauche infléchi au milieu, se relevant vers l'extrémité de la columelle pour former le canal.

*Remarques.* — Cette espèce est très rare; nous n'en possédons qu'un seul spécimen.

Elle est très voisine du *R. levigatissima*, Desh., (1857, II, p. 397, pl. XXII, fig. 7-9), mais les tours de l'espèce de Mons sont plus larges et l'ouverture est plus canaliculée à la partie antérieure, ce qui en fait plus franchement un *Rissoina*. Le *R. levigatissima* est de l'étage du calcaire grossier.

FIG. 7a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.

— 7b, vue par-dessus, grossie trois fois.

— 7c, grandeur naturelle.

**RISSOINA LABRATA, nov. sp.**

Pl. XIX, fig. 8a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,005	—	100
Largeur — . . . . .	0,0015	—	50
Hauteur du dernier tour. . . . .	0,0015	—	50
Angle apical. . . . .	20° à 25°		

Très petite coquille conique, turriculée, lisse et brillante, composée de six tours un peu arrondis, assez larges, s'enroulant en une spire légèrement convexe au sommet, séparés par des sutures linéaires peu profondes, le dernier tour très développé; ouverture semi-lunaire, oblique, aiguë en arrière, subcanaliculée en avant; bord droit dilaté, largement arqué, mince et tranchant, mais s'épaississant en arrière en un large bourrelet assez marqué à l'intérieur de la coquille, plus effacé à l'extérieur; bord columellaire infléchi au milieu, saillant à la base de la columelle.

*Remarques.* — Cette coquille, la plus petite de nos *Rissoina*, est très abondante dans le calcaire grossier de Mons. Elle est lisse, polie et entièrement dépourvue d'ornements; c'est ce qui la distingue principalement du *R. polita*, Desh. (*Melania*, 1824, II, p. 116, pl. XIV, fig. 20, 21, et 1858, II, p. 396), laquelle est beaucoup plus grande et, dit Deshayes dans son dernier ouvrage, « ne mérite pas, autant que nous l'avons cru autrefois, le nom de *polita* . . . , examinée à l'aide d'une forte loupe, elle est recouverte de stries croisées très fines ». La *R. polita* est de l'étage du calcaire grossier.

Deux autres coquilles du bassin de Paris, à peu près de même taille que la nôtre et, comme elle, lisses et brillantes, le *R. Schwartzi*, Desh., (1858, II, p. 397, pl. XXII, fig. 26-28) et le *R. fallax*, Desh., (id., p. 398, pl. XXII, fig. 20-21) en sont facilement distinguées par la régularité de leur spire, le labre moins dilaté et le canal antérieur moins prononcé. Elles appartiennent au calcaire grossier supérieur et aux sables moyens.

FIG. 8a, vue du côté de l'ouverture, grossie dix fois,  
— 8b, vue par-dessus, grossie dix fois.  
— 8c, grandeur naturelle.

**RISSOINA TENUICANCELLATA, nov. sp.**

Pl. XIX, fig. 9a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0105	— 100
Largeur — . . . . .	0,004	— 58
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,00375	— 56
Angle apical . . . . .		28° à 50°

Coquille conique, turriculée, composée de neuf à dix tours arrondis s'enroulant régulièrement sous un angle très aigu, séparés par des sutures linéaires profondes, paraissant lisses à l'œil nu, mais montrant à la loupe de très fines stries longitudinales recoupées par d'autres stries transverses d'accroissement légèrement arquées; base arrondie; ouverture assez grande, oblique, semi-lunaire, aiguë en arrière, subcanaliculée en avant, à péristome continu; bord droit largement arqué, dilaté, saillant sur l'ouverture, épaissi en un bourrelet arrondi bien marqué; bord columellaire infléchi au milieu, se relevant un peu près du canal antérieur.

*Remarques.* — Cette espèce est assez rare dans le calcaire grossier de Mons. Elle se rapproche, par ses ornements, du *R. polita*, Desh. (Voy. *R. labrata*, p. 12), mais ses tours sont beaucoup plus arrondis; c'est aussi par là ainsi que par sa spire plus conique et ses ornements qu'elle se distingue du *R. nuda* (p. 11).

FIG. 9a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.  
 — 9b, vue par-dessus, grossie trois fois.  
 — 9c, grandeur naturelle.

*Genre* **KEILOSTOMA**. 1848.

*Car. gén.* — Coquille allongée, turriculée, régulièrement conique; ouverture entière, courte, versante à la base, anguleuse en arrière; péristome très épais, variqueux en dehors, saillant sur l'ouverture à sa partie moyenne; bord columellaire largement bordé.

*Remarques.* — Ce genre, créé par Deshayes pour des espèces rapportées d'abord au genre *Melania* (*M. marginata*, Brug. sp.) et qui ne pouvaient y rester, entre autres à cause du très fort bourrelet du bord droit, ne peut pas

être non plus confondu avec le genre *Rissoina*, à cause de son ouverture fortement élargie antérieurement et non canaliculée.

Les espèces actuellement connues sont des terrains tertiaires. La plus ancienne est des sables de Bracheux, c'est-à-dire de l'assise la plus inférieure du bassin de Paris. Celle que nous décrivons du calcaire grossier de Mons est donc la plus ancienne du genre.

**KEILOSTOMA TYPICA, nov. sp.**

Pl. XIX, fig. 10a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,012 $\frac{1}{2}$ —	100
Largeur — . . . . .	0,005 —	40
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,004 $\frac{1}{4}$ —	54
Angle apical . . . . .		25°

Coquille conique, turriculée, formée de neuf à dix tours plats, s'enroulant en une spire aiguë, séparés par des sutures bien marquées et subcanaliculées, ornés de plis transverses peu obliques, parallèles aux stries d'accroissement, irréguliers, larges et peu saillants; dernier tour bien développé; base arrondie; ouverture semi-lunaire, aiguë en arrière, arrondie et un peu sinueuse en avant; bord columellaire infléchi au milieu, revêtu d'une large callosité; bord droit saillant, épaissi en bourrelet extérieur variqueux, contournant la columelle et s'étalant en une plaque arrondie regagnant la callosité du bord gauche.

*Remarques.* — Cette espèce est très remarquable et pourrait être offerte comme un type du genre, tout aussi bien que le *K. marginata* du bassin de Paris (*Bulimus turricula*, Brug.; *Melania marginata*, Lamk.; *Keilostoma turricula*, Desh., *Paryphostoma turricula*, Bayan), avec laquelle elle a une ressemblance de forme incontestable, mais dont elle se distingue parfaitement par les ornements extérieurs des tours.

FIG. 10a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.

— 10b, vue par-dessus, grossie trois fois.

— 10c, grandeur naturelle.

Genre **BARLEEIA**, Clark., 1855.

*Car. gén.* — Coquille conique, turbinée, à tours légèrement convexes, lisses; ouverture ovale, entière, arrondie en avant, aiguë en arrière; labre mince, aigu, simple ou dilaté en dehors en forme d'épaississement.

*Remarques.* — Le genre *Fairbankia*, Blanford, 1868, conviendrait mieux à notre espèce; mais M. Fischer (*Man. de Conch.*, p. 722) y attache assez peu d'importance et en fait un sous-genre du *Barleeia*, ce à quoi nous nous rallions. Ce genre se distingue des *Rissoina*, parce que l'ouverture n'est pas canaliculée, et des *Keilostoma*, parce que le bord n'est pas pourvu d'un véritable bourrelet.

Jusqu'à présent, aucun *Barleeia* fossile n'a été donné, les espèces appartenant à ce genre ayant été rangées parmi les *Rissoina* et d'autres genres. Dans tous les cas, ces espèces sont tertiaires, et nous pouvons considérer l'espèce du calcaire grossier de Mons comme la plus ancienne du genre.

**BARLEEIA SIMPLEX**, *nov. sp.*

Pl. XIX, fig. 11a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,007	— 100
	Largeur — . . . . .	0,005	— 45
	Hauteur du dernier tour. . . . .	0,0023	— 36
	Angle apical. . . . .		25° à 30°

Petite coquille lisse et brillante, formée de six tours arrondis, séparés par des sutures profondes, s'enroulant régulièrement en une spire pointue, ornés au dernier tour de stries d'accroissement sinueuses près de la suture mais obliquant en avant pour reprendre ensuite la courbure en arrière du bord droit; dernier tour assez développé, ovalaire; ouverture droite, élargie en avant, sinueuse en arrière, à péristome continu; bord droit saillant, avançant sur l'ouverture à sa partie moyenne, évasé et épaissi en un léger bourrelet intérieur, le retour antérieur vers la columelle moins arqué; bord columellaire infléchi au milieu, rejoignant le bord antérieur assez brusquement en formant un angle bien marqué mais pas de canal.

*Remarques.* — Cette espèce est très abondante dans le calcaire grossier de Mons. Deshayes, qui n'a pas admis ce genre, a probablement réparti les



espèces qu'il a rencontrées dans les genres voisins, ce qui rend les comparaisons assez difficiles. Il est probable que quelques *Rissoina* polies qu'il donne dans son dernier ouvrage, pourraient bien être des *Barleeia*; mais en l'absence de spécimens, nous ne pouvons être bien catégoriques, ni hasarder de comparaisons.

FIG. 11a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.

— 11b, vue par-dessus.

— 11c, grandeur naturelle.

Genre **HYDROBIA**.

*Car. gén.* — Coquille petite, imperforée, mince, lisse, ovale, conoïde à tours convexes; ouverture ovale, aiguë en arrière, à péristome continu; bord extérieur simple et tranchant.

*Remarques.* — Deshayes, qui fait peu de cas des caractères de l'opercule, a réuni ce genre au genre *Bithinia*. Il est certain que l'opercule est rarement de quelque secours aux paléontologistes; mais il est d'autres caractères qui en dérivent et dont il est utile de faire usage.

Tous les *Hydrobia* fossiles sont d'âge tertiaire; les espèces du calcaire grossier de Mons se trouvent ainsi être les plus anciennes du genre.

**HYDROBIA ELONGATA**, *nov. sp.*

Pl. XX, fig. 2a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,0025	— 100
	Largeur — . . . . .	0,001	— 40
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0008	— 52
	Angle apical . . . . .		23°

Coquille petite, conique, allongée, turriculée, à spire pointue, composée de cinq tours lisses, brillants, arrondis, assez larges, s'enroulant assez régulièrement, séparés par des sutures profondes; dernier tour allongé et régulièrement développé; ouverture arrondie, un peu sinueuse en arrière; péristome simple et continu.

*Remarques.* — Cette espèce est très rare dans le calcaire grossier de

Mons. Elle se distingue facilement de nos autres espèces par sa forme plus allongée.

FIG. 2a, vue du côté de l'ouverture, grossie huit fois.  
— 2b, vue par-dessus.  
— 2c, grandeur naturelle.

**HYDROBIA TENUIS, nov. sp.**

Pl. XX, fig. 1a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0035 — 100
Largeur — . . . . .	0,002 — 57
Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,0015 — 44
Angle apical . . . . .	45° à 50°

Petite coquille conique, mince, composée de cinq tours arrondis séparés par des sutures profondes, à surface lisse et brillante, s'enroulant sous un angle assez régulier; base arrondie; ouverture ovale, arrondie, oblique, anguleuse en arrière; péristome mince, continu; bord gauche un peu infléchi à la base de la columelle.

*Remarques.* — Cette espèce est très commune dans le calcaire grossier de Mons; elle est voisine du *H. depressa* (p. 17), mais, outre qu'elle n'est pas déprimée comme cette dernière, elle s'en distingue facilement par sa spire plus régulière et plus allongée.

FIG. 1a, vue du côté de l'ouverture, grossie six fois.  
— 1b, vue par-dessus.  
— 1c, grandeur naturelle.

**HYDROBIA DEPRESSA, nov. sp.**

P. XX, fig. 3a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0040 — 100
Largeur — . . . . .	0,0025 — 62
Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,002 — 50
Angle apical . . . . .	50° à 55°

Coquille petite, mince, globuleuse, ovale, sensiblement déprimée, composée de cinq tours arrondis, à sutures assez peu profondes, à surface lisse et brillante, s'enroulant sous

un angle un peu convexe; base arrondie; ouverture contractée, ovale, oblique, anguleuse en arrière, à péristome mince et continu; bord gauche un peu infléchi à la base de la columelle; bord droit largement arqué.

*Remarques.* — Cette coquille est déprimée normalement au plan de l'ouverture, c'est-à-dire que la largeur des tours, qui est de 2 1/2 millimètres dans un sens parallèle à ce plan, n'est plus que de 2 millimètres dans le sens perpendiculaire. Cette particularité ne se remarque pas dans nos autres espèces. Elle est très abondante dans le calcaire grossier de Mons.

FIG. 5a, vue du côté de l'ouverture, grossie cinq fois et demie.  
— 5b, vue par-dessus.  
— 5c, grandeur naturelle.

**HYDROBIA REGULARIS, nov. sp.**

Pl. XX, fig. 4a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille. . . . .	0,0063	— 100
Largeur — . . . . .	0,00325	— 50
Hauteur de l'ouverture. . . . .	0,00300	— 46
Angle apical . . . . .		30°

Coquille petite, conique, turriculée, composée de six à sept tours arrondis, séparés par des sutures linéaires assez profondes, lisses et brillants, ornés de stries de croissance généralement très fines, mais mieux marquées sur la seconde moitié du dernier tour; base ovale; ouverture assez grande, peu oblique, arrondie en avant, aiguë en arrière; péristome simple, continu, un peu versant antérieurement; bord droit largement arqué; bord gauche fortement infléchi au milieu, recouvrant en partie une fente ombilicale.

*Remarques.* — Cette espèce n'est pas très rare dans le calcaire grossier de Mons. Elle est beaucoup plus allongée que le *H. tenuis* (p. 17) et son angle d'enroulement est plus régulier et plus aigu. Nous ne connaissons, dans le bassin de Paris, aucune espèce avec laquelle nous puissions la comparer.

FIG. 4a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.  
— 4b, vue par-dessus.  
— 4c, grandeur naturelle.

**HYDROBIA MINUTISSIMA, nov. sp.**

Pl. XX, fig. 5a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,002	—	100
Largeur — . . . . .	0,001	—	50
Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,001	—	50
Angle apical . . . . .			55°

Très petite coquille ovale, allongée, composée de quatre tours légèrement arrondis, séparés par des sutures peu profondes, s'enroulant sous un angle convexe, les premiers fort étroits, le dernier très développé, à surface lisse et brillante; ouverture un peu contractée, ovale, anguleuse en arrière, peu oblique, à péristome continu.

*Remarques.* — Deshayes, qui n'a pas admis le genre *Hydrobia*, décrit plusieurs coquilles qui semblent avoir beaucoup de rapports avec cette espèce et la suivante; telles sont : le *Bithinia pulvis* (1862, II, p. 516, pl. XXXIV, fig. 38-40), de l'étage des lignites, qui est plus petit (1<sup>mm</sup> de longueur) à l'ouverture beaucoup plus contractée et rejetée vers l'axe de la coquille, et le *B. miliola* (1882, II, p. 516, pl. XXXIV, fig. 35-39) dont la taille se rapproche beaucoup plus de celle de notre espèce (2<sup>mm</sup> de longueur) ainsi que la forme générale; mais elle est plus globuleuse et a l'ouverture plus oblique.

Cette espèce est assez rare dans le calcaire grossier de Mons.

FIG. 5a, vue du côté de l'ouverture, grossie dix fois.

— 5b, vue par-dessus.

— 5c, grandeur naturelle.

**HYDROBIA NANA, nov. sp.**

Pl. XX, fig. 6a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille. . . . .	0,0025	—	100
Largeur — . . . . .	0,00125	—	50
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,00125	—	50
Angle apical . . . . .			25°

Très petite coquille, ovale, allongée, composée de quatre tours presque plats, lisses et brillants, assez étroits sauf le dernier qui est arrondi et très développé, séparés par des

sutures presque superficielles, s'enroulant sous un angle convexe; ouverture ovale, à péristome continu, anguleuse en arrière, un peu oblique et rejetée en dehors, ce qui produit une suture beaucoup mieux marquée au dernier tour.

*Remarques.* — Cette espèce, assez rare dans le calcaire grossier de Mons, est très voisine de la précédente (*H. minutissima*) et presque d'aussi petite taille; de forme moins régulière, elle a les tours plus plats et l'ouverture rejetée en dehors. Nous ne voyons aucun des petits *Bithinia* du bassin de Paris avec lequel nous puissions la comparer.

FIG. 6a, vue du côté de l'ouverture, grossie dix fois.

— 6b, vue par-dessus.

— 6c, grandeur naturelle.

Genre **TRUNCATELLA**, Risso, 1826.

*Car. gén.* — Coquille petite, turriculée, à tours nombreux; spire pointue dans le jeune âge, tronquée et réduite à trois ou quatre tours dans l'âge adulte; ouverture ovale, entière, à péristome continu, épais; operculée.

*Remarques.* — La place que ce genre doit occuper dans la classification n'est pas encore bien déterminée. On s'accorde à le rapprocher des *Cyclostomes* qui ont présenté des difficultés analogues. Ce genre n'est représenté, dans les terrains tertiaires, que par deux espèces données par Deshayes. Les deux espèces du calcaire grossier de Mons sont donc les plus anciennes et marquent l'origine du genre.

**TRUNCATELLA CYLINDRATA**, *nov. sp.*

Pl. XIX, fig, 12a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille (à partir de la troncature).	0,0045	—	100
	Largeur	0,002	—	44
	Hauteur du dernier tour	0,0015	—	35
	Angle apical			7° à 8°

Petite coquille presque cylindrique, réduite à trois ou quatre tours arrondis, assez larges, lisses, brillants, ornés seulement de très fines stries de croissance, séparés par des

sutures profondes, s'enroulant régulièrement sous un angle très faible; sommet remplacé par une spire plane; base assez allongée, ovale; ouverture ovale, contractée, un peu anguleuse en arrière, légèrement oblique et quelque peu rejetée en dehors; péristome continu, mince, renflé extérieurement et un peu en arrière par un bourrelet bien marqué; bord columellaire détaché du tour précédent.

*Remarques.* — Deshayes décrit deux espèces du calcaire grossier de Paris ayant entre elles beaucoup d'affinités et très voisines de la nôtre. Celle qui s'en rapproche le plus est le *T. parisiensis* (1861, II, p. 422, pl. XVIII, fig. 28-30), qui a également un bourrelet au bord droit, mais quelque peu différent si nous en jugeons d'après la figure. L'espèce de Deshayes a conservé quatre à cinq tours qui paraissent enroulés sous un angle un peu plus aigu.

Cette espèce est assez rare dans le calcaire grossier de Mons.

FIG. 12a, vue du côté de l'ouverture, grossie cinq fois.

— 12b, vue par-dessus.

— 12c, grandeur naturelle.

TRUNCATELLA MINOR, nov. sp.

Pl. XIX, fig. 13a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,0025	— 100
	Largeur — . . . . .	0,001	— 40
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,00075	— 50
	Angle apical . . . . .		12°

Très petite coquille presque cylindrique, réduite à trois tours arrondis mais peu sail-lants, larges, lisses et brillants, montrant seulement quelques stries d'accroissement visibles à la loupe, séparés par des sutures bien marquées et subcanaliculées, s'enroulant régu-lièrement sous un angle très faible; sommet remplacé par une spire presque plane; dernier tour bien développé; base allongée, ovale; ouverture petite, ovale, contractée, oblique, arrondie en avant, atténuée en arrière, quelque peu rejetée en dehors; péris-tome simple, continu; bord droit largement arqué; bord columellaire presque droit, détaché du tour précédent.

*Remarques.* — Cette espèce n'a guère que la moitié de la taille de la précédente. Cependant elle a incontestablement atteint l'âge adulte.

D'autres différences se remarquent encore et en font évidemment une espèce distincte, telles que les tours plus larges et plus aplatis et l'absence de bourrelet extérieur au bord droit.

Nous ne possédons qu'un seul spécimen de cette espèce.

FIG. 15a, vue du côté de l'ouverture, grossie huit fois.

— 15b, vue par-dessus.

— 15c, grandeur naturelle.

Genre **PALUDINA**, Lamk, 1812.

*Car. gén.* — Coquille assez mince, conique ou globuleuse, turbinée, à tours arrondis; ouverture légèrement angulaire en arrière, à péristome continu, simple et entier.

*Remarques.* — Ce genre apparaît, pour la première fois d'une façon certaine, dans les dépôts d'eau douce de la base des terrains crétacés (Wealdien). Il se multiplie considérablement dans les terrains tertiaires et se trouve actuellement à son maximum dans les eaux douces des deux continents.

Le calcaire grossier de Mons proprement dit ne nous a pas fourni de *Paludine*. L'unique espèce que nous décrivons provient du calcaire lacustre à *Physa*; mais comme cette assise constitue le terme supérieur du système montien, il est tout naturel de la donner ici.

**PALUDINA LAMBERTI**, nov. sp.

Pl. XIX, fig. 14a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,017? — 100
Largeur — . . . . .	0,014 — 82
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,010 — 59
Angle apical . . . . .	90°

Coquille globuleuse, à tours peu nombreux, arrondis, séparés par des sutures profondes, ne montrant pour tout ornement que de fines stries de croissance obliquant un peu en arrière; dernier tour très développé; base ovale, ombiliquée; ouverture grande, ovale, arrondie mais un peu anguleuse en arrière et oblique par rapport à l'axe de la coquille.

*Remarques.* — M. le professeur G. Lambert nous a obligeamment communiqué les échantillons recueillis par lui du sondage de la caserne de cavalerie et de la prison de Mons. Nous y avons trouvé l'unique spécimen du genre *Paludina* du système montien; nous nous faisons un véritable plaisir d'y attacher le nom de M. Lambert.

Malheureusement, cette coquille ne se trouve, comme toutes celles du calcaire lacustre supérieur, qu'à l'état de moule. Dans le cas qui nous occupe, il ne s'agit même que du moule intérieur. De plus, l'extrémité de la spire est enlevée, ce qui rend un peu douteuse la longueur de la coquille donnée plus haut. Cependant, toutes les autres particularités sont assez précises. L'espèce est principalement caractérisée par la hauteur proportionnelle de l'ouverture et du dernier tour, et, à ce point de vue, celle du bassin de Paris avec laquelle elle semble avoir le plus de rapports est le *P. proavia*, Desh. (1862, II, p. 482, pl. XXXII, fig. 13-14), des sables inférieurs de Jonchery. Les deux coquilles sont à peu près de la même taille, mais la forme toute particulière de l'ouverture chez l'espèce française, plus allongée et plus ovale, en même temps que l'absence de toute trace de fente ou perforation ombilicale, font évidemment de la coquille de Mons une espèce distincte.

On pourrait certainement hasarder d'autres comparaisons, peut-être même plus probables (*P. aspera*, Michaud; *P. Matheroni*, Desh.), surtout si on réfléchit que les tours des *Paludines* se modifient souvent dans le sens d'un rétrécissement proportionnel à mesure que la coquille avance en âge. La coquille de Mons pourrait bien, en effet, n'être que le jeune âge d'une des deux espèces citées plus haut; mais on conçoit qu'en présence du peu d'éléments que nous avons à notre disposition, nous ne puissions risquer aucune identification.

FIG. 14a, vue du côté de l'ouverture, grandeur naturelle.

— 14b, vue par-dessus.

— 14c, restauration, grandeur double.



Genre **BITHINIA**, Gray, 1821.

*Car. gén.* — Coquille petite, turbinée, ovale-conoïde, mince, à tours arrondis; ouverture arrondie, souvent anguleuse en arrière, à péristome continu, simple ou épaissi en dedans et quelquefois en dehors.

*Remarques.* — Les *Bithinia*, coquilles d'eau douce, ne sont, à proprement parler, que des *Paludines* à opercules calcaires. C'est sur l'épaississement intérieur que vient s'appuyer cet opercule. Quand cet épaississement n'existe pas et que le bord est simple, il est presque impossible de distinguer les *Bithinia* des *Paludines* de petite taille.

Ce genre a commencé à se montrer avec les terrains tertiaires. Deshayes décrit un assez grand nombre d'espèces qui, toutes, ne devraient pas lui appartenir. Cet auteur n'admet pas le genre *Hydrobia*, genre d'eaux saumâtres à opercule corné et qui mérite, par conséquent, d'en être distingué. Quelques-unes de ses espèces costulées ou tuberculeuses paraissent aussi s'écarter des véritables *Bithinia*.

Si aucune des *Paludines* des terrains crétacés ne doit rentrer dans le genre *Bithinia*, les espèces que nous allons décrire du calcaire grossier de Mons sont les plus anciennes du genre.

**BITHINIA REGULARIS**, *nov. sp.*

Pl. XX, fig. 9a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,007	—	100
	Largeur — . . . . .	0,0045	—	64
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0035	—	50
	Angle apical . . . . .			50°

Assez grande coquille brillante, conique, composée de six tours arrondis au sommet mais plus aplatis vers la base, s'enroulant régulièrement en une spire pointue, séparés par des sutures peu profondes mais bien marquées, ornés de stries d'accroissement fines et serrées, légèrement obliques; base conique terminée à la circonférence par une carène obtuse sur laquelle se fait le retour de la spire aux premiers tours, mais qui reste en dehors et devient apparente à la seconde moitié du dernier; ouverture ovale, oblique, arrondie en avant, aiguë en arrière, à péristome continu, légèrement évasé au bord droit.

*Remarques.* — Cette espèce est la plus grande du calcaire grossier de Mons. Elle y est très rare; nous n'en possédons qu'un spécimen d'une conservation parfaite, quoique l'ouverture soit en partie cachée par un encroûtement que nous n'avons pu détacher. Elle est très voisine du *B. conulus*, Lamk. (Desh., 1824, *Bulimus conulus*, II, p. 62, pl. IX, fig. 34 et 1862, II, p. 501), du calcaire grossier, dont les grands individus atteignent à peu près à la même taille; mais celle-ci n'a pas de carène à la circonférence de la base, ni d'évasement au bord droit.

FIG. 9a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.  
 — 9b, vue par-dessus.  
 — 9c, grandeur naturelle.

**BITHINIA CARINATA, nov. sp.**

Pl. XX, fig. 10a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,0065
	Largeur — . . . . .	0,00375
	Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,0025
	Angle apical moyen . . . . .	51°

Coquille petite, conique, turriculée, composée de cinq tours s'enroulant sous un angle régulier, séparés par des sutures bien marquées, peu convexes à la partie postérieure mais portant antérieurement une carène en avant de laquelle se fait le retour de la spire, saillante aux premiers tours et s'effaçant complètement en arrivant à l'ouverture, ornés de stries ou sillons d'accroissement assez serrés et légèrement obliques; base conique, arrondie, avec une légère fente ombilicale; ouverture assez petite, arrondie, peu oblique, anguleuse à la partie postérieure; péristome simple, continu.

*Remarques.* — Cette espèce est assez abondante dans le calcaire grossier de Mons. Elle est très voisine du *B. conica*, Prévost (Desh., *Paludina*, 1824, II, p. 129, pl. XVI, fig. 67; 1862, II, p. 494), du calcaire grossier de Paris; mais cette dernière n'est jamais carénée et n'a pas de fente ombilicale.

FIG. 10a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.  
 — 10b, vue par-dessus.  
 — 10c, grandeur naturelle.

**BITHINIA LONGULA, nov. sp.**

Pl. XX. fig. 11a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,005 — 100
Largeur — . . . . .	0,001 — 33
Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,001 — 33
Angle apical . . . . .	18°

Coquille très petite, turriculée, allongée, composée de cinq tours arrondis mais peu saillants, lisses et brillants sauf quelques rares sillons d'accroissement peu profonds, s'enroulant sous un angle convexe au sommet mais beaucoup moins ouvert au delà du second tour, de sorte que la coquille devient subcylindrique, séparés par des sutures assez profondes; ouverture assez petite, occupant moins du tiers de la longueur totale de la coquille, ovale, un peu oblique, atténuée en arrière, à péristome continu; bord droit renflé à l'extérieur.

*Remarques.* — Un examen superficiel pourrait faire confondre cette espèce avec l'*Hydrobia elongata* (p. 16), mais en l'examinant à la loupe, on reconnaît qu'elle en est certainement distincte et même qu'elle n'appartient pas au même genre.

Notre espèce a quelques rapports avec certaines espèces du bassin de Paris, entre autres avec *B. subulata*, Desh. (1862, II, p. 507), *Paludina subulata*, id. (1824, p. 133, pl. XV, fig. 19, 20, 25, 26), du calcaire grossier; mais son enroulement est beaucoup moins régulier et sa spire plus obtuse; et *B. sextonus* (*Bulimus sextonus*, Lamk., *Ann. du Mus.*, Desh., 1824, II, p. 61, pl. VII, fig. 11, 12 et *Bithinia*, 1862, II, p. 502) qui, plus voisine, ne peut cependant lui être rapportée.

FIG. 11a, vue du côté de l'ouverture, grossie sept fois.

— 11b, vue par-dessus.

— 11c, grandeur naturelle.

**BITHINIA VICINA, nov. sp.**

Pl. XX, fig. 12a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,005 — 100
Largeur — . . . . .	0,003 — 60
Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,002 — 40
Angle apical . . . . .	30°

Coquille conique, globuleuse, composée de cinq tours arrondis, lisses et brillants, séparés par des sutures assez profondes, s'enroulant sous un angle régulier, ornés de stries fines et de légers sillons d'accroissement; base arrondie; ouverture assez grande, ovale, oblique, arrondie en avant, anguleuse en arrière; péristome simple, continu, un peu versant à la partie antérieure; bord droit largement arqué; bord gauche fortement infléchi au milieu, où il recouvre en partie une petite fente ombilicale.

*Remarques.* — Certains caractères rapprochent cette espèce des *Hydrobia*.

De plus petite taille que les *B. regularis* (p. 24) et *carinata* (p. 25), elle s'en distingue encore par l'absence de toute carène apparente. Ce caractère la rapproche des *B. conica* et *conulus* du bassin de Paris, mais elle est constamment plus petite et a un facies tout différent du côté de l'ouverture. Une espèce des sables inférieurs en est également fort voisine, c'est la *B. crassa* (Desh., 1862, II, p. 494, pl. XXXIII, fig. 22-24) dont elle se distingue également par la taille et qui, de plus, est plus ventrue et a le dernier tour plus développé.

Cette espèce se rencontre, non seulement dans le calcaire grossier de Mons proprement dit, mais encore dans le calcaire lacustre supérieur ou calcaire à physes, ce que nous avons pu constater d'après des échantillons du sondage de la caserne de cavalerie à Mons, conservés par M. le professeur G. Lambert, et dans lesquels elle se trouve à l'état de moule <sup>1</sup>.

FIG. 12a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.

— 12b, vue par-dessus.

— 12c, grandeur naturelle.

<sup>1</sup> Note sur l'existence d'un calcaire d'eau douce dans le terrain tertiaire du Hainaut, par MM. F.-L. Cornet et Alp. Briart. (BULL. DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 2<sup>e</sup> série, t. XLIII, n° 1, janvier 1877).

**BITHINIA PUPIFORMIS**, *nov. sp.*

Pl. XX, fig. 13a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille. . . . .	0,002	—	100
Largeur — . . . . .	0,001	—	50
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,00075	—	37
Angle apical . . . . .			45°

Très petite coquille mince, fragile, brillante, fusiforme, composée de cinq tours s'enroulant sous un angle convexe, séparés par des sutures peu profondes, légèrement arrondis au milieu et montrant à la partie postérieure une légère dépression longeant la suture, ornés de rares sillons d'accroissement presque droits et peu prononcés; ouverture arrondie en avant, aiguë en arrière; péristome mince, continu, réfléchi extérieurement; base ovale, avec une légère dépression ombilicale le long du bord gauche.

*Remarques.* — La légère dépression suturale est le caractère distinctif de cette espèce. Quelques espèces du bassin de Paris, également de très petite taille, s'en distinguent assez facilement; aucune de celles données par Deshayes ne présente cette particularité. Il en est de même des autres petites espèces du calcaire grossier de Mons, lesquelles sont aussi beaucoup plus allongées.

FIG. 13a, vue du côté de l'ouverture, grossie dix fois.

— 13b, vue par-dessus.

— 13c, grandeur naturelle.

*Genre POTAMACLIS*, Sandberger, 1874.

*Car. gén.* — Coquille perforée, turriculée, très allongée; sommet obtus; tours très nombreux et convexes; ouverture oblique, ovale, à bords continus, épais; labre un peu sinueux légèrement réfléchi.

*Remarques.* — Le nom de *Potamaclis* donné par Sandberger en 1874 (*Die Land- und Süsswasser conchylien der Vorwelt*, p. 312, 313) a été modifié par M. Fischer dans son Manuel de conchyliologie (fasc. VIII,

p. 726), peut-être par inadvertance, et changé en *Pomataclis*. Son auteur a créé le genre pour quelques espèces oligocènes rapportées par Forbes au genre *Melania*. Nous l'adoptons pour une coquille du calcaire grossier de Mons dont nous ne pouvons faire ni un *Melania*, ni un *Bithinia*, ni un *Hydrobia*, mais qui est évidemment d'eau douce et très voisine du groupe des *Paludimides*.

**POTAMACLIS TRUNCATA, nov. sp.**

Pl. XIX, fig. 15a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,009	—	100
Largeur — . . . . .	0,0055	—	59
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0025	—	28
Angle apical . . . . .			26°

Coquille assez petite, conique, turriculée, à tours nombreux, arrondis, un peu plus sail-lants à la partie antérieure, séparés par des sutures profondes, s'enroulant régulièrement en une spire tronquée et mamelonnée, lisses et brillants, ornés de stries d'accroissement un peu sinueuses en arrière et bien visibles seulement au dernier tour; base ovale; ouver-ture assez petite, ovale, oblique, aiguë en arrière, un peu atténuée en avant; péristome simple et continu; bord droit largement arqué, avançant sur l'ouverture à la partie antérieure; bord gauche moins courbé et recouvrant en partie une fente ombilicale bien marquée.

*Remarques.* — L'extrémité de la spire, enlevée du vivant de l'animal, a été remplacée par un sommet mamelonné. Notre coquille n'est pas com-plète du côté du bord droit dont une partie est enlevée; mais le restant est parfaitement conservé et les stries de croissance montrent très bien les traits caractéristiques de l'ouverture.

FIG. 15a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois et demie.

— 15b, vue par-dessus.

— 15c, grandeur naturelle.

## DESCRIPTION DES FOSSILES

Genre **BRIARTIA**, Munier-Chalmas, 1884.

*Car. gén.* — Coquille subturriculée à tours nombreux, à spire aiguë, lisse et brillante; dernier tour contracté à l'ouverture; celle-ci petite, entière, à double péristome dont l'intérieur est circulaire et l'extérieur anguleux postérieurement, circonscrivant ainsi une petite aréa triangulaire dans l'angle postérieur.

**BRIARTIA VELAINI**, Munier-Chalmas.

Pl. XX, fig. 7a, b, c, d, e, f.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,015 — 100
	Largeur — . . . . .	0,008 — 40
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,004 — 27
	Angle apical . . . . .	35°

Assez petite coquille conique, lisse et brillante, fusiforme, composée de huit à dix tours légèrement arrondis, séparés par des sutures presque superficielles, s'enroulant régulièrement en une spire aiguë sauf le dernier qui se contracte et rentre vers l'axe de la coquille, marqués seulement de stries de croissance presque droites, un peu infléchies en arrière à la partie postérieure, peu visible sous le poli de la coquille; ouverture contractée, arrondie, située presque dans le plan de l'axe; péristome intérieur débordant quelquefois et se détachant du tour précédent, non poli, à stries de croissance bien marquées; péristome extérieur restant en arrière, anguleux à la suture et circonscrivant l'aréa caractéristique dont le milieu est un peu renfoncé.

*Remarques.* — C'est la plus abondante de toutes les espèces du calcaire grossier de Mons. Par cela même, on était quelque peu en droit d'espérer la rencontrer dans d'autres gisements de l'éocène inférieur. Il n'en a rien été: jusqu'à présent les recherches de M. Munier-Chalmas n'ont pu constater sa présence dans les marnes strontianifères de Meudon. A ce titre, elle se trouve donc être le fossile véritablement caractéristique du gisement de Mons.

Malgré la grande abondance de cette coquille, on la trouve très rarement à l'état complet. Elle est presque toujours érodée, principalement du côté de l'ouverture dont les détails caractéristiques se trouvent ainsi supprimés. Dans ce cas le bord paraît simple, tranchant, et l'ouverture contractée.

Avant d'avoir rencontré d'individu complet, cela nous avait naturellement amenés à faire de notre coquille un *Nematura*. Ce n'est que plus tard que M. Munier-Chalmas créa son nouveau genre sur des caractères bien positifs et bien définis.

FIG. 7b, vue du côté de l'ouverture, grossie deux fois.

— 7a, vue de profil, grossie deux fois.

— 7c, individu déformé, grossi deux fois.

— 7d, vue de l'ouverture, grossie deux fois.

— 7e, vue de l'ouverture avec péristome intérieur saillant, grossie deux fois.

— 7f, grandeur naturelle.

**BRIARTIA CARINATA, nov. sp.**

Pl. XX, fig. 8a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,010	—	100
Largeur — . . . . .	0,005	—	50
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,004	—	40
Angle apical . . . . .			45°

Assez petite coquille conique, turriculée, composée de six tours s'enroulant régulièrement si ce n'est le dernier qui rentre un peu vers l'axe de la coquille, séparés par des sutures bien marquées, portant à l'extérieur et presque au milieu une carène forte et irrégulière, le tout orné de stries d'accroissement transverses un peu onduleuses à la carène; une seconde carène antérieure, plus obtuse, limite extérieurement la base et reçoit le retour de la spire; base arrondie; ouverture contractée, ronde, se dédoublant à la partie postérieure et y circonscrivant l'aréa triangulaire.

*Remarques.* — Il n'y a aucun doute que cette coquille, fort singulière, ne soit un *Briartia*. Elle est malheureusement aussi rare que l'espèce précédente est abondante.

FIG. 8a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.

— 8b, vue par-dessus.

— 8c, grandeur naturelle.



Genre **CORNETIA**, Munier-Chalmas, 1885.

*Car. gén.* — Coquille imperforée, assez épaisse, ovale, à spire aiguë, à sutures profondes; base convexe; ouverture grande, subcirculaire, un peu anguleuse en arrière; bord columellaire épais, régulièrement concave; labre sinueux également épais.

**CORNETIA MODUNENSIS**, Munier-Chalmas.

Pl. XXI, fig. 1a, b, c, d, e, f.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille. . . . .	0,026 — 100
	Largeur — . . . . .	0,020 — 77
	Hauteur de l'ouverture. . . . .	0,014 — 54
	Angle apical . . . . .	65°

Coquille assez grande, conique, régulière, composée de cinq ou six tours s'enroulant sous un angle légèrement convexe vers l'ouverture en une spire aiguë moins longue que le dernier tour, séparés par des sutures profondes; à l'extérieur des tours se trouve une forte carène longitudinale et à quelque distance en avant une seconde carène moins forte également longitudinale, séparée de la première par un sillon arrondi et sur laquelle se fait le retour de la spire; la partie postérieure à la carène est légèrement renflée vers le sommet, à peu près droite par la suite et finit par se creuser un peu en approchant de l'ouverture; une côte postérieure à peu près symétrique à la carène de la base par son écartement de la carène principale et son relief se remarque sur cette partie aux premiers tours, mais elle diminue à mesure que la coquille grandit et finit par disparaître entièrement pour faire place à une légère dépression; une autre dépression également très légère longe la suture; tous ces ornements sont traversés par des lignes ou sillons d'accroissement devenant des costulations et, à la traversée de la carène, des saillies plus ou moins régulières, quelquefois très fortes jusqu'à devenir de gros tubercules épineux; base largement arrondie montrant vers la périphérie quelques côtes longitudinales cachées par le retour de la spire; ouverture arrondie; bord gauche assez épais; bord droit plus tranchant avec un sinus large et peu profond près de la suture.

*Remarques.* — Cette magnifique espèce est assez commune dans le calcaire grossier de Mons, mais les spécimens complets ne laissent pas que d'être fort rares. Elle a été une des premières dont la présence a été constatée par M. Munier-Chalmas dans les marnes strontianifères de Meudon.

Ses ornements sont parfois très accentués et, par contre, quelquefois presque nuls, comme nous avons essayé de le montrer par nos dessins.

Avant la création du nouveau genre, dont elle constitue, jusqu'à présent, l'unique espèce, cette coquille a parfois été rangée dans le genre *Liotia*.

- FIG. 1a, vue du côté de l'ouverture, grossie une fois et demie.  
 — 1b, vue par-dessus, grossie une fois et demie.  
 — 1c, grandeur naturelle.  
 — 1d, variété non costulée, vue du côté de l'ouverture, grandeur naturelle.  
 — 1e, — — — — — vue par-dessus.  
 — 1f, — — — — — fortement costulée, grandeur double.

Genre **NERITOPSIS**, Grateloup, 1832.

*Car. gén.* — Coquille néritiforme, subglobuleuse, imperforée, solide; à tours peu nombreux et spire peu saillante; ornés de côtes longitudinales simples ou granuleuses; ouverture semi-lunaire, à labre simple et épais; bord columellaire simple, aplati, largement échancré à sa partie médiane.

*Remarques.* — Le trait distinctif du genre consiste dans l'échancrure du bord columellaire. Quand Deshayes l'a décrit, on ne connaissait pas l'opercule; cette lacune a été comblée depuis (*Fischer*, p. 808); cet opercule, de construction fort curieuse, porte un appendice qui s'applique exactement dans l'échancrure de la columelle, d'où l'importance de cette partie bien prévue par Grateloup.

Ce genre se montre dans les terrains secondaires (*Musschelkalk*). Il est peu nombreux dans les terrains tertiaires, et vit actuellement dans les mers chaudes.

**NERITOPSIS MULTICOSTATA**, *nov. sp.*

Pl. XXI, fig. 2a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,007	—	87
Largeur — . . . . .	0,008	—	100
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0065	—	81
Angle apical . . . . .			125°

Coquille petite, globuleuse, épaisse, solide, à sommet très obtus, composée de trois tours arrondis, le dernier très développé, séparés par des sutures peu profondes, ornés

de côtes nombreuses longitudinales irrégulières, les plus fortes et les plus écartées à la partie postérieure des tours et près du bord columellaire, les plus fines et les plus serrées à l'extérieur, quelques minces filets se montrant dans le creux des plus larges sillons séparant les côtes; tous ces ornements sont traversés de stries de croissance qui deviennent des sillons irréguliers vers la fin du dernier tour; ouverture grande, semi-lunaire, anguleuse des deux côtés; bord droit arqué, tranchant mais s'épaississant rapidement à l'intérieur; bord columellaire légèrement aplati, calleux, avec une large échancrure au milieu.

*Remarques.* — Cette espèce est très rare dans le calcaire grossier de Mons. Deshayes ne cite qu'une espèce du même genre dans le bassin de Paris, c'est le *N. Parisiensis* (1864, III, p. 8, pl. LXVI, fig. 1-3). Elle est des sables moyens et ne peut être comparée avec l'espèce du calcaire de Mons. Une espèce beaucoup plus voisine vient d'être donnée par M. Cossmann dans le *Journal de Conchyliologie*, juillet 1886 (3<sup>e</sup> série, t. XXVI, 3, p. 229, pl. X, fig. 5). C'est le *N. acutispira*, qui a les ornements extérieurs beaucoup moins serrés et dont le bord columellaire est bilobé.

FIG. 2a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.

— 2b, vue par-dessus.

— 2c, grandeur naturelle.

Genre **NERITINA**, Lamk., 1809.

*Car. gén.* — Coquille semi-globuleuse ou ovale, généralement mince, à tours peu nombreux, lisses ou épineux et à spire courte; ouverture semi-lunaire; bord droit mince; bord columellaire aplati, droit ou peu courbé, simple ou dentelé.

*Remarques.* — Les espèces de ce genre sont, en grande partie, fluviatiles; mais quelques-unes habitent les eaux saumâtres ou marines; un petit nombre est terrestre. Le test de ces coquilles est très mince, ce qui les distingue des *Nerita*, genre complètement marin dont la coquille est toujours épaisse et solide. D'Orbigny n'admettait pas la distinction de ces deux genres et Deshayes ne lui reconnaissait qu'une valeur purement sectionnelle.

Ce genre a débuté dans les terrains secondaires. Les espèces sont fort abondantes dans les terrains d'eau douce ou d'eau saumâtre de la période tertiaire. Les deux espèces du calcaire grossier de Mons sont évidemment fluviatiles.

## NERITINA FABULA, nov. sp.

Pl. XXI, fig. 3a, b, c jeune âge; d, e, f âge adulte.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,010	—	95
Largeur — . . . . .	0,0125	—	100
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,008	—	76
Angle apical . . . . .			115°

Coquille globuleuse, un peu plus large que longue, composée de trois tours arrondis et déprimés vers la suture à la seconde moitié du dernier tour, s'enroulant en une spire saillante mais très convexe, séparés par des sutures profondes, lisses et brillants et ayant conservé leur coloration primitive consistant en des flammèches brunes sur fond blanc, plus ou moins foncées, assez larges, transverses, en zigzags très serrés, et arrangées en zones longitudinales; dernier tour très dilaté; base arrondie; ouverture grande, semi-lunaire, presque aussi large que longue, anguleuse en arrière; bord droit arqué, tranchant, dilaté, s'infléchissant un peu dans l'ouverture à la partie postérieure; bord columellaire large, tranchant, très oblique sur l'axe de la coquille, légèrement infléchi au milieu.

*Remarques.* — Cette jolie coquille, qui a presque toujours conservé sa coloration dans toute sa fraîcheur, est assez commune dans le calcaire grossier de Mons. Quand elle n'a pas atteint l'âge adulte, la forme de l'ouverture est sensiblement différente et pourrait donner lieu à une distinction spécifique erronée : elle est plus régulièrement semi-lunaire et ce n'est qu'à la dernière moitié du dernier tour que cette régularité disparaît par l'inflexion du bord de plus en plus prononcée et qui finit même par produire un angle rentrant dans l'ouverture. Elle est de la même taille que le *Neritina globulus*, Ferussac (*Hist. nat. des Moll. foss.*, fig. 14) (Desh., 1824, II, p. 151, pl. XVII, fig. 19-20, 1864, II, p. 22), que l'on rencontre partout avec l'étage des lignites; mais elle s'en distingue facilement, soit par l'absence de coloration de cette dernière, soit par sa spire moins proéminente.

- FIG. 3a, jeune âge, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.  
 — 3b, — vue par-dessus, grossie trois fois.  
 — 3c, — grandeur naturelle.  
 — 3d, âge adulte, vue du côté de l'ouverture, grossie deux fois.  
 — 3e, — vue par-dessus, grossie deux fois.  
 — 3f, — grandeur naturelle.

**NERITINA MONTENSIS, nov. sp.**

Pl. XXI, fig. 4a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,006 — 75
Largeur — . . . . .	0,008 — 100
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,006 — 75

Coquille globuleuse, déprimée, plus large que longue; composée de trois ou quatre tours s'enroulant en une spire presque plane, lisses et ayant conservé leur coloration primitive consistant en bandes plus ou moins larges et plus ou moins écartées, chevronnées à la partie saillante des tours; ouverture très dilatée, semi-lunaire; bord columellaire très large, un peu arqué, presque droit et parallèle à l'axe de la coquille, portant à sa partie postérieure deux dents assez fortes, la plus grosse en avant, d'autres petites dents antérieures à cette dernière, et un léger renflement avant d'arriver à l'angle antérieur; bord droit arqué, tranchant, s'épaississant rapidement surtout aux deux extrémités.

*Remarques.* — Cette espèce est très abondante dans le calcaire grossier de Mons; elle se distingue parfaitement de la précédente par sa spire plane. Elle appartient au type du *N. Semilugubris*, Desh. (1864, III, p. 15, pl. LXVI, fig. 18-20), des sables inférieurs auquel elle ressemble beaucoup par la forme générale, par les détails de la columelle et par la coloration; mais elle n'atteint que très rarement la moitié de la taille de l'espèce du bassin de Paris. En effet, les spécimens dont les dimensions sont données plus haut, sont très rares; la plupart n'ont que 5 millimètres de largeur et beaucoup ont moins.

FIG. 4a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.

— 4b, vue par-dessus.

— 4c, grandeur naturelle.

Genre **TURBO**, Linnée, 1758.

*Car. gén.* — Coquille turbinée, ovale ou globuleuse, à spire peu élevée; base arrondie, non aplatie, avec ou sans ombilic; ouverture ronde, à bord simple, quelquefois modifiée par le tour précédent.

*Remarques.* — Les *Turbos* se distinguent des *Trochus* principalement

par leur forme arrondie et non conique. Deshayes propose de reformer ces deux genres excessivement nombreux en espèces, d'après la nature cornée ou calcaire de l'opercule sans tenir compte de la forme de la coquille; on aura de cette façon, dit-il (1863, II, p. 890), des *Troques* à formes de *Turbo*, ayant l'opercule corné, et les *Turbos* trachiformes à opercule calcaire.

Il est sans doute très rationnel d'en agir ainsi, mais au point de vue paléontologique, cela présente d'assez grandes difficultés. Ce qui est plus pratique c'est de rejeter de ces deux genres toutes les coquilles non nacrées, lesquelles, par conséquent, doivent rentrer dans d'autres genres.

Les *Turbos* commencent à se montrer dès le silurien inférieur; ils n'ont fait que s'accroître et sont actuellement à leur maximum.

**TURBO MONTENSIS, nov. sp.**

Pl. XXII, fig. 1a, b, c, d, e, f.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0065 — 100
Largeur — . . . . .	0,0063 — 100
Hauteur du dernier tour. . . . .	0,004 — 54
Angle apical au sommet . . . . .	90° à 100°
— aux derniers tours . . . . .	35° à 60°

Coquille assez petite, globuleuse, solide, généralement aussi large que longue, composée de cinq tours peu saillants et plus ou moins arrondis, s'enroulant en une spire courte, obtuse et convexe, séparés par des sutures peu profondes; les premiers sont ornés de très fins sillons longitudinaux, bien marqués à la partie antérieure des tours où cependant on ne peut les voir qu'à la loupe, et disparaissant plus ou moins rapidement en approchant du dernier tour, lequel est presque toujours tout à fait lisse et traversé seulement de stries de croissance très fines, fort obliques, bien marquées au milieu de la base; dernier tour très développé, arrondi, plus ou moins aplati à l'extérieur; base peu saillante; ouverture arrondie, quelque peu contractée; labre tranchant, épaissi fortement à l'intérieur; portant une dent assez grosse à la partie antérieure sur la columelle, une plus petite vers le milieu du bord antérieur et une troisième, plus petite encore, au bord droit à quelque distance de la suture; bord columellaire recouvert d'une mince callosité laissant voir parfois un petit ombilic arrondi.

*Remarques.* — Cette espèce est une des plus abondante du calcaire grossier de Mons; elle s'y rencontre à tous les états de croissance et est de

forme et de dimensions proportionnelles assez variables. Bon nombre de spécimens ont conservé quelques traces d'une ancienne coloration qui consistait en des bandelettes brunes irrégulières, parallèles aux stries de croissance.

De toutes les espèces du bassin de Paris, celle qui paraît le plus s'en approcher est le *T. obtusalis*, Baudon (1856, *Journ. de Conch.*, IV, p. 215, pl. VI, fig. 4; Desh., 1863, II, p. 908, pl. LIX, fig. 28-30), espèce du calcaire grossier que ce dernier auteur place parmi les espèces imperforées, ce qui n'est pas le cas de l'espèce de Mons. Celle-ci s'en distingue également par les dents intérieures du labre.

FIG. 1a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.

— 1b, vue par-dessus.

— 1c, grandeur naturelle.

— 1d, variété, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.

— 1e, variété, vue par-dessus.

— 1f, variété, grandeur naturelle.

**TURBO PISARIUS, nov. sp.**

Pl. XXII, fig. 2a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,005 — 100
	Largeur — . . . . .	0,005 — 100
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,005 — 60
	Angle apical . . . . .	75 à 110°

Coquille assez petite, globuleuse, aussi longue que large, composée de quatre tours légèrement arrondis, le dernier très développé, déprimés à la partie postérieure, réunis par des sutures linéaires presque superficielles, s'enroulant sous un angle obtus et convexe en une spire courte; base peu saillante, circonscrite par une bande plate limitée par deux légères carènes, la postérieure plus forte sur laquelle se fait le retour de la spire; toute la surface ornée de fins sillons longitudinaux plus prononcés vers le sommet, très serrés, excepté vers la partie antérieure des tours en avant de la suture où ils s'écartent un peu, le tout recoupé de stries de croissance fortement obliques quelquefois très prononcées vers le centre; base arrondie, avec un ombilic bien limité par une carène aiguë et en partie caché par l'évasement du bord columellaire; ouverture arrondie, très oblique, à bords tranchants, épaissis à l'intérieur principalement en avant; une grosse dent se remarque au milieu d'un aplatissement à la base de la columelle, et une plus petite un peu plus en avant.

*Remarques.* — Cette espèce est beaucoup moins abondante que le *T. Montensis* (p. 37) dont elle se rapproche par la taille et les proportions. Elle s'en distingue facilement par les deux carènes de l'extérieur des tours et par ses ornements longitudinaux qui persistent jusqu'au dernier. Elle conserve également de vagues traces de coloration. Elle paraît assez voisine du *T. Semperi*, Desh. (1863, II, p. 903, pl. LXII, fig. 27-29), espèce rare des sables inférieurs, ombiliquée comme la nôtre, ayant à peu près les mêmes ornements longitudinaux, mais plus allongée, sans aplatissement à la circonférence de la base et sans dents à la columelle.

FIG. 2a, vue du côté de l'ouverture, grossie cinq fois.

— 2b, vue par-dessus.

— 2c, grandeur naturelle.

**TURBO LADRIEREI, nov. sp.**

Pl. XXII, fig. 3a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,005	— 100
	Largeur — . . . . .	0,00425	— 85
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0025	— 50
	Angle apical . . . . .		75°

Coquille petite, un peu plus longue que large, conique, composée de quatre tours arrondis, s'enroulant régulièrement, séparés par des sutures profondes, les deux premiers lisses, les deux derniers ornés de côtes longitudinales, les plus fortes à l'extérieur des tours séparées par des intervalles dans lesquels s'en trouvent de plus petites, le tout recoupé de stries de croissance; le retour de la spire se fait un peu en avant de la grosse côte longitudinale antérieure; base légèrement conique, ornée de la même manière jusqu'à un ombilic profond nettement limité par une carène saillante; ouverture arrondie, grande, à bords minces.

*Remarques.* — Cette espèce est très rare dans le calcaire grossier de Mons; elle a assez de ressemblance, comme forme générale, avec le *T. Craticulatus*, Desh. (1863, II, p. 894, pl. LVIII, fig. 23-25), des sables inférieurs, dont cependant les ornements sont tout différents.



Nous dédions cette espèce à M. J. Ladrière, si connu surtout par ses études sur les terrains quaternaires du Nord de la France.

FIG. 3a, vue du côté de l'ouverture, grossie cinq fois.  
— 3b, vue par-dessus, grossie cinq fois.  
— 3c, grandeur naturelle.

**TURBO FIRKETI, nov. sp.**

P. XXII, fig. 4a, b, c, d.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0085 — 100
Largeur — . . . . .	0,008 — 94
Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,0043 — 47
Angle apical . . . . .	75°

Coquille assez petite, presque aussi large que longue, composée de six tours s'enroulant régulièrement et séparés par des sutures profondes et subcanaliculées, fortement carénés à la circonférence de la base, cette carène portant une côte longitudinale simple très forte, saillante, en avant de laquelle se fait le retour de la spire de manière à la laisser à découvert comme un bourrelet tout le long de la suture; la partie postérieure des tours montre une autre carène, mais plus obtuse, limitant une partie postérieure presque plate, portant deux côtes assez fortes séparées par un sillon arrondi au milieu duquel on remarque un filet longitudinal très fin; entre les deux carènes se trouvent cinq autres côtes longitudinales plus petites que les premières, séparées par des filets beaucoup plus fins et, comme tous les autres ornements longitudinaux, traversés de stries de croissance obliques qui y laissent des granulations d'autant plus fortes qu'elles sont, elles-mêmes, plus prononcées; base assez plate, montrant également des ornements longitudinaux mais plus fins et plus serrés que ceux de l'extérieur, acquérant seulement un peu plus de saillie aux abords d'un ombilic assez étroit, profond, en partie recouvert par le bord gauche; ouverture arrondie, subquadrangulaire, oblique, à bords minces.

*Remarques.* — Cette espèce se rapproche des *Trochus* par la carène extérieure et l'aplatissement de la base. Ces caractères, de forme purement extérieure, ont été admis par certains auteurs comme suffisant pour faire ranger certaines coquilles dans ce dernier genre, entre autres par Deshayes. Aussi, ne trouvons-nous chez cet auteur que des *Trochus* avec lesquels nous puissions comparer notre *Turbo*. Tel est le *Trochus Felix*, Desh. (1864, II, p. 952, pl. LXI, fig. 15-17), espèce du calcaire grossier dont les

ornements sont beaucoup plus gros; sa columelle plus droite et son péristome interrompu, constituent également des traits distinctifs et ont probablement motivé le genre donné à l'espèce du bassin de Paris.

Nous dédions cette espèce à M. Firket, ingénieur au corps des mines et secrétaire de la Société géologique de Belgique.

FIG. 4a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.

— 4b, vue par-dessus.

— 4c, grandeur naturelle.

**TURBO FALYANUS, nov. sp.**

Pl. XXII, fig. 5a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,007	— 100
Largeur — . . . . .	0,0055	— 79
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0055	— 50
Angle apical. . . . .		60°

Coquille assez petite, plus longue que large, composée de six tours s'enroulant régulièrement, séparés par des sutures linéaires peu profondes, arrondis à la partie postérieure, fortement carénés à la circonférence de la base, le retour de la spire se faisant sur la carène et un peu plus en avant au dernier tour, lisses ou ornés seulement de stries de croissance; base assez plane; ouverture oblique, arrondie, un peu anguleuse à la partie postérieure; péristome mince et tranchant mais s'épaississant à l'intérieur; bord droit recouvrant en partie un ombilic assez bien limité par une légère carène.

*Remarques.* — Ainsi que l'espèce précédente, celle-ci constitue un intermédiaire entre les *Turbo* et les *Trochus*; c'est, du reste, le même faciès général, mais les ornements longitudinaux de l'espèce précédente empêchent toute confusion. Le *T. Falyanus* n'est pas aussi rare.

Nous dédions cette espèce à M. Faly, ingénieur au corps des mines à Mons et géologue distingué.

FIG. 5a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.

— 5b, vue par-dessus.

— 5c, grandeur naturelle.

## DESCRIPTION DES FOSSILES

**TURBO QUADRANGULATUS, nov. sp.**

Pl. XXII, fig. 6a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,007	—	71
Largeur — . . . . .	0,005	—	100
Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,005	—	45
Angle apical près du sommet . . . . .			60°
— près de la base . . . . .			55°

Coquille assez petite, allongée, conique, composée de six tours plats s'enroulant sous un angle convexe, lisses, marqués seulement de fines stries de croissance, séparés par des sutures linéaires, presque superficielles; base un peu arrondie, limitée extérieurement par une carène obtuse, non ombiliquée; ouverture subquadrangulaire, à bords simples et tranchants, légèrement épaissis à l'intérieur; columelle droite renflée en avant et formant un angle assez brusque avec le bord antérieur; bord droit peu courbé, rejoignant également le bord antérieur par un angle assez brusque correspondant à la carène de la base.

*Remarques.* — Cette coquille est assez rare dans le calcaire grossier de Mons; elle est remarquable par l'absence de tout ornement et ne nous montre que des stries de croissance et quelques traces vagues de coloration. Plus qu'aucune de nos espèces à base carénée, elle se rapproche du genre *Trochus*, et devrait peut-être prendre place dans un genre intermédiaire, (*Eleuchus*, Humphrey, ou *Cantharis*, Ferrussac). Elle est voisine du *T. Falyanus* (p. 41), mais elle est plus conique, a les tours plus plats et la carène plus obtuse.

FIG. 6a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.

— 6b, vue par-dessus.

— 6c, grandeur naturelle.

**TURBO DELVAUXI, nov. sp.**

Pl. XXII, fig. 7a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,018	—	100
Largeur — . . . . .	0,017	—	94
Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,0085	—	47
Angle apical . . . . .			75°

Coquille assez grande, composée de sept tours arrondis s'enroulant sous un angle régulier, séparés par des sutures profondes subcanaliculées, ornés de côtes longitudi-

nales nombreuses, les plus saillantes au nombre de trois à la partie postérieure des tours où elles sont rendues fortement granuleuses par des stries de croissance, les autres beaucoup moindres jusqu'à la partie saillante des tours où il s'en trouve de nouveau trois autres plus fortes séparées par de petits filets et en avant desquels se fait le retour de la spire; base arrondie, portant également des ornements longitudinaux, mais beaucoup plus serrés jusqu'au voisinage de l'ombilic où ils acquièrent plus de largeur; ouverture arrondie, à bords minces s'épaississant intérieurement principalement à la partie antérieure; bord columellaire infléchi, recouvrant en partie un ombilic large et peu profond non caréné.

*Remarques.* — Les proportions et les ornements de cette espèce sont à peu près les mêmes que ceux du *T. Firkei* (p. 40), mais ses tours non carénés en font une espèce distincte. Elle est fort rare dans le calcaire grossier de Mons.

Nous dédions cette espèce à M. Delvaux, officier attaché à l'Institut cartographique militaire, comme preuve de sympathie et de l'estime que nous éprouvons pour ses recherches persévérantes et consciencieuses sur les terrains éocènes de la Belgique.

FIG. 7a, vue du côté de l'ouverture, grossie une fois et demie.  
 — 7b, vue par-dessus.  
 — 7c, grandeur naturelle.

TURBO FUNICULOSUS, nov. sp.

Pl. XXII, fig. 8a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,005	— 190°
	Largeur — . . . . .	0,005	— 100
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,00175	— 58
	Angle apical . . . . .		80°

Petite coquille conique, aussi longue que large, composée de quatre à cinq tours s'enroulant régulièrement, séparés par des sutures profondes, portant une forte carène à la circonférence de la base et une autre plus arrondie à la partie postérieure, le retour de la spire se faisant sur la première, ornés à l'extérieur de six filets longitudinaux assez réguliers; base conique couverte également de filets longitudinaux mais beaucoup moins prononcés et creusée d'un ombilic profond brusquement limité par une carène saillante; ouverture grande, arrondie; columelle portant extérieurement un finicule qui s'enfonce dans l'ombilic.

*Remarques.* — Nous ne possédons qu'un seul spécimen de cette espèce;

il est malheureusement incomplet du côté de l'ouverture. Elle se distingue de nos espèces de même forme par la carène plus obtuse de la circonférence de la base et par le finicule de l'ombilic qui n'a pu être marqué sur le dessin.

FIG. 8a, vue du côté de l'ouverture, grossie sept fois.

— 8b, vue par-dessus.

— 8c, grandeur naturelle.

**TURBO BRETONI, nov. sp.**

Pl. XXII, fig. 8a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,007	- 87
	Largeur — . . . . .	0,008	-- 100
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,004	-- 50
	Angle apical . . . . .		85° à 95°

Assez petite coquille globuleuse, à peu près aussi longue que large, composée de quatre tours s'enroulant sous un angle légèrement convexe, ayant à la circonférence de la base une carène bien marquée sur laquelle se fait le retour de la spire, et une seconde carène plus obtuse à la partie postérieure des tours, ornés de côtes longitudinales assez fortes pour la plupart et entremêlées de petits filets; base arrondie, également recouverte d'ornements longitudinaux beaucoup plus uniformes, plus minces et plus serrés; tous ces ornements sont recoupés par des stries de croissance obliques; ouverture arrondie, à péristome mince et tranchant, mais s'épaississant à l'intérieur; bord columellaire un peu renflé antérieurement, réfléchi et recouvrant en partie un ombilic arrondi.

*Remarques.* — Cette espèce, très rare dans le calcaire grossier de Mons, est bien distincte de toutes celles que nous avons décrites jusqu'à présent. Quant aux espèces du bassin de Paris, celle qui nous paraît s'en approcher le plus est le *T. denticulatus*, Lamk. (*Ann. du Museum*, IV, p. 107 et VIII, p. 36, fig. 3 à 6; Desh., 1824, II, p. 255, pl. XXXIV, fig. 1-4 et 18, p. 893); mais chez cette dernière, la carène antérieure n'est pas annulée par le retour de la spire, et les stries d'accroissement produisent, sur les côtes longitudinales, des dentelures plus ou moins régulières. Deshayes dit que l'espèce de Lamarck se rapproche beaucoup des *dauphinules*. Aucun doute de ce genre n'est possible pour l'espèce de Mons.

Nous dédions cette espèce à M. Breton, l'habile ingénieur du canal de la Manche, fort avantageusement connu en géologie par ses travaux sur la formation houillère.

FIG. 9a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.  
 — 9b, vue par-dessus.  
 — 9c, grandeur naturelle.

**TURBO CONTRACTUS, nov. sp.**

Pl. XXII, fig. 10a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,018 — 100
	Largeur — . . . . .	0,015 — 85
	Hauteur de l'ouverture. . . . .	0,008 — 44
	Angle apical près du sommet . . . . .	860°
	— — de l'ouverture . . . . .	45°

Coquille assez grande, solide, plus longue que large, composée de cinq tours s'enroulant sous un angle très convexe, séparés par des sutures linéaires peu visibles si ce n'est au dernier tour; ces tours sont arrondis et portent une carène extérieure bien marquée sur laquelle se fait d'abord le retour de la spire, mais plus tard, ce retour se fait de plus en plus en avant, laissant la carène à découvert, tandis qu'à la partie postérieure des tours une dépression s'accroît de plus en plus en largeur et en profondeur; les ornements consistent en des filets longitudinaux irréguliers, peu saillants, quelques-uns assez larges à l'extérieur des tours, plus minces et beaucoup plus réguliers sur la base, le tout recoupé par des stries ou plis de croissance obliques; base arrondie; ouverture contractée, oblique, un peu irrégulière, à péristome mince mais s'épaississant rapidement et irrégulièrement à l'intérieur; columelle droite avec une légère fente longitudinale qui se prolonge jusqu'au bord antérieur; une légère gouttière à la partie postérieure.

*Remarques.* — Cette espèce est assez rare dans le calcaire grossier de Mons; elle se distingue facilement de toutes nos espèces carénées par la contraction du dernier tour, ce qui ne peut s'observer que dans des coquilles adultes; dans le jeune âge, elle se caractérise principalement par sa columelle droite. Elle est aussi, de ce côté, voisine des *Trochus*.

Nous ne voyons rien qui puisse lui être comparé dans le bassin de Paris.

FIG. 10a, vue du côté de l'ouverture, grossie une fois et demie.  
 — 10b, vue par-dessus.  
 — 10c, grandeur naturelle.

Genre **TROCHUS**, Linnée, 1736.

*Car. gén.* — Coquille enroulée en cône plus ou moins élevé, à base plate, carénée et quelques fois tranchante à la circonférence; ouverture rhombique, oblique, toujours nacrée; columelle arquée, tordue ou portant un gros pli antérieur, plus ou moins saillante sur la base.

*Remarques.* — Ce genre, un des plus anciennement établis, est excessivement nombreux en espèces. Tel que nous le caractérisons d'après les principaux auteurs, il renferme les véritables *Trochus*, et se trouve moins étendu que Deshayes ne l'a fait. Cet auteur, tout en reconnaissant le grand avantage d'apporter à ce genre des subdivisions, même artificielles, n'en admet que trois auxquels il n'accorde que la valeur de simples groupes. Le genre, tel que nous le limitons, renferme les deux premiers groupes dénommés d'après deux des genres établis par MM. Adams : *A. Tectus* et *B. Zyzypkinus*.

On a souvent rapportés aux *Trochus* des *Pleurotomaria* qui ont sensiblement la même forme extérieure et qui, lorsqu'ils sont à l'état de moule, sont très difficiles à distinguer. Pour ce motif et d'autres semblables, les espèces des terrains anciens sont plus ou moins douteuses.

Les premières espèces citées appartiennent aux assises siluriennes inférieures. Le genre n'a fait que s'accroître et se trouve à son maximum dans les mers actuelles.

**TROCHUS BASILÆVIGATUS, nov. sp.**

Pl. XXI, fig. 6a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,0065	—	81
	Largeur — . . . . .	0,008	—	100
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,003	—	58
	Angle apical . . . . .			75°

Coquille petite, conique, plus large que longue, à tours plats, s'enroulant sous un angle aigu, séparés par des sutures à peine visibles; une carène très forte, aiguë, simple ou légèrement ondulée limite l'extérieur de la base et reçoit le retour de la spire; des filets

longitudinaux, fins, serrés, irréguliers, ornent l'extérieur des tours; base plate ou légèrement conique, dépourvue d'ornements concentriques; ouverture quadrangulaire, aiguë aux angles intérieur et extérieur; columelle courte, portant un pli en spirale dessinant un canal intérieur.

*Remarques.* — Le trait caractéristique de cette espèce est l'absence complète d'ornements à la base; c'est par là qu'elle se distingue des autres espèces du calcaire grossier de Mons qui toutes ont des lignes concentriques. C'est également ce caractère qui la distingue du *T. mitratus*, Desh. (1824, II, p. 233, pl. XXVII, var., fig. 6, 7, 8 et 1864, II, p. 948), outre que celle-ci est proportionnellement moins large à la base.

Fig. 6a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.  
 — 6b, vue par-dessus.  
 — 6c, grandeur naturelle.

*TROCHUS SIMPLICILINEATUS, nov. sp.*

Pl. XXI, fig. 8a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,0095	—	76
	Largeur — . . . . .	0,0125	—	100
	Hauteur du dernier tour. . . . .	0,004	—	52
	Angle apical . . . . .			80°

Coquille assez petite, conique, déprimée, plus large que longue, à tours presque plats, s'enroulant régulièrement; une carène très forte et saillante limite l'extérieur de la base et reçoit le retour de la spire; ces tours sont ornés de nombreux filets longitudinaux simples, assez serrés, irréguliers, une légère dépression postérieure à la carène indique la suture qui, sans cela, serait assez peu visible; base presque plate, également recouverte de filets longitudinaux mais moins saillants et d'autant moins espacés que l'on se rapproche du centre; ouverture quadrangulaire, fortement aiguë à l'angle extérieur; columelle courte, un peu oblique, portant un pli spiral dessinant un canal à sa partie antérieure.

*Remarques.* — Cette espèce, voisine du *T. basilævigatus* (p. 46), s'en distingue par ses ornements longitudinaux simples au lieu d'être granuleux. Elle rappelle un peu le *T. subcarinatus*, Lamk. (*Ann. du Mus.*, t. IV), que Deshayes, dans son dernier ouvrage, réunit à d'autres espèces précédemment distinguées (1864, *Anim. sans vert.*, II, p. 955). C'est une espèce



du niveau des sables de Fontainebleau qui est, dans toutes ses variétés, beaucoup moins déprimée que celle de Mons.

FIG. 5a, vue du côté de l'ouverture, grossie deux fois et demie.  
— 5b, vue par-dessus, grossie deux fois et demie.  
— 5c, grandeur naturelle.

**TROCHUS LEFEVREI, nov. sp.**

Pl. XXI, fig. 7a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,0105 — 100
	Largeur — . . . . .	0,0105 — 100
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,003 — 29
	Angle apical. . . . .	65°

Coquille assez petite, conique, aussi large que longue, composée de huit tours plats, enroulés sous un angle régulier vers le sommet, un peu convexe aux derniers tours; base presque plate ayant à la circonférence une carène très aiguë simple ou dentelée, restant un peu saillant au retour de la spire et indiquant parfaitement la suture; des filets minces, onduleux, irréguliers et de grosseur très variable, au nombre de dix environ, ornent l'extérieur des tours; des filets semblables mais beaucoup plus serrés ornent la base, plus visibles vers la circonférence et vers le centre; ouverture large, quadrangulaire, plus aiguë aux angles intérieur et extérieur; columelle oblique, s'épaississant à la base et portant un pli spiral laissant entre le bord et lui comme un étroit canal.

*Remarques.* — Cette espèce est très rare. Elle se rapproche quelque peu du *T. sulcatus*, Lamk. (*Ann. du Mus.*, IV, p. 49, et VII, pl. XV, fig. 6), et Desh. (1824, II, p. 236, pl. XXIX, fig. 1-4 et 1864, p. 935), espèce du calcaire grossier, qui est plus conique, n'a pas de pli à la columelle et dont la carène de la circonférence de la base est plus obtuse.

Nous dédions cette espèce à M. Th. Lefèvre, secrétaire de la Société malacologique de Belgique.

FIG. 7a, vue du côté de l'ouverture, grossie deux fois.  
— 7b, vue par-dessus, grossie deux fois.  
— 7c, grandeur naturelle.

**TROCHUS CARINADENTATUS, nov. sp.**

Pl. XXI, fig. 8a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,0075	—	86
	Largeur — . . . . .	0,0085	—	100
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,003	—	40
	Angle apical postérieur . . . . .			78°
	— aux derniers tours . . . . .			55°

Coquille assez petite, conique, un peu plus large que longue, composée de sept tours plats s'enroulant d'abord sous un angle assez aigu en une spire pointue, puis s'élargissant assez fort pour diminuer de nouveau de manière à produire un renflement assez marquée vers le milieu de la spire; base presque plate, terminée extérieurement par une carène très saillante, aiguë, dentelée surtout vers la partie moyenne de la spire et indiquant très bien la suture; extérieur des tours orné de six filets sensiblement égaux, assez réguliers, simples si ce n'est le postérieur qui est plus fort, dentelé, et séparé de la carène du tour précédent par un sillon plus large et plus profond; base sillonnée concentriquement principalement vers le bord extérieur et vers le centre; ouverture plus large que haute, quadrangulaire, aiguë aux angles extérieur et intérieur; columelle courte, oblique, portant un pli spiral à la partie antérieure.

*Remarques.* — Cette espèce rappelle, par sa forme générale, le *T. Lefevrei* (p. 48), mais s'en distingue principalement par la carène fortement dentelée.

Fig. 8a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.

— 8b, vue par-dessus.

— 8c, grandeur naturelle.

**TROCHUS DENTULIFER, nov. sp.**

Pl. XXI, fig. 9a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,0055	—	73
	Largeur — . . . . .	0,0075	—	100
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0025	—	55
	Angle apical . . . . .			80°

Coquille assez petite, conique, déprimée, plus large que longue, composée de six à sept tours légèrement creusés, s'enroulant d'abord sous un angle régulier, mais s'évasant très

fort au dernier tour, pourvus d'une carène très aiguë, saillante en dentelures à l'extérieur et indiquant très bien la suture; des filets longitudinaux ornent la partie extérieure des tours, très serrés près de la carène, plus rares vers la partie postérieure, les deux plus forts vers le milieu du tour, également dentelés; base large, presque plate, montrant des stries concentriques très fines et quelques stries d'accroissement vers le centre; ouverture très large, quadrangulaire, fortement anguleuse à la partie extérieure; columelle courte, oblique, avec un pli spiral laissant un petit canal entre le bord antérieur et lui.

*Remarques.* — Cette espèce, assez rare, se distingue du *T. carinadentatus* (p. 49) par sa forme beaucoup plus déprimée et les deux filets dentelés du milieu des tours. Nos spécimens les mieux conservés présentent ces caractères qui ne peuvent, par conséquent, être considérés comme accidentels ou caractérisant une simple variété.

FIG. 9a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.  
— 9b, vue par-dessus, grossie quatre fois.  
— 9c, grandeur naturelle.

Genre **DELPHINULA**, Lamk., 1804.

*Car. gén.* — Coquille sub-discoïde ou conique, à tours peu nombreux, souvent peu adhérents, le dernier quelquefois libre; ombilic large et profond; ouverture ronde; péristome continu, évasé ou épaissi au bourrelet.

*Remarques.* — Nous n'avons pas à nous préoccuper des *Dauphinules* à bourrelet, puisque le calcaire de Mons ne nous en offre pas, soit que le bourrelet n'ait réellement pas existé, soit qu'il n'ait pas été conservé sur nos coquilles trop souvent incomplètes. Ce caractère, peu important aux yeux de Deshayes, le devient aux yeux des autres auteurs. Les espèces à bourrelet étant rangées dans le genre *Liotia*, le nom de *Delphinula* est réservé à celles qui n'en ont pas.

Les autres coquilles, de mêmes formes, non nacrées et à ouverture plus ou moins déformée par le tour précédent, rentrent dans le genre *Cyclostrema*; celles dont le péristome est en même temps interrompu et sinueux en arrière constituent le genre *Adeorbis*.

Ce genre est apparu dès le Trias d'après la plupart des auteurs, et même

dès le Dévonien d'après Bronn. Plusieurs fois interrompu, il ne s'est réellement développé que pendant les temps tertiaires et semble être en décroissance dans les mers actuelles.

**DELPHINULA MONTENSIS, nov. sp.**

Pl. XXIII, fig. 10a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0045 — 80
Largeur — . . . . .	0,0033 — 100
Hauteur du dernier tour. . . . .	0,005 — 54
Angle apical . . . . .	103° à 115°

Coquille petite, déprimée, composée de quatre ou cinq tours s'enroulant sous un angle légèrement obtus, séparés par des sutures peu profondes, ornés à la circonférence de la base d'une carène saillante sur laquelle se fait le retour de la spire et qui s'arrondit de plus en plus en approchant de l'ouverture; une seconde carène moins accusée se voit à quelque distance en avant, laissant entre les deux une surface plane ou légèrement creusée; l'extérieur des tours, droit près de la carène, s'arrondit au milieu et se creuse quelque peu le long de la suture postérieure; le tout est recouvert de filets longitudinaux assez réguliers, bien marqués surtout à l'extérieur des tours; base légèrement conique, ayant au centre un ombilic peu large mais très profond, limité par une carène très saillante, simple, dans le voisinage de laquelle les ornements longitudinaux s'élargissent un peu; ouverture élargie en avant, légèrement anguleuse à la partie postérieure, le bord droit mince, le bord gauche arrondi au milieu, se prolongeant sur le tour précédent en une mince callosité.

*Remarques.* — Cette espèce est la plus grande de toutes celles que nous avons découvertes dans le calcaire grossier de Mons, où elle est assez rare. Elle est légèrement nacrée à l'intérieur, et l'on y remarque des renflements circulaires indiquant comme des épaisissements de bourrelets antérieurs. Elle a quelques rapports avec le *D. striata*, Lamk. (*Ann. du Museum*, t. VIII. pl. XXXVI, fig. 5 à 6), Desh. (1824, II, p. 207, pl. XXXIV, 34, fig. 8-11 et 19-20), que Deshayes ne fait pas descendre en dessous du calcaire grossier, mais dont nous possédons cependant des spécimens de Cuise-la-Motte. Les ornements longitudinaux de l'espèce du bassin de Paris sont beaucoup plus gros.

FIG. 10a, vue du côté de l'ouverture, grossie cinq fois.

— 10b, vue par-dessus, grossie cinq fois.

— 10c. grandeur naturelle.

## DESCRIPTION DES FOSSILES

**DELPHINULA BICARINATA, nov. sp.**

Pl. XXXIII, fig. 2a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0025	—	71
Largeur — . . . . .	0,0035	—	100
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,002	—	57
Angle apical . . . . .	120° à 150°		

Coquille petite, discoïde, composée de quatre tours s'enroulant sous un angle assez convexe, séparés par des sutures bien marquées un peu onduleuses, portant deux carènes longitudinales limitant une bande convexe, la postérieure sur laquelle se fait le retour de la spire très saillante, aiguë, l'antérieure plus obtuse; de petits filets longitudinaux ornent la coquille sur la base, entre les deux carènes et à l'extérieur au voisinage de la carène postérieure où ils sont un peu plus forts, mais s'effacent de plus en plus en approchant de la suture où il y a souvent une bande à peu près lisse; base peu saillante, ayant au centre un ombilic peu large mais très profond, limité par une carène aiguë portant des granules d'où partent quelques ondulations rayonnantes peu prolongées; ouverture arrondie, entière, avec une légère gouttière à l'angle postérieur.

*Remarques.* — Cette espèce conserve des traces de son ancienne coloration, et son intérieur est nacré. Constamment plus petite que le *D. Montensis* (p. 51), elle s'en distingue encore par sa forme plus déprimée et sa carène extérieure beaucoup plus saillante. Elle est plus commune dans le gisement de Mons.

FIG. 2a, vue du côté de l'ouverture, grossie sept fois.

— 2b, vue par-dessus.

— 2c, grandeur naturelle.

**DELPHINULA HELICINA, nov. sp.**

Pl. XXIII, fig. 3a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0015	—	50
Largeur — . . . . .	0,003	—	100
Angle apical . . . . .	115°		

Coquille petite, discoïde, composée de trois ou quatre tours légèrement arrondis à l'extérieur, séparés par des sutures linéaires bien marquées; base conique, surbaissée,

limitée extérieurement par une carène très saillante, aiguë, sur laquelle se fait le retour de la spire, ayant au centre un ombilic large et profond, nettement limité par une carène intérieure simple et sans crénelures; des stries obliques et ondulées, indiquant une ouverture également oblique et affectant une certaine régularité, recouvrent toute la surface de la coquille; ouverture arrondie à intérieur nacré.

*Remarques.* — Bien qu'incomplète du côté de l'ouverture, on peut dire que cette espèce est fort bien conservée; on distingue même, principalement du côté de la spire, des traces de coloration consistant en de larges bandes brunes transverses aux tours.

Sa forme plus déprimée et son unique carène à l'extérieur des tours la distinguent du *D. bicarinata* (p. 52). Quand aux espèces du bassin de Paris, aucune des *Dauphinules* de Deshayes ne peut lui être comparée. L'espèce qui paraît s'en approcher le plus appartient à un autre genre: c'est l'*Adeorbis levigata*, Desh. (1862, II, p. 433), dont cet auteur avait fait d'abord le *Turbo levigatus* (1837, II, p. 257, pl. XXXIII, fig. 13-15). L'illustre paléontologiste a probablement eu de bonnes raisons pour en agir ainsi. Dans tous les cas, cette espèce est beaucoup moins déprimée, et elle a la carène moins aiguë.

- FIG. 5a, vue du côté de l'ouverture, grossie sept fois  
 — 5b, vue du côté de l'ombilic, grossie sept fois.  
 — 5c, vue du côté de la spire, grossie sept fois.  
 — 5d, grandeur naturelle.

**DELPHINULA CRENULATA, nov. sp.**

Pl. XXIII, fig. 5a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille. . . . .	0,00525	—	81
Largeur — . . . . .	0,004	—	100
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,002	—	50
Angle apical . . . . .			125°

Coquille petite, déprimée, discoïde, composée de quatre tours arrondis, s'enroulant sous un angle régulier en une spire obtuse, le dernier quelque peu rentrant, séparés par des sutures profondes, à surface lisse ou montrant seulement de fines stries longitudinales et des stries de croissance transverses plus marquées; base arrondie ayant au centre un

ombilic très large et très profond, limité par une carène saillante portant des crénelures d'où partent des sillons rayonnants se prolongeant très peu sur la base mais descendant dans l'ombilic jusqu'au tour précédent; ouverture ronde, oblique, un peu sinueuse à la partie postérieure, à péristome simple et continu.

*Remarques.* — Cette coquille conserve des traces vagues de coloration. Elle est abondante dans le calcaire grossier de Mons. Les ornements longitudinaux sont parfois tellement ténus qu'il est difficile de les apercevoir même à l'aide d'une forte loupe, et cela sur des coquilles parfaitement conservées. Elle se rapproche du *D. marginata*, Lamk. (*Ann. du Museum*, t. VIII, pl. XXXVI, fig. 6 a, b); et Desh. (1824, II, p. 208, pl. XVIII, fig. 17-20, et 1864, II, p. 943), qui, dans le bassin de Paris, se rencontre dans les sables inférieurs, le calcaire grossier, et les sables moyens; l'ombilic est beaucoup plus évasé chez l'espèce de Mons, et les crénelures de la carène ombilicale sont moins brusquement limitées.

FIG 5a, vue du côté de l'ouverture, grossie sept fois.

— 5b, vue par-dessus, grossie sept fois.

— 5c, grandeur naturelle.

**DELPHINULA FUNICULARIS, nov. sp.**

Pl. XXIII, fig. 6a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0025	—	72
Largeur — . . . . .	0,0035	—	100
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,002	—	57
Angle apical . . . . .			120°

Coquille petite, plus large que longue, composée de trois tours s'enroulant régulièrement, séparés par des sutures profondes bien marquées, ayant une carène à la partie postéro-extérieure limitant une bande plane s'étendant jusqu'à la suture, ornés de filets minces et serrés, longitudinaux, recoupés près de la suture par quelques sillons rayonnants; le reste du tour, en avant de cette carène, est arrondi et orné de filets longitudinaux plus minces et plus serrés jusqu'à une carène périombilicale fort saillante et ornée de crénelures très fortes se prolongeant en rayonnant jusque vers le milieu de la base et pénétrant dans l'intérieur de l'ombilic jusqu'au tour précédent; ouverture arrondie, un peu anguleuse à la partie postérieure; bord tranchant, une légère expansion du bord gauche se prolonge en un finicule crénelé dans l'intérieur de l'ombilic.

*Remarques.* — Cette coquille, par les plis transverses de la carène

antérieure, se rapproche de *D. crenulata* (p. 54), mais elle s'en distingue facilement par son ombilic plus grand et plus évasé, par sa carène postérieure et ses ornements longitudinaux.

FIG. 6a, vue du côté de l'ouverture, grossie sept fois.  
— 6b, vue par-dessus, grossie sept fois.  
— 6c, grandeur naturelle.

**DELPHINULA INORNATA, nov. sp.**

Pl. XXIII, fig. 4a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,002 — 100
Largeur — . . . . .	0,002 — 100
Hauteur du dernier tour. . . . .	0,001 — 50
Angle apical . . . . .	70° à 75°

Coquille petite, composée de quatre tours parfaitement ronds, s'enroulant régulièrement en une spire un peu obtuse, se touchant en une seule ligne de tangence, et produisant ainsi une suture très profonde; ces tours sont lisses et brillants, dépourvus d'ornements à l'extérieur et du côté de la base, mais légèrement plissés et granuleux à la circonférence de l'ombilic; celui-ci est petit, à bords évasés; ouverture entièrement ronde, à péristome mince et continu.

*Remarques.* — Cette espèce, assez commune dans le calcaire grossier de Mons, se distingue très bien des deux précédentes par sa surface presque entièrement lisse et par l'absence de toute carène limitant l'ombilic; seulement la ligne de granulations qui remplace la carène la rattache par cela même à ces deux espèces. C'est ce qui nous a décidés à ne pas admettre pour cette coquille le genre *Collonia*, Gray, lequel du reste n'est qu'une subdivision des *Dauphinules*.

Pour trouver des comparaisons à faire dans le bassin de Paris, et en ne considérant que la forme extérieure, nous devrions recourir à un autre genre (*Valvata*, voy. Desh., 1862, *Anim. sans vert.*, II, p. 524-527) auquel notre coquille n'appartient positivement pas.

FIG. 4a, vue du côté de l'ouverture, grossie dix fois.  
— 4b, vue par-dessus, grossie dix fois.  
— 4c, grandeur naturelle.



**DELPHINULA GLOBOSA, nov. sp**

Pl. XXIII, fig. 7a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille. . . . .	0,0025	—	83
Largeur — . . . . .	0,005	—	100
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,002	—	62
Angle apical . . . . .			90°

Coquille petite, globuleuse, composée de trois tours s'enroulant sous un angle un peu convexe, arrondis, ayant à la circonférence de la base un léger aplatissement sur lequel se fait le retour de la spire, ornés de légers filets longitudinaux bien marqués aux premiers tours, mais disparaissant presque complètement vers l'ouverture, recoupés de légères stries d'accroissement affectant au premier tour une forme légèrement costulée; base assez plane, un peu arrondie jusqu'à une carène très forte, simple, qui limite un ombilic profond; ouverture arrondie, modifiée par le retour de la spire, un peu anguleuse en arrière, à bords minces; bord collumellaire un peu renflé au milieu empiétant légèrement sur l'ombilic et le rendant semi-lunaire.

*Remarques.* — Cette espèce est très abondante dans le calcaire grossier de Mons. Quelques coquilles ont conservé des traces de coloration. Elle se distingue des *D. funicularis* (p. 54) et *crenulata* (p. 55), principalement par l'absence de crénelures à la carène de l'ombilic.

FIG. 7a, vue du côté de l'ouverture, grossie huit fois.

— 7b, vue par dessus, grossie huit fois.

— 7c, grandeur naturelle.

**DELPHINULA MULTILINEATA, nov. sp.**

Pl. XXIII, fig. 8a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille. . . . .	0,00675	—	96
Largeur — . . . . .	0,007	—	100
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,004	—	57
Angle apical . . . . .			90°

Coquille assez petite, presque aussi longue que large, composée de quatre à cinq tours saillants enroulés sous un angle régulier, le dernier très dilaté, séparés par des sutures profondes, portant extérieurement trois carènes, l'antérieure et la postérieure bien mar-

quées, la troisième entre les deux, mais un peu plus rapprochée de la postérieure et ne se montrant bien qu'au dernier tour; le retour de la spire se fait sur la carène antérieure; les ornements consistent en de nombreux filets longitudinaux assez forts, assez espacés et séparés par des sillons striés en arrière de la carène postérieure, plus petits et plus serrés partout ailleurs et surtout sur la base où ils se prolongent jusqu'à l'ombilic; base légèrement arrondie, avec un ombilic étroit et profond, bordé par un sillon assez large longeant la carène périombilicale; ouverture arrondie, légèrement anguleuse; bord mince et légèrement évasé à la partie antérieure.

*Remarques.* — Cette espèce se rapproche beaucoup du *Delphinula turbinoïdes*, Lamk. (*Ann. du Museum*, IV, p. 110, et VIII, pl. XXXVI, fig. 2-6); Desh. (1824, II, p. 207, pl. XXXIV, fig. 15-19, et 1857, II, p. 934), espèce du calcaire grossier et surtout des sables moyens, par ses ornements longitudinaux et ses carènes, lesquelles cependant sont moins accusées. La coquille de Mons est beaucoup plus déprimée.

Fig. 8a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.  
 — 8b, vue par-dessus.  
 — 8c, grandeur naturelle.

**DELPHINULA SPINOSA, nov. sp.**

Pl. XXIII, fig. 9a, b, c, d.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,00075 — 100
Largeur — . . . . .	0,002 — 57

Coquille fort petite, déprimée, discoïde, à spire plane, composée de trois tours s'élargissant assez rapidement, séparés par des sutures presque linéaires du côté de la spire, profondes dans l'ombilic, ornée partout de stries d'accroissement obliques; base limitée extérieurement par une carène très forte et très aiguë, portant des épines longues et aplaties au nombre de onze pour la partie du dernier tour restée libre, très petites d'abord mais grandissant considérablement jusqu'à l'ouverture; ombilic large et évasé laissant voir tous les tours de la spire, limité par une autre carène assez forte; le restant de la base arrondi jusqu'à la carène épineuse; ouverture oblique, arrondie à l'intérieur, à bords assez épais.

*Remarques.* — Cette espèce est très rare dans le calcaire grossier de Mons.

Il y a quelques *Dauphinules* qui ont, comme celle-ci, une carène épineuse à la circonférence de la base. Deshayes en a donné deux dans son premier ouvrage, le *D. Regleyana*, Desh. (II, p. 202, pl. XXIII, fig. 7, 8, et 1864, II, p. 932) et *D. calcar*, Lamk. (Desh., II, p. 202, pl. XXIII, fig. 11, 12; et 1857, p. 932), toutes deux du calcaire grossier. Elles sont de beaucoup plus grande taille que l'espèce de Mons. Nous remarquons que les trois espèces ont les premiers tours, formant la coquille embryonnaire, non épineux. Dans la coquille de Mons, les premiers tours sont un peu enfoncés à la suture, c'est-à-dire que le tour antérieur déborde le tour précédent, tandis que plus tard c'est le contraire qui a lieu, le dernier tour se retirant un peu de la suture. Aucune épine ne se montre avant ce dernier tour, contrairement à ce qui se passe chez les espèces du bassin de Paris. Nous pouvons peut-être en conclure que notre coquille n'est que le jeune âge de l'espèce. Nous n'en possédons, malheureusement, qu'un seul spécimen, et encore est-il un peu fruste, les épines qui, probablement étaient pointues, n'ont pas conservé leur forme primitive.

- FIG. 9a, vue du côté de l'ouverture, grossie dix fois.  
 — 9b, vue du côté de l'ombilic, grossie dix fois.  
 — 9c, vue du côté de la spire, grossie dix fois.  
 — 9d, grandeur naturelle.

Genre **ANGARINA**, Bayle, 1878.

SYNONYMIE : *Delphinulopsis*, Wright, 1878.

*Car. gén.* — Coquille sénestre, nacrée, ombiliquée, déprimée, orbiculaire; spire aplatie ou rentrante; tours arrondis, à côtes longitudinales et épineuses surtout à la circonférence de la base où les épines sont très fortes; péristome simple.

*Remarques.* — M. Bryce M. Wright proposa le genre *Delphinulopsis* en 1878 pour une coquille sénestre des mers du Japon qu'il supposait ne pas avoir atteint l'âge adulte. La même année, et dans la même publication (p. 325), M. Bayle fit observer que M. Laube, en 1870, avait déjà proposé le même nom pour une espèce appartenant également à la même

famille des *Delphinulidæ* et proposa de le remplacer, pour éviter toute confusion, par celui d'*Angarina*.

M. Wright ajoutait, à la description de l'espèce japonaise, qu'il connaissait une coquille fossile de Sumatra inédite et appartenant à la collection du British Museum, laquelle lui paraissait se rapporter à son nouveau genre; seulement elle n'est pas sénestre, de sorte que ce caractère ne serait pas absolument nécessaire.

M. Wright ne nous dit pas à quel étage géologique appartient la coquille de Sumatra. Il est probable que c'est à une assise tertiaire supérieure. Dans ce cas, l'espèce du calcaire grossier de Mons constituerait la plus ancienne du genre.

ANGARINA SPINOSA, nov. sp.

Pl. XXIII, fig. 14a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,001	—	40
Largeur — . . . . .	0,0025	—	100
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,001	—	40

Coquille petite, fragile, discoïde, sénestre, concave des deux côtés, à tours peu nombreux, sub-quadrangulaires, ornés de sept rangées d'épines, deux sur la base, les trois plus fortes à l'extérieur des tours, et deux au côté postérieur, la rangée de l'angle antéro-extérieur acquérant surtout des dimensions remarquables; des stries de croissance courbes relient toutes ces épines; base plane; ombilic très ouvert; ouverture ronde à péristome continu, simple.

*Remarques.* — Cette coquille, dont nous ne possédons qu'un spécimen malheureusement incomplet, est très remarquable. A en juger par ses stries de croissance, fort peu distinctes du reste, elle aurait à peu près le même mode d'accroissement que les *Bifrontia*; mais c'est le seul rapprochement possible entre les deux genres. Nous ne connaissons aucune coquille du bassin de Paris qui puisse lui être comparée.

FIG. 14a, vue du côté de l'ouverture, grossie dix fois.  
 — 14b, vue du côté de l'ombilic, grossie dix fois.  
 — 14c, grandeur naturelle.

Genre **TEINOSTOMA**, H. et A. Adams, 1855.

*Car. gén.* — Coquille orbiculaire, polie, non nacrée, à spire courte et à tours peu nombreux; région ombilicale recouverte d'une large callosité; ouverture circulaire, oblique, à péristome simple ou doublé au bord gauche, quelquefois prolongé.

*Remarques.* — Les coquilles de ce genre ne sont pas nacrées, c'est ce qui les distingue de celles appartenant au genre *Umbonium*, Link., 1807 (*Rotella*, Lk., 1810), avec lesquelles elles ont de commun l'encroûtement calleux de l'ombilic.

Deshayes en cite quatorze espèces du bassin de Paris, depuis les sables inférieurs jusqu'aux sables de Fontainebleau, fort abondantes surtout dans le calcaire grossier. L'espèce du calcaire grossier de Mons paraît être, jusqu'à présent, la plus ancienne du genre. Signalons cependant le genre *Helicocryptus*, d'Orb., 1847, des terrains jurassiques et crétacés, qui, d'après M. Fischer, se rapprocherait des *Teinostoma*. Peut-être le genre *Lewisiella*, Stoliezka, 1868, des terrains jurassiques, s'en rapproche-t-il d'avantage encore.

**TEINOSTOMA BILABRATA**, nov. sp.

Pl. XXIII. fig. 11a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,003	—	75
	Largeur — . . . . .	0,004	—	100
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,002	—	50
	Angle apical . . . . .			110°

Petite coquille déprimée, solide, lisse, brillante, composée de quatre tours s'enroulant régulièrement jusqu'à la moitié du dernier qui est un peu en retraite, séparés par des sutures peu profondes mais bien marquées, peu arrondis à la partie postérieure, mais saillants et vaguement carénés à la circonférence de la base où se fait le retour de la spire; base convexe, marquée vers le centre d'une légère dépression indiquant la place de l'ombilic rempli par une callosité; ouverture ronde, très oblique, à péristome double vers la columelle, simple au-delà, s'épaississant fortement à l'intérieur.

*Remarques.* — Cette espèce est assez abondante dans le calcaire grossier

de Mons. L'espèce de Deshayes qui paraît se rapprocher le plus de la nôtre est le *T. elegans* (1864, II, p. 922, pl. LXIII, fig. 16-20) du calcaire grossier. Les proportions sont sensiblement différentes ainsi que les ornements et le bord n'est pas doublé, particularité curieuse qu'on ne rencontre dans aucune espèce du bassin de Paris.

- FIG. 11a, vue du côté de l'ouverture, grossie cinq fois.  
 — 11b, vue par-dessus, grossie cinq fois.  
 — 11c, grandeur naturelle.  
 — 11d, variété plus déprimée.

Genre **LEUCORHYNCHIA**, Crosse, 1867.

*Car. gén.* — Coquille orbiculaire, polie, non nacrée, à spire courte et tours peu nombreux, ombiliquée; ouverture arrondie à péristome simple et continu; bord basal et bord columellaire donnant naissance à une forte protubérance calleuse se prolongeant au-dessus de la région ombilicale sans la toucher.

*Remarques.* — M. Crosse a créé ce genre pour une coquille vivante très curieuse de la Nouvelle-Calédonie (*L. Caledonia*, J. DE CONCH., 1877, XV, p. 320, pl. XI, fig. 4). Il est étonnant que l'habile paléontologiste n'ait pas rapporté à son nouveau genre la coquille décrite par Deshayes sous le nom de *Delphinula callifera*. L'espèce du calcaire grossier de Mons lui appartient d'une manière aussi incontestable; elle se trouve ainsi la plus ancienne du genre. Signalons cependant le genre *Pienomphalus*, Lindström, 1884, du terrain silurien, qu'il est impossible, dit M. Fischer, de distinguer actuellement du genre *Leucorhynchia*, parce que sa couche nacrée n'est pas connue.

**LEUCORHYNCHIA NITIDA**, *nov. sp.*

Pl. XXII, fig. 11a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0015	—	75
Largeur — . . . . .	0,002	—	100
Hauteur du dernier tour. . . . .	0,001	—	50
Angle apical . . . . .			120°

Très petite coquille déprimée, lisse et brillante, composée de trois tours arrondis séparés par des sutures bien marquées, sans ornements, s'enroulant régulièrement jusqu'à

la dernière moitié du dernier tour qui prend plus de développement pour se contracter ensuite jusqu'à l'ouverture; celle-ci est relativement assez petite, oblique, arrondie, à bords assez épais, touchant à peine le tour précédent; base ayant au centre un ombilic profond, recouvert en grande partie par une expansion du bord intérieur en forme de lèvres arrondie un peu en arrière de l'ouverture.

*Remarques.* — Deshayes décrit dans son premier ouvrage une petite coquille du calcaire grossier, mais que l'on rencontre aussi, quoique beaucoup plus rarement, dans les sables inférieurs et dans les sables moyens et qui a la plus grande analogie avec la nôtre; c'est la *Delphinula callifera* (1824, II, p. 210, pl. XXV, fig. 16-18). Dans son second ouvrage, il éprouve quelque hésitation à lui conserver son ancien genre (1864, II, p. 938) et ce n'est que parce que l'ombilic reste toujours ouvert, dit-il, qu'il maintient sa première détermination. Cette manière d'être de l'ombilic caractérise le genre nouveau de M. Crosse, auquel appartiennent évidemment la coquille de Deshayes et celle que nous décrivons actuellement. Malgré leur grande ressemblance, nous ne pouvons identifier les deux espèces, la coquille de Mons n'atteignant guère que la moitié de la taille de l'espèce du bassin de Paris.

FIG. 11a, vue du côté de l'ouverture, grossie onze fois.  
 — 11b, vue du côté de l'ombilic, grossie onze fois.  
 — 11c, grandeur naturelle.

Genre **ADEORBIS**, G. Wood, 1842.

*Car. gén.* — Coquille non nacrée, orbiculaire, déprimée, à tours peu nombreux, sail-lants ou anguleux à l'extérieur; ombilic large et profond; ouverture arrondie ou ovale, fortement inclinée et sinueuse en arrière, déformée par le tour précédent; péristome simple, non continu.

*Remarques.* — Il est presque impossible, dit M. Fischer, de saisir la limite entre les *Cyclostrema* et les *Adeorbis* (JOURN. DE CONCH., 1857, p. 170). Le genre *Skenea*, de son côté, ne s'en distingue que par l'animal, c'est-à-dire qu'au point de vue paléontologique cette coupe devient inutile.

Deshayes confond cependant le genre *Adeorbis* avec le genre *Skenea*,

que des particularités anatomiques semble plutôt rapprocher du groupe des *Rissoa*. C'est ce qu'ont compris les autres auteurs qui distinguent les deux genres et continuent à maintenir les *Adeorbis* dans le voisinage des *Delphinula*.

Ce genre n'est, jusqu'à présent, indiqué d'une manière bien certaine que dans les terrains tertiaires. Deshayes fait cependant remarquer que parmi les *Trochus* donnés par d'Orbigny dans la *Paléontologie française, terrains crétacés*, il se trouve des formes qui se rapprochent beaucoup des *Adeorbis*. D'Orbigny, du reste, n'admettait pas ce genre.

**ADEORBIS SIMILIS**, Desh.

Pl. XX, fig. 14a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,00125	—	50
	Largeur — . . . . .	0,0025	—	100
	Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,001	—	40

SYNONYMIE : *Adeorbis similis*, Desh., 1862, *Anim. sans vert.*, II, p. 438, pl. XXIX, fig. 26-29.  
 — — Watelet, 1870, *Cat. des moll. des sables inf.*, p. 8.

Coquille petite, très déprimée, discoïde, composée de quatre tours arrondis s'enroulant régulièrement en une spire peu saillante, séparés par des sutures profondes et bien marquées, ornés à l'intérieur et sur la base de filets très fins, longitudinaux, assez réguliers, simples; base ayant un ombilic large et profond, évasé, où les filets longitudinaux s'atténuent beaucoup et disparaissent même parfois, et d'où rayonnent obliquement quelques rares stries de croissance; ouverture très oblique.

*Remarques.* — Cette coquille est assez rare dans le calcaire grossier de Mons. Malgré l'état incomplet de nos spécimens, ce que nous en disons suffit amplement pour la caractériser. Nous la rapportons à l'*A. similis*, Desh., des sables inférieurs, bien que cette dernière se montre généralement de plus grande taille dans le bassin de Paris. Les ornements sont identiquement les mêmes et les dimensions proportionnelles paraissent différer d'une façon peu sensible.

FIG. 14a, vue du côté de l'ombilic, grossie dix fois.

— 14b, vue du côté de l'ouverture, grossie dix fois.

— 14c, grandeur naturelle.



**ADEORBIS SIMPLEX, nov. sp.**

Pl. XX, fig. 15a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,002	—	50
Largeur — . . . . .	0,004	—	100
Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,0015	—	28
Angle apical . . . . .			145°

Coquille assez petite, brillante, déprimée, discoïde, composée de quatre tours s'enroulant régulièrement en une spire presque plane, séparés par des sutures profondes dans l'ombilic, plus superficielles quoique bien marquées sur la spire; ces tours sont arrondis avec une légère dépression longitudinale longeant la suture à la partie postérieure, ornés de stries de croissance très fines, obliques; ombilic large et profond laissant voir tous les tours de la spire; ouverture arrondie, oblique, un peu sinueuse à l'angle postérieur, peu déformée par le tour précédent, à péristome continu, tranchant, mais épaissi assez brusquement à l'intérieur.

*Remarques.* — Cette espèce est assez rare dans le calcaire grossier de Mons. Nous possédons un spécimen plus aplati que la coquille-type, concave du côté de la spire et du côté de l'ombilic, et qui pourrait peut-être constituer une espèce nouvelle. Notre coquille est voisine de l'*A. nitida*, Desh. (1862, II, p. 436, pl. XXIX, fig. 1-4), des sables inférieurs; mais cette dernière est moins déprimée et porte, à la circonférence de la base, deux carènes très rapprochées qui manquent à l'espèce de Mons.

Fig. 15a, vue du côté de l'ombilic, grossie six fois.  
 — 15b, vue du côté de l'ouverture, grossie six fois.  
 — 15c, grandeur naturelle.

**ADEORBIS RADIATA, nov. sp.**

Pl. XXIII, fig. 1a, b, c, d.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0015	—	45
Largeur — . . . . .	0,0035	—	100
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,00325	—	95

Petite coquille discoïde, très déprimée, naérée, composée de trois tours d'un accroissement régulier, réunis du côté de la spire par des sutures saillantes et du côté de l'ombilic

par des sutures profondes ; ornements très complexes : sur la base, ce sont des sillons rayonnants, inclinés légèrement en avant, très finement striés longitudinalement, séparés par des côtes lisses, partant d'une carène limitant l'ombilic et s'arrêtant brusquement à la circonférence de la base ; au delà ils sont remplacés par des filets longitudinaux recoupés de filets transverses et formant un treillis très serré, lequel se prolonge sur tout l'extérieur des tours jusqu'à une vague carène sur laquelle se fait le retour de la spire et où recommencent, à peu près symétriquement, les mêmes ornements rayonnants que sur la base ; ombilic large, laissant voir tous les tours ; ouverture arrondie à bords évasés et irréguliers, avec une petite gouttière à l'angle postérieur et deux sinus aux deux carènes de la base, celui de la carène limitant l'ombilic plus prononcé.

*Remarques.* — Cette espèce est très rare ; l'unique spécimen que nous possédons et que nous avons dessiné est très complet. Les ornements rayonnants, si remarquables et si réguliers, s'atténuent beaucoup en approchant de l'ouverture, s'irrégularisent et deviennent plus serrés. Quant aux stries longitudinales de l'extérieur des tours, elles sont tellement fines et serrées qu'elles n'ont pu être figurées.

Deshayes décrit une petite coquille semblable à celle-ci, comme taille et comme ornements, dont il fait le *Turbo rotatorius* (sables inférieurs d'Hérouval) avec hésitation cependant et la disant très voisine des *Teinostoma* (II, p. 899, pl. LXI, fig. 18-21). La nôtre est beaucoup plus plate et l'ombilic est plus large.

M. Munier-Chalmas connaît une seconde espèce des sables d'Hérouval qui deviendra le type d'un nouveau genre (*Adeorbella*) que cet habile paléontologiste se propose de créer et qui réunira trois espèces, celle de Deshayes qui ne peut pas rester dans le genre *Turbo*, la nôtre et la nouvelle espèce d'Hérouval. Ce genre se caractériserait, entre autres, par le sinus de la base beaucoup plus saillant dans l'espèce inédite que dans celles qui sont connues.

- FIG. 1a, vue du côté de l'ombilic, grossie huit fois.  
 — 1b, vue du côté de la spire, grossie huit fois.  
 — 1c, vue du côté de l'ouverture, grossie huit fois.  
 — 1d, grandeur naturelle.

Genre **FISSURELLA**, Brugnière, 1789.

*Car. gén.* — Coquille ovale, conique, non spirale, plus ou moins déprimée, à ornements extérieurs rayonnés, concentriques ou cancellés; sommet plus rapproché du bord antérieur, perforé en avant; intérieur lisse et poli, montrant une impression musculaire en fer-à-cheval élargie en avant, et un bourrelet plus ou moins saillant entourant la perforation du sommet.

*Remarques.* — Les premières espèces de ce genre sont signalées dans le calcaire carbonifère, mais elles sont contestées. Celles des terrains secondaires sont plus certaines. Le genre devient plus abondant dans les terrains tertiaires et se trouve à son maximum dans les mers actuelles.

**FISSURELLA CONCENTRICA**, *nov. sp.*

Pl. XXIV, fig. 1a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,048 — 100
Largeur — . . . . .	0,034 — 71
Hauteur . . . . .	0,018 — 58
Longueur du côté postérieur . . . . .	0,028 — 58
Longueur de l'ouverture apicale . . . . .	0,005 — 10
Angle apical . . . . .	110° à 115°

Grande coquille solide, conique, déprimée, à sommet saillant et à base ovale, symétrique, un peu atténuée en avant; ornée à l'extérieur de stries et de sillons d'accroissement irréguliers, assez rares vers le sommet, mais plus nombreux, plus forts et plus serrés à mesure que l'on s'approche du bord; bord simple et tranchant, épaissi en un bourrelet large mais peu saillant en dehors de l'empreinte musculaire; perforation antérieure contiguë au sommet, ovale, à bords simples à l'extérieur, entourée à l'intérieur d'un bourrelet très saillant, droit à la partie postérieure, plus large et plus plat sur les autres côtés où il contourne exactement la perforation et où il est marqué de petits plissements transverses.

*Remarques.* — Nous ne possédons qu'un seul spécimen de cette belle et grande espèce, mais il est d'une conservation parfaite. La simplicité de ses ornements semble être son caractère distinctif: ce sont des stries et sillons concentriques, à peine traversés par de très rares et très fines stries rayon-

nantes et si peu visibles qu'elles ne peuvent être notées dans une caractéristique. Nous ne pouvons lui comparer, dans le bassin de Paris, que le *F. minosti*, Melleville (1843, *Mém. sur les sables inférieurs*, p. 44, pl. IX, fig. 15-16; Desb., 1857, II, p. 242, pl. VII, fig. 9-12), dont les plus grands individus n'atteignent guère que le quart de la taille de l'espèce de Mons.

FIG. 1a, vue par-dessus, grandeur naturelle.  
 — 1b, vue de l'intérieur, grandeur naturelle.  
 — 1c, vue de profil, grandeur naturelle.

Genre *CALYPTRÆA*, Lamk., 1799.

*Car. gén.* — Coquille conique, trochiforme, spirale; ouverture circulaire occupant toute la base, munie intérieurement d'une lame spirale contournée ou échancrée, adhérente d'un côté à la périphérie et de l'autre à une columelle centrale s'élevant du sommet.

*Remarques.* — Les anciens conchyliologistes réunissaient aux *Calyptrées* des coquilles dont la lame intérieure est à bords libres et affecte la forme d'un cornet plus ou moins complet. Plus tard sont venues des subdivisions qui, admises par MM. H. et A. Adams, ont été rejetées par Deshayes et d'autres auteurs qui les considéraient comme n'ayant que la valeur de sous-genres. Au point de vue anatomique il devrait en être ainsi, tous les animaux ayant sensiblement la même organisation et les mêmes mœurs; mais il peut être très avantageux d'admettre des coupes artificielles pour des genres très nombreux comme celui-ci. Aussi M. Fischer en admet-il trois : *Crucibulum*, Schumacher, 1817; *Crepidula*, Lamk., 1799 et *Calyptræa*. Mais il applique ce dernier nom aux espèces à lame interne spirale, contrairement à MM. Adams qui le réservent aux espèces dont l'appendice intérieur est en cornet (*Calyptræa Humphryi*), *Calyptræa cretacea* d'Orb.

Ce genre compte une espèce des terrains crétacés. Il est devenu très abondant dans les terrains tertiaires, et se trouve maintenant largement représenté dans toutes les mers.

Les deux espèces que nous a fournies le calcaire grossier de Mons sont, depuis longtemps, connues dans le bassin de Paris.

## DESCRIPTION DES FOSSILES

## CALYPTRÆA TROCHIFORMIS, Lamk

Pl. XXIV, fig. 2a, b, c, d.

DIMENSIONS : Largeur de la coquille . . . . .	0,0075 — 100
Hauteur . . . . .	0,006 — 75
Angle apical . . . . .	60° à 65°

SYNONYMIE : <i>Trochus apertus et opercularis</i> , Brander, 1766, <i>Foss. hand.</i> , pl. I, fig. 1, 2 et fig. 3.	
<i>Calyptræa trochiformis</i> , Lamk., 1802, <i>Ann. du Museum.</i> , t. I, p. 385, n° 4; t. VII, pl. XV, fig. 3a, b, c.	
<i>Infundibulum echinulatum, spinosum et tuberculatum</i> , Sow., 1815, <i>Min. conch.</i> , n° 18, pl. XCVII, fig. 2, fig. 6 et fig. 4 et 5.	
<i>Trochus calyptræformis</i> , Lamk., 1822, <i>Anim. sans vert.</i> , t. VII, p. 558, n° 9.	
<i>Calyptræa trochiformis</i> , Desh., 1824, <i>Coq. foss. des env. de Paris.</i> , t. II, p. 30. pl. IV, fig. 1-4 et 11-13.	
<i>Infundibulum trochiformis</i> , J. Lea., 1833, <i>Tert. form. of Alabama.</i> , p. 96, pl. III, fig. 76.	
<i>Calyptræa trochiformis</i> , Galeotti, 1837, <i>Const. géol. du Brabant</i> , p. 149, n° 76.	
— — Morris, 1843, <i>Cat. of british foss.</i> , p. 238.	
— — Nyst, 1843, <i>Desc. des coq. foss. des terr. tertiaires de la Belgique</i> , p. 360.	
— — Bronn, 1848, <i>Index pal.</i> , t. I, p. 207.	
<i>Infundibulum trochiforme</i> , Dixon, 1850, <i>Geol. of Sussex</i> , p. 96 et 226, pl. XIV, fig. 27.	
— — d'Orb., 1852, <i>Prodr.</i> , t. II, p. 371, 25° ét., n° 670.	
— — ( <i>Calyptræa</i> ) Nyst, in d'Omalius d'Halloy, <i>Géol. de la Belgique</i> , p. 382.	
<i>Calyptræa trochiformis</i> , Desh., 1861, <i>Anim. sans vert.</i> , t. II, p. 275.	
— — Dewalque, 1868, <i>Prodr. d'une descr. géol. de la Belgique</i> , p. 403 (Bruxellien et Lackenien).	
— — Watelet, 1870, <i>Cat. des moll. des sables inf.</i> , p. 6	
— — Rutot et Vincent, 1880, in M. Mourlon, <i>Géol. de la Belg.</i> , p. 163 (Panisélien), 175 (Bruxellien) et 187 (Wemmelien).	

Coquille conique, presque aussi haute que large, composée de trois ou quatre tours arrondis à la partie postérieure, presque droits antérieurement et perpendiculaires au plan de la base, séparés par des sutures bien marquées; sommet aigu, très excentrique par rapport au plan de la base; toute la surface des premiers tours est lisse et ne montre que des stries de croissance très obliques et de très petites perforations, mais au dernier elle se charge de rugosités irrégulières et arrondies très serrées augmentant d'importance en approchant de la base et sans relation apparente avec les stries de croissance; ouverture arrondie, lisse et brillante à l'intérieur; une lame interne mince et tranchante s'élève du centre, se projette légèrement en avant et rejoint en spirale le bord extérieur.

*Remarques.* — Cette espèce est beaucoup plus rare dans le calcaire grossier de Mons que le *C. Suessoniensis* (p. 198) dont elle diffère par sa forme beaucoup plus élevée, par ses tours plus droits à la partie antérieure et même par ses rugosités beaucoup plus grossières. Le spécimen que nous avons dessiné, tout à fait complet, représente le jeune âge de cette espèce excessivement variable comme on sait, puisque de la forme patelloïde elle

parvient à celle d'une coquille turriculée (Desh., 1861). Cette variété de formes a souvent embarrassé les paléontologistes et amené des identifications sur lesquelles on a dû revenir. C'est ainsi que le Dr Grateloup avait cru devoir lui rapporter une espèce des faluns du bassin de l'Adour, également très variable de formes, tellement qu'il y reconnaissait la plupart des variétés éocènes des auteurs. Le nom de l'espèce de Grateloup a été changé par d'Orbigny (*Prodr.*, III, p. 91, n° 1698) et est devenu *Infundibulum subtrochiforme*, lequel pourra devenir *Calyptræa subtrochiformis* pour ceux qui, comme nous, admettent plutôt ce dernier genre, à moins qu'on ne considère cette espèce comme l'équivalent du *C. ornata*, Basterot, 1825, que d'Orbigny ne mentionne pas.

Le *C. trochiformis* est très répandu et se montre, grâce à sa présence dans le calcaire grossier de Mons, depuis la base jusqu'au sommet des terrains éocènes, au moins en Belgique. On le rencontre, en France, dans les sables inférieurs, le calcaire grossier et les sables moyens, et en Angleterre dans les couches de Braklesham, de Barton et de Plumstedt. C'est une des rares espèces tertiaires que l'on rencontre en Amérique où M. Lea l'a depuis longtemps signalée dans les couches de l'*Alabama*.

- FIG. 2a, vue de profil, grossie trois fois.  
 — 2b, vue du côté de la spire, grossie trois fois.  
 — 2c, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.  
 — 2d, grandeur naturelle.

**CALYPTRÆA SUESSONIENSIS**, d'Orb., *sp.*

Pl. XXIV, fig. 3a, b, c, d.

DIMENSIONS :	Diamètre de la coquille . . . . .	0,004	— 100
	Hauteur . . . . .	0,0075	— 54
	Angle apical . . . . .		85 à 100°

- SYNONYMIE : *Infundibulum suessoniensis*, d'Orb., 1850, *Prodr.*, t. II, p. 320, 24<sup>e</sup> ét., n° 428.  
*Calyptræa suessoniensis*, Desh., 1861, t. II, p. 276, pl. IX, fig. 1-2.  
 — — Watelet, 1870, *Cat. des moll. des sables inf.*, p. 7.  
 — — Rutot et Vincent, 1880, in Mourlon, *Géol. de la Belg., listes des foss.*, p. 148, Land. inf. et p. 163, Panisélien.  
*Infundibulum suessoniense*, Dewalque, 1880, *Revue des foss. land. décrits par de Ryckhold* (1854), (l. concentricum, de Ryck), *Ann. de la Soc. géol. de Belg.*, p. 158.

Coquille conique, de moitié aussi haute que large, formée de trois à quatre tours légè-

rement arrondis, séparés par des sutures plus ou moins bien marquées, le sommet sub-central; les premiers tours sont lisses et ne laissent voir que quelques stries de croissance très obliques, le dernier chargé de rugosités très irrégulières devenant de plus en plus saillantes jusqu'à la base et à travers lesquelles on distingue de nombreuses stries de croissance qu'elles semblent parfois accompagner; ouverture arrondie; intérieur lisse et brillant laissant vaguement apercevoir les sutures extérieures; une lame interne mince et tranchante s'élève du centre et rejoint en spirale le bord extérieur.

*Remarques.* — Le plus grand nombre de nos individus sont lisses ou n'ont que des stries de croissance. Ils sont toujours incomplets et montrent rarement toutes les particularités de la lame centrale interne, partie du reste excessivement délicate; tel est le cas du spécimen que nous avons dessiné. Le bord est aussi légèrement ébréché sur presque tout son pourtour, ce qui ne doit pas modifier sensiblement les dimensions proportionnelles indiquées plus haut.

Cette espèce, dit Deshayes, est la seule qui existe dans les sables inférieurs. Il a probablement voulu dire que c'est la seule qui s'y trouve confinée. En effet, le *C. trochiformis* Lamk., s'y rencontre également, mais passe dans le calcaire grossier et même dans les sables moyens. Ces deux espèces sont très voisines, mais le *C. Suessoniensis* est beaucoup moins variable de formes et plus régulier comme conicité, comme base et comme profil. Malgré cela, il est probable qu'il y aura souvent eu confusion. En Belgique, cette espèce se rencontre dans le landenien moyen et dans le panisclien, c'est-à-dire dans la même zone géologique que dans le bassin de Paris et sans la dépasser.

FIG. 3a, vue de profil, grossie deux fois.

— 3b, vue du côté de la spire, grossie deux fois.

— 3c, vue du côté de l'ouverture, grossie deux fois.

— 3d, grandeur naturelle.

Genre **PILEOPSIS**, Lamk., 1812.

SYNONYMIE : **Capulus**, Monfort, 1810.

*Car. gén.* — Coquille en cône oblique, à sommet postérieur recourbé en spirale, ouverture entière, dilatée, ovale ou suborbiculaire, à bords souvent irréguliers; intérieur présentant une impression musculaire en fer-à-cheval ouverte en avant, sans base adhérente.

*Remarques.* — Les espèces de ce genre vivent en place, s'attachant à des corps étrangers dont elles respectent les irrégularités; de là proviennent les irrégularités des bords de l'ouverture. (Voy. genre *Hipponix*, p. 72.)

Ce genre est apparu dès les temps siluriens et a été fort abondamment représenté dans tous les terrains primaires, dont les espèces ont généralement la spire très développée. Il s'est continué dans les temps secondaires, mais en subissant une quasi-interruption pendant la période jurassique. Depuis, il n'a cessé de s'accroître et se trouve à son maximum de développement dans les mers actuelles.

**PILEOPSIS INEVOLUTA, nov. sp.**

Pl. XXIV, fig. 4a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille.	. . . . .	0,004	— 100
	Largeur	— . . . . .	0,0035	— 88
	Hauteur	— . . . . .	0,002	— 50

Petite coquille conique, fortement oblique, à sommet contourné en spirale et surplombant le bord postérieur, irrégulière de forme, ayant une tendance à s'élargir sur tout son pourtour; sommet lisse et sans ornements, le reste de la surface orné de grosses côtes rayonnantes reparties en zones irrégulières et comme imbriquées; ouverture large et évasée, à bords épaissis à l'intérieur.

*Remarques.* — Notre spécimen n'avait probablement pas atteint son entier développement. Cette coquille est très rare dans le calcaire grossier de Mons. Elle ressemble beaucoup à l'*Hipponix sublamellosus*, Desh. (1857, II, p. 271, pl. IV, fig. 14-15), et nous nous serions peut-être décidés à identifier les deux espèces (celle de Mons en serait, dans ce cas, le jeune âge) si celle de Deshayes ne se trouvait confinée dans le calcaire grossier et descendait dans les sables inférieurs.

- FIG. 4a, vue par-dessus, grossie six fois.  
 — 4b, vue de profil, grossie six fois.  
 — 4c, grandeur naturelle.



Genre **HIPPONIX**, DeFrance, 1819.

*Car. gén.* — Coquille en cône oblique, à sommet postérieur peu ou pas recourbé en spirale; ouverture entière, dilatée, ovale ou suborbiculaire; intérieur présentant une impression musculaire en fer-à-cheval, ouverte en avant; base operculaire calcaire, adhérente, à impression musculaire semblable et correspondante.

*Remarques.* — La base operculaire donne, aux espèces de ce genre, une régularité des bords de l'ouverture que ne peuvent avoir celles du genre *Pileopsis*, Lamk. (*Capulus*, Montf.), qui, n'ayant pas de base semblable, ne peuvent amortir complètement les irrégularités des corps sur lesquelles elles vivent d'une façon immuable. Ce caractère distinctif des deux genres est cependant peu certain. Celui du sommet, peu ou point spiral, surtout si l'on admet la latitude donnée par Deshayes, de pouvoir aller jusqu'à deux tours, l'est moins encore. Cependant, la faculté de se former une base calcaire provient nécessairement d'un caractère organique réellement de valeur. Malheureusement, ce caractère échappe à la paléontologie, et il est bien difficile de dire si les fossiles que l'on a répartis entre les deux genres appartiennent bien à l'un ou à l'autre. Cela explique le parti qu'ont pris certains paléontologistes de les réunir, et ce n'est qu'après un peu d'hésitation que nous avons pris celui de les séparer, suivant, en cela, les idées les plus récentes.

On semble disposé à faire rentrer, actuellement, dans le genre *Hipponix*, le plus grand nombre des fossiles que l'on avait autrefois placés dans le genre *Capulus*. C'est ce qu'a fait Deshayes. Le genre *Hipponix* est donc relativement nombreux en espèces dans les terrains tertiaires; mais les paléontologistes lui refusent la même ancienneté qu'au genre *Pileopsis* et ne le font pas remonter au delà des temps crétacés.

Nous croyons devoir faire un *Hipponix* d'une espèce du calcaire grossier de Mons dont la régularité du bord de l'ouverture semble indiquer son mode d'accroissement.

**HIPPONIX IMBRICATARIA**, *nov. sp.*

Pl. XXIV, fig. 5a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,009 — 100
Largeur — . . . . .	0,007 — 78
Hauteur — . . . . .	0,005 — 56

Coquille assez petite, conique, assez élevée, symétrique, un peu élargie en arrière; ouverture ovale ayant les bords latéraux relevés des deux côtés un peu en avant du milieu de la coquille; côté antérieur très peu concave, abrupt, retombant sur la base presque à angle droit; côté postérieur beaucoup plus long, convexe; toute la surface recouverte de lamelles rayonnantes disposées en rangées concentriques continues, assez peu régulières en largeur, imbriquées, ne correspondant pas d'une rangée à l'autre, ornées de côtes saillantes arrondies supérieurement, quelquefois bifides; tous ces ornements sont plus ou moins effacés dans le voisinage du sommet.

*Remarques.* — L'intérieur de l'unique spécimen que nous possédons étant encroûté, nous ne pouvons rien en dire; son aspect symétrique et relativement régulier constitue son caractère distinctif. Aucune des espèces données par Deshayes ne s'approche de celle-ci : toutes sont plus irrégulières.

Fig. 5a, vue de profil, grossie trois fois.  
— 5b, vue par-dessus, grossie trois fois.  
— 5c, grandeur naturelle.

Genre **PATELLA**, Lister, 1688.

*Car. gén.* — Coquille conique non spirale, surbaissée, à base ovale ou subcirculaire, à sommet antérieur subcentral; surface ornée de côtes rayonnantes rendant le bord festonné; intérieur présentant une impression musculaire postérieure en fer-à-cheval ouverte en avant.

*Remarques.* — On voit que le genre *Patella* a le sommet antérieur, ce qui le distingue des genres *Capulus* et *Hipponix*.

Il n'est guère possible, au point de vue paléontologique, de distinguer les *Patelles* des *Helcions*, et cependant ces deux genres sont fort éloignés

l'un de l'autre au point de vue de l'anatomie des organes respiratoires. D'Orbigny, qui a cependant préconisé tant de restrictions génériques, admet le genre *Helcion* qui, dit-il, se distingue par son ensemble mince presque lisse et par l'absence de grosses côtes rayonnantes. S'il en était réellement ainsi, on ne devrait pas balancer à admettre la distinction; mais rien n'est moins certain. Pictet remarque, en effet, que l'on trouve bien des espèces rapportées par d'Orbigny aux *Acmeés* ou *Helcions*, qui sont épaisses, solides et ornées de grosses côtes rayonnantes, tandis que, dans les mers d'Europe, on rencontre plusieurs *Patelles* minces et lisses. Deshayes, de son côté, bien qu'admettant la distinction anatomique, reconnaît que la paléontologie est impuissante à distinguer les deux genres. Nous admettons, faute de mieux, la distinction telle que la donne d'Orbigny.

Ce genre est très ancien et très nombreux dans tous les étages géologiques : il apparaît dès le Cambrien supérieur et s'est continué jusque dans les mers actuelles où il se trouve à son maximum de développement.

**PATELLA VINCENTI, nov. sp.**

Pl. XXIV, fig. 7a, b, c, d.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille.	. . . . .	0,007	—	100
	Largeur	— . . . . .	0,0055	—	78
	Hauteur	— . . . . .	0,00325	—	46

Assez petite coquille conique, à sommet au tiers antérieur, assez élevée, à base ovale, symétrique; ornée de côtes rayonnantes arrondies et assez fortes, surtout à la partie supérieure, au nombre d'environ 25 principales prenant naissance près du sommet, séparées par des intervalles plats où se montrent bientôt d'autres côtes secondaires, le tout recoupé par de nombreuses stries concentriques de croissance; intérieur lisse et poli; impression musculaire bien marquée, mince, un peu élargie aux deux extrémités.

*Remarques.* — Cette espèce est assez rare dans le calcaire grossier de Mons; l'espèce du bassin de Paris dont elle se rapproche le plus est le *P. Raincourtii* Desh. (1857, II, p. 227, pl. V, fig. 5-12) des sables moyens, qui a les côtes rayonnantes moins nombreuses, les stries concentriques plus accusées et le sommet subcentral.

Nous dédions cette espèce à M. Vincent, préparateur au Musée d'histoire naturelle de Bruxelles, si avantageusement connu par ses nombreuses et consciencieuses recherches sur la faune de nos terrains tertiaires.

- FIG. 7a, vue par-dessus, grossie trois fois.  
 — 7b, vue intérieure, grossie trois fois.  
 — 7c, vue de profil, grossie trois fois.  
 — 7d, grandeur naturelle.

**PATELLA REGULARIS**, *nov. sp.*

Pl. XXIV, fig. 9a, b, c, d.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille.	. . . . .	0,003	— 100
	Largeur	— . . . . .	0,00225	— 75
	Hauteur	— . . . . .	0,00153	— 44

Coquille petite, conique, assez haute, à base ovale, symétrique; ornée de côtes rayonnantes nombreuses assez régulières, au nombre de 50 à 55, assez fortes et arrondies, produisant une dentelure au bord, séparées près du sommet par des sillons étroits, profonds, s'aplatissant en approchant du bord et donnant naissance à des côtes intermédiaires; le tout recoupé de quelques stries concentriques d'accroissement peu apparentes; intérieur lisse et poli, montrant quelques sillons rayonnants peu profonds correspondant aux sillons extérieurs; empreinte musculaire peu distincte.

*Remarques.* — Cette espèce se distingue du *P. Vincenti* (p. 74) par sa taille plus petite et ses ornements rayonnants plus réguliers, plus nombreux et plus saillants. Elle n'est pas très rare dans le calcaire grossier de Mons.

- FIG. 9a, vue par-dessus, grossie sept fois.  
 — 9b, vue de l'intérieur, grossie sept fois.  
 — 9c, vue de profil, grossie sept fois.  
 — 9d, grandeur naturelle.

Genre **HELCION**, Montfort, 1810.

*Car. gén.* — Coquille mince, conique, non spirale, surbaissée, à base ovale ou subcirculaire; sommet antérieur subcentral; surface lisse; bords simples; intérieur poli, présentant une impression musculaire en fer-à-cheval, ouverte en avant.

*Remarques.* — Nous renvoyons à ce que nous avons dit au genre *Patella* (p. 73). D'Orbigny rapporte, évidemment à tort, au genre *Helcion*, presque toutes les prétendues *Patelles* fossiles (Pal., II, p. 34). Il en est beaucoup dont la surface est costulée et le bord dentelé, ce qui, d'après sa propre caractéristique, suffit pour en faire des *Patelles*. Quant à la coquille du calcaire grossier de Mons dont nous faisons un *Helcion*, on ne peut guère douter qu'elle n'appartienne réellement à ce genre.

**HELClON SIMPLEX, nov. sp.**

Pl. XXIV, fig. 8a, b, c, d.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille. . . . .	0,005	—	100
Largeur — . . . . .	0,0025	—	85
Hauteur — . . . . .	0,00125	—	42

Coquille petite, ovale, assez élevée, à sommet subcentral, à base ovale, symétrique, lisse et sans ornements extérieurs; intérieur lisse et poli, empreinte musculaire assez large se recourbant au dehors aux deux extrémités.

*Remarques.* — Cette espèce n'est pas très rare dans le calcaire grossier de Mons. Nous pouvons lui comparer, dans le bassin de Paris, le *Patella Dutemplei* Desh. (1857, II, p. 229, pl. V, fig. 13-16) à surface lisse également, mais dont le sommet est beaucoup plus antérieur.

- FIG. 8a, vue par-dessus, grossie sept fois.  
 — 8b, vue de l'intérieur, grossie sept fois.  
 — 8c, vue de profil, grossie sept fois.  
 — 8d, grandeur naturelle.

Genre **SIPHONARIA**, Sow., 1826.

*Car. gén.* — Coquille patelliforme, conique, non spirale, non symétrique, à sommet subcentral un peu sénestre : impression musculaire intérieure en fer-à-cheval dont l'ouverture se trouve à droite à la partie antérieure et correspond, par une dépression siphonale plus ou moins marquée, à une expansion plus ou moins forte du bord.

*Remarques.* — Ce genre fut longtemps confondu avec le genre *Patella*.

Il fut proposé en 1826 par Sowerby, mais comme une simple coupe motivée par sa forme et son empreinte musculaire non symétrique. Plus tard on s'aperçut qu'il ne pouvait appartenir aux *Scutibranches prosobranchiaux*, et l'on s'accorde maintenant à le placer parmi les *pulmonés* au voisinage des *Auricules*.

Ce genre serait très ancien si le *S. Koninckii*, de M<sup>c</sup> Coy, était admis. Cette espèce, en effet, est du calcaire carbonifère; mais les autres auteurs et M. de Koninck lui-même en font un *Patella* ou un *Helcion*.

Les véritables siphonaires fossiles paraissent appartenir aux terrains tertiaires. Les trois espèces éocènes de Deshayes sont des sables moyens. L'espèce de Mons se trouve donc être la plus ancienne du genre.

## SIPHONARIA DUBIA, nov. sp.

Pl. XXIV, fig. 10a, b, c, d.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille	. . . . .	0,0045	—	100
	Largeur	— . . . . .	0,005	—	66
	Hauteur	— . . . . .	0,00115	—	25

Coquille petite, ovale, allongée, non symétrique, déprimée, à sommet aigu, subcentral, se relevant un peu en avant; ornée de côtes rayonnantes assez fortes surtout aux deux extrémités, produisant une dentelure au bord, irrégulières, plus ou moins espacées et laissant entre elles des surfaces planes sur lesquelles se montrent une ou deux autres côtes plus petites, également irrégulières, ne se prolongeant pas jusqu'au sommet; ces côtes sont recoupées de stries et de sillons d'accroissement nombreux et fort irréguliers, bien marqués en approchant du bord; intérieur lisse et brillant, marqué de quelques sillons rayonnants correspondants aux côtes extérieures; empreinte musculaire en fer-à-cheval s'ouvrant à droite à la partie antérieure; une légère expansion du bord se remarque à la hauteur de la branche droite de cette empreinte.

*Remarques.* — Les ornements de cette espèce, par leur régularité, tiennent plutôt du caractère des *patelles* que des *siphonaires*, et d'un autre côté, la coquille est assez petite et les caractères intérieurs caractéristiques du genre sont assez difficiles à discerner. Aussi, n'est-ce pas sans hésitation que nous en avons fait un *siphonaria*.

Les trois espèces données par Deshayes appartiennent aux sables moyens.

Celle qui se rapproche le plus de la nôtre est le *S. crassicostata* (1863, II, p. 693, pl. VIII, fig. 8-11), beaucoup plus grande et moins allongée que l'espèce de Mous. Notre espèce est très rare.

- FIG. 10a, vue de l'intérieur, grossie cinq fois.  
 — 10b, vue par-dessus, grossie cinq fois.  
 — 10c, vue de profil, grossie cinq fois.  
 — 10d, grandeur naturelle.

Genre **CHITON**.

*Car. gén.* — Coquille composée de huit plaques ou valves transverses imbriquées d'avant en arrière et formant un ensemble oval plus ou moins allongé.

*Remarques.* — Ce genre de mollusque fort singulier est très ancien. Il a commencé à se montrer dès la période silurienne et s'est perpétué jusque dans les mers actuelles où il se trouve à son maximum de développement. M. de Koninck en a décrit plusieurs espèces du calcaire carbonifère de Belgique.

Les Chitons ont été, dans ces derniers temps, l'objet de recherches physiologiques de la part de naturalistes éminents. Il en est résulté des découvertes aussi extraordinaires qu'inattendues, dont on peut voir un résumé, malheureusement très succinct, dans le *Manuel de Conchyliologie* de Fischer, pages 870 et suivantes.

**CHITON BAYLEI**, *nov. sp.*

Pl. XXIV, fig. 11a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la valve . . . . .	0,015	--	55
	Largeur — . . . . .	0,0255	—	100
	Hauteur — . . . . .	0,013	—	55
	Plus grand angle au sommet, dans le sens transversal. .			105°
	Plus petit — — — — — longitudinal .			100°

Très grande espèce dont nous ne connaissons que la valve anale. Cette valve est pyramidale, formée de deux parties symétriques séparées au côté anal par un sinus étroit à bords rectilignes allant jusqu'au sommet et soudées au côté dorsal sous un angle extérieur médian, saillant, d'environ 112°, divisées elles-mêmes respectivement en deux aires,

les médianes planes, les latérales légèrement bombées et soudées aux médianes sous un angle un peu plus obtus; ces aires sont ornées de stries et côtes rayonnantes, recoupées par d'autres stries et sillons concentriques et onduleux, jusqu'à un rebord qui leur est parallèle et bien marqué limitant la lame suturale sur laquelle se fait l'imbrication de la valve précédente, assez large aux côtés latéraux mais fort restreinte et largement sinueuse à l'angle médian; la lame suturale correspond, au côté anal, à un bourrelet apophysaire, épais, à sillons transverses et rugueux, grossissant de plus en plus jusqu'au sinus anal; intérieur divisé en trois lobes principaux, le médian correspondant à l'angle médian supérieur, les deux autres aux angles latéraux.

*Remarques.* — Cette coquille est très remarquable et il est étonnant que l'on n'en ait pas découvert d'autres fragments dans le calcaire grossier de Mons. D'après les dimensions données plus haut, elle devait former un ensemble très allongé, probablement de 90 à 100 millimètres, sur une largeur de 35 à 40 seulement. On devrait peut-être la rapporter au genre *Lorica*, H. et A. Adams, démembré du genre *Schizochiton*, Gray, et caractérisés tous deux par une échancrure à la valve postérieure.

Nous dédions cette espèce à M. Bayle, le savant professeur de paléontologie de l'École des mines de Paris.

- FIG. 11a, vue du côté anal, grandeur naturelle.  
 — 11b, vue de la face supérieure, grandeur naturelle.  
 — 11c, vue par-dessous.

#### Genre DENTALIUM.

*Car. gén.* — Coquille tubulaire, en cône régulier très allongé, lisse ou striée longitudinalement, arquée sur toute la longueur mais en chaque point en raison inverse de son épaisseur, ouverte à ses deux extrémités; ouverture antérieure plus grande, circulaire, à bords simples et tranchants; ouverture postérieure tronquée, entaillée ou munie d'un petit tube accessoire interne.

*Remarques.* — Ce genre date des terrains primaires supérieurs. La plus grande espèce connue paraît être celle que M. de Koninck a décrite sous le nom de *D. Herculeum* et qui provient du calcaire carbonifère.

On a proposé, dès l'origine du genre, de séparer les *Dentalium* fissurés à l'extrémité postérieure (*Antalis*, Aldrovande) de ceux qui ne le sont pas.



Deshayes n'attachait pas à cette fissure la valeur d'un caractère générique. Nous ferons comme lui, mais, comme on le verra plus loin, elle conserve une certaine importance comme caractère spécifique.

**DENTALIUM MONTENSE, nov. sp.**

Pl. XXIV, fig. 12a, b.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,07	—	100
	Largeur à l'extrémité antérieure . . . . .	0,0005	—	7
	— — postérieure. . . . .	0,003	—	1
	Angle apical . . . . .	5 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> ° à 4°		

Coquille assez grande, tubulaire, fort allongée, régulièrement conique, assez arquée à la partie postérieure, mais se redressant insensiblement à mesure que le diamètre augmente, lisse et brillante, marquée de fines stries d'accroissement obliques bien visibles à travers le poli de la coquille et de très légers renflements annulaires également obliques et irréguliers; ouverture arrondie, oblique; extrémité postérieure montrant une fissure assez peu prolongée.

*Remarques.* — Cette espèce est très abondante dans le calcaire grossier de Mons, mais on ne l'obtient guère qu'en fragments atteignant rarement plus de 30 millimètres; en réunissant ces fragments nous pensons être arrivés à reconstruire assez exactement la forme primitive; aucun de ces fragments ne nous a présenté l'ouverture entière.

Pour le genre *Dentalium* les comparaisons sont toujours très difficiles et les identifications doivent, par conséquent, toujours être faites avec beaucoup de circonspection. Si nous mélangions des spécimens de Mons et des spécimens du *D. lucidum* Desh. des sables inférieurs, en fragments suffisamment courts, nous ne pourrions probablement plus arriver à les séparer complètement. La seule différence un peu persistante entre les deux espèces est la courbure de l'extrémité postérieure plus forte chez l'espèce de Mons que chez celle de Cuise. De plus, cette dernière ne paraît jamais atteindre une aussi forte taille.

FIG. 5a, coquille en grandeur naturelle.

— 5b, extrémité fortement grossie.

**DENTALIUM HANNONICUM, nov. sp.**

Nous renonçons à donner une description et des dessins de cette espèce qui est bien réelle cependant, mais qui ne se distingue de l'espèce précédente que par l'absence de fissure à l'extrémité postérieure. Des fragments beaucoup plus ténus que ceux où cette fissure se montre n'en offrent absolument aucune trace. Nous devons même dire que les extrémités non fissurées sont sensiblement plus abondantes que les autres. Quant à d'autres caractères distinctifs, des coquilles tout entières pourraient seules nous dire s'il en existe. En effet, ils ne pourraient guère consister qu'en une différence de courbure, ce que la reconstitution par fragments ne peut nous indiquer.

**DENTALIUM MAGNUM, nov. sp.**

Pl. XXIV, fig. 6.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,092 — 100
	Largeur à l'ouverture . . . . .	0,008 — 9
	— au sommet . . . . .	0,001 — 1
	Angle apical . . . . .	4 1/2° à 5°

Coquille grande, solide, allongée, tubulaire, régulièrement conique, arquée vers l'extrémité postérieure, se redressant et devenant presque droite du côté de l'ouverture; ornée vers le sommet de onze à treize côtes saillantes, aiguës, mais s'arrondissant insensiblement, presque égales et assez régulièrement disposées, séparées par des sillons d'abord simples mais recevant successivement d'autres côtes en nombre variable vers le milieu de la coquille, lesquelles grossissent de plus en plus en même temps que les premières s'atténuent de façon à devenir à peu près égales pour disparaître presque entièrement à l'ouverture; ces ornements sont traversés par des stries de croissance très fines légèrement obliques; ouverture arrondie.

*Remarques.* — Nous ne connaissons pas le sommet de cette espèce; le nombre des côtes est presque toujours de treize, la courbure n'est pas toujours bien régulière. Le spécimen dessiné présente cette particularité curieuse que la coquille ayant été brisée du vivant de l'animal, ce dernier l'a continuée en

laissant la cassure apparente. Un autre montre une interruption curieuse des côtes, comme si, pendant la croissance, l'animal avait tourné sur son axe et s'était peu après replacé dans sa position première. Voyez Deshayes (1857, pl. III, fig. 1), où est indiqué un semblable accident.

Cette espèce est aussi fort abondante dans le calcaire grossier de Mons, mais moins que les deux précédentes. Aucun des fragments de l'extrémité postérieure que nous possédons n'est fissuré. C'est évidemment une des plus grandes des terrains tertiaires. L'espèce du bassin de Paris qui s'en approche le plus est le *D. striatum*, Sow. (Desh., 1857, II, p. 206, pl. I, fig. 9-11), espèce des sables inférieurs et du calcaire grossier et que l'on rencontre aussi en Angleterre dans les couches de Barton et de Bracklesham. Les ornements sont à peu près les mêmes et ils s'atténuent de la même façon à mesure que la coquille grandit. Mais la conicité augmente plus rapidement dans la coquille de Mons, la courbure est moins forte, surtout à l'extrémité antérieure, et la taille est plus grande.

FIG. 6, coquille en grandeur naturelle.

---

## ORDRE II. — PULMONÉS.

Genre **CYLINDRELLINA**, Munier-Chalmas, 1884.

*Car. gén.* — Coquille allongée, turriculée, à tours nombreux; ouverture ovale, à péristome continu, libre, simple ou légèrement épaissi; columelle munie d'un seul pli terminal; tours antérieurs présentant intérieurement des plis columellaires et pariétaux plus ou moins nombreux et saillants.

*Remarques.* — Ce genre a été créé par M. Munier-Chalmas pour une espèce que l'on trouve également en France et en Belgique, dans les terrains éocènes les plus inférieurs; c'est celle que nous allons décrire. Le même auteur suppose qu'il existe une seconde espèce lisse, spéciale à la Belgique, mais nous pensons qu'il n'en est rien, les premiers tours de l'espèce existante étant toujours lisses; les stries ne commencent parfois que très tard, mais chez tous les spécimens que nous possédons elles existent au moins aux derniers tours, bien qu'il faille parfois une assez forte loupe pour les distinguer.

**CYLINDRELLINA BRIARTI**, Munier-Chalmas.

Pl. XXVI, fig. 9a, b, c, d.

SYNONYMIE : *Cylindrellina Briarti*, Mun.-Ch., 1884, *Ann. de malac.*, vol. I, pl. VII, fig. 4-6.  
— — — — — Mun.-Ch., 1886, *Bull. de la Soc. géol. de France*, p. 190.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . . 0,0095  
Largeur — . . . . . 0,002  
Hauteur du dernier tour . . . . . 0,001 25  
Angle apical aux quatre premiers tours . . . . . 45° à 50°

Coquille petite, allongée, turriculée, composée de neuf tours un peu arrondis, séparés par des sutures assez profondes, les cinq premiers s'enroulant assez régulièrement et donnant à la coquille sa plus grande largeur, les autres se rétrécissant jusqu'à l'ouverture; dernier tour muni à sa partie extérieure d'une carène bien marquée limitant une base lisse au centre de laquelle se trouve une fente ombilicale profonde; extérieur des premiers

tours lisse et poli, les trois ou quatre derniers ornés de stries d'accroissement fines, arquées en arrière, irrégulières, de plus en plus visibles et devenant de petits sillons vers l'ouverture; celle-ci petite, ovale, subquadrangulaire, oblique, détachée du tour précédent, à péristome continu, s'épaississant en un bourrelet arrondi un peu en arrière; bord columellaire montrant un pli médian oblique.

*Remarques.* — Par une section suffisante d'une coquille de cette espèce, M. Munier-Chalmas a pu en compléter la description de la manière suivante <sup>1</sup> : « Avant-dernier tour portant à l'intérieur : 1° deux plis columellaires lamellaires, saillants, le postérieur présentant à sa jonction avec la columelle un sillon plus ou moins accusé; 2° deux plis pariétaux basilaires précolumellaires, assez rapprochés, étroits et peu élevés; 3° un pli pariétal latéral peu saillant, situé vis-à-vis du pli columellaire postérieur; 4° un pli pariétal supérieur un peu moins développé que le précédent. »

Une coquille, sectionnée vers le sixième tour, c'est-à-dire à la plus forte largeur, nous montre que ces plis, si compliqués à l'avant-dernier tour, se réduisent à deux, l'un très saillant, lamellaire, au bord columellaire, l'autre beaucoup moins fort au bord opposé.

Une espèce paraissant très voisine de celle-ci a été décrite par Deshayes sous le nom de *Cylindrella Parisiensis* (1863, II, p. 872, pl. LVII, fig. 10-12). Malheureusement sa description fut faite d'après un spécimen unique, fort incomplet et brisé en plusieurs fragments que l'auteur est parvenu à réunir de manière à en donner les dimensions exactes. On pourrait peut-être, si les fragments sont encore détachés, s'assurer du genre réel de la coquille. Quant à en faire une section longitudinale, comme le désire M. Munier-Chalmas, on ne s'y résoudra, probablement, que très difficilement. Cette espèce provient des sables de Jonchery (partie supérieure des sables de Bracheux), et elle se différencie de l'espèce de Mons, non parce que le dernier tour est un peu

<sup>1</sup> Ainsi que le dit M. Munier-Chalmas dans ses observations sur le genre *Cylindrellina*, les dessins de cette espèce ont été donnés dans les *Annales de malacologie* (vol. I, pl. VII, fig. 4-6) en même temps que d'autres mollusques nouveaux; mais par suite de circonstances spéciales, une très faible partie du texte fut remise, de sorte que plusieurs espèces figurées ne furent pas décrites. C'est ce qui explique pourquoi la description seule du *Cylindrellina* parut dans le *Bulletin* de la Société géologique.

détaché de la spire, ce qui existe aussi chez quelques-uns de nos spécimens, mais parce que l'ouverture est plus aiguë et se projette en avant, que la base est moins profondément ombiliquée et que les ornements persistent jusqu'au sommet de la spire. Ce sont des différences sur la valeur desquelles de nouvelles trouvailles, dans le gîte de Jonchery, pourront seules apporter quelque lumière en même temps que sur le genre réel auquel on doit rapporter la coquille de Deshayes.

Le *C. Briarti* est au nombre des espèces, nombreuses déjà, qui se trouvent en même temps dans le calcaire grossier de Mons et dans les marnes strontianifères de Meudon, établissant ainsi un lien de plus entre ces deux termes les plus inférieurs des terrains éocènes.

- FIG. 9a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois et demie.  
 — 9b, vue par-dessus, grossie trois fois et demie.  
 — 9c, vue de l'extrémité de la spire détachée, grossie sept fois.  
 — 9d, grandeur naturelle.

Genre *LYMNEA*, Lamk., 1801.

*Car. gén.* — Coquille dextre, mince et fragile, ovale oblongue, plus ou moins turriculée, à spire aiguë; ouverture plus longue que large, arrondie en avant, aiguë en arrière; bord droit simple; columelle tordue.

*Remarques.* — Ce genre a été signalé dans le Purbeckien et dans le Wealdien. Il se montre en grande abondance dans les terrains tertiaires et se trouve à son maximum à l'époque actuelle. On le rencontre dans les eaux douces de toutes les latitudes.

Nous étions en droit d'espérer trouver ce genre bien représenté dans les assises d'eau douce du système montien. Si cet espoir a été déçu, cela provient probablement du peu d'échantillons de ces assises que nous avons eus à notre disposition. Nous ne pouvons décrire qu'une seule espèce d'après un spécimen unique quelque peu incomplet provenant de l'assise du calcaire grossier proprement dit.

## LYMNEA HANNONICA, nov. sp.

Pl. XXIII, fig. 12a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0045	— 100
Largeur — . . . . .	0,0025(?)	— 56
Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,005	— 64
Angle apical . . . . .		35°

Petite coquille mince et fragile, brillante, allongée, fusiforme, composée de cinq tours arrondis, assez larges, séparés par des sutures simples assez profondes, enroulés en une spire fort aiguë, ayant pour tout ornement des stries de croissance très fines, recourbées en arrière en arrivant à la suture; dernier tour très développé, ovale, un peu renflé à la partie postérieure, atténué en avant; ouverture allongée, étroite, oblique, un peu tronquée en avant, aiguë en arrière; bord droit largement arqué; bord gauche infléchi à la base de la columelle; celle-ci tordue.

*Remarques.* — Nous ne possédons qu'un seul spécimen de cette espèce, et encore le bord droit est enlevé en partie. Elle semble être caractérisée par une spire très aiguë. Ce pourrait bien être le jeune âge d'une espèce plus grande.

Nous recevons, au moment où nous mettons la dernière main à ce fascicule, la livraison du *Journal de conchyliologie* du 1<sup>er</sup> juillet 1886 (3<sup>e</sup> sér., t. XXVI, n<sup>o</sup> 3) où nous trouvons la *Description d'espèces du terrain tertiaire des environs de Paris* (suite), par M. Cossmann. Nous y trouvons le *L. Herouvalensis* (p. 225, pl. X, fig. 4) des sables d'Hérouval, faisant partie des sables de Cuise. C'est une petite espèce dont le facies est à peu près celui de la nôtre. Seulement, la spire paraît encore plus pointue et l'ouverture a beaucoup moins d'étendue, n'étant guère que les deux cinquièmes de la longueur totale.

FIG 12a, vue du côté de l'ouverture, grossie sept fois.

— 12b, vue par-dessus, grossie sept fois.

— 12c. grandeur naturelle.

Genre **PHYSA**, Draparnaud, 1801.

*Car. gén.* — Coquille spirale, sénestre, ovale oblongue, mince, luisante, transparente; ouverture verticale, allongée; columelle torse; péristome mince et tranchant.

*Remarques.* — Ce genre se distingue des *Lymnées* par l'enroulement sénestre. D'après plusieurs malacologues cette particularité aurait peine à suffire pour établir une coupe générique, si des distinctions anatomiques ne venaient s'y ajouter <sup>1</sup>.

On cite des *Physes* des terrains jurassiques, mais dont la détermination générique est extrêmement difficile et assez douteuse (Fischer, p. 510). On en cite de plus certaines des terrains wealdiens d'Angleterre. Ce sont les terrains tertiaires qui nous en offrent le plus grand nombre. Elles sont, actuellement, universellement répandues.

Ce genre a une grande importance au point de vue des assises éocènes du système montien. Nous en connaissons deux espèces appartenant au calcaire grossier de Mons proprement dit. Mais on sait qu'il existe, au-dessus de cette formation marine ou d'estuaire, un calcaire marneux d'une puissance assez considérable et qui est entièrement d'eau douce. Cette assise est principalement connue par les sondages de la caserne de cavalerie et de la prison à Mons, dont les principaux échantillons recueillis se trouvent dans la collection de M. G. Lambert; ils renferment beaucoup de *Physes*, mais, malheureusement, toujours à l'état de moules.

<sup>1</sup> Des formes sénestres, spéciales aux îles Sandwich et à la Nouvelle-Zélande, ont, pour des motifs analogues, été rapportées au genre *Lymnea* (Fischer, p. 506). Mais la paléontologie est impuissante à juger des caractères anatomiques et elle doit nécessairement ranger toutes les coquilles sénestres parmi les *Physes*.



## DESCRIPTION DES FOSSILES

**PHYSA MONTENSIS, nov. sp.**

Pl. XXIII, fig. 13a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0075	—	100
Largeur — . . . . .	0,004	—	55
Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,0045	—	60
Angle apical . . . . .			57°

Coquille assez petite, ovale, mince, composée de quatre tours arrondis, le dernier très développé, s'enroulant régulièrement en une spire aiguë, séparés par des sutures profondes, simples, ornés de stries d'accroissement irrégulières et bien marquées.

*Remarques.* — L'ouverture de l'unique spécimen que nous possédons étant encroûtée, nous ne pouvons rien dire de cette partie de la coquille qu'il eût été, cependant, si intéressant de connaître. De plus, ce spécimen est un peu aplati par la fossilisation, ce dont il n'a pas été tenu compte dans l'indication des dimensions.

Notre espèce se rapproche beaucoup, par sa forme générale, du *P. primigenia*, Desh. (1866, II, p. 733, pl. XLIV, fig. 11-12), des sables inférieurs de Jonchery et de Chalons-sur-Vesles; mais elle a l'ouverture proportionnellement plus longue et plus développée, et n'a pas de cordonnet sutural.

Le spécimen dessiné est du calcaire grossier de Mons, mais l'espèce est beaucoup plus abondante dans le calcaire lacustre supérieur (*calcaire à Physes*) où elle atteint une taille un peu plus grande.

Fig. 14a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.

— 14b, vue par-dessus, grossie quatre fois.

— 14c, grandeur naturelle.

**PHYSA DUMONTI, nov. sp.**

Pl. XXIII, fig. 13a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,004	—	100
Largeur — . . . . .	0,002	—	50
Hauteur du dernier tour. . . . .	0,0025	—	62
Angle apical . . . . .			50° à 55°

Coquille petite, mince, ovale, composée de quatre tours arrondis, le dernier très grand,

s'enroulant sous un angle un peu concave, séparés par des sutures profondes bordées, aux derniers tours, par un cordonnet résultant d'une légère dépression longitudinale postérieure, n'ayant pour autres ornements que de très fines stries de croissance; ouverture grande, occupant plus de la moitié de la longueur de la coquille, ovale, oblique, arrondie mais un peu atténuée et saillante en avant, aiguë en arrière; péristome un peu évasé à la partie antérieure; labre, arqué, légèrement aplati à sa partie moyenne; columelle tordue.

*Remarques.* — Cette espèce s'écarte de la précédente par son cordonnet sutural; mais, par cela même, elle se rapproche du *P. primigenia*, sans qu'il soit possible, cependant, de proposer une identification. L'espèce de Mons est, en effet, plus globuleuse et elle a l'ouverture plus étroite et plus allongée.

Cette espèce provient du calcaire grossier de Mons. Nous n'avons pu la reconnaître dans aucun des échantillons du calcaire à *Physes* supérieur qui font partie de la collection de M. G. Lambert.

FIG. 13a, vue du côté de l'ouverture, grossie six fois.  
— 13b, vue du côté de l'ombilic, grossie six fois.  
— 13c, grandeur naturelle.

Genre AURICULA, Lamk., 1796.

*Car. gén.* — Coquille ovale, oblongue, à spire conoïde assez courte; ouverture étroite longitudinale; bord columellaire portant généralement deux plis, quelquefois trois; bord droit dilaté, épaissi et non denté.

*Remarques.* — L'évasement du bord droit et le bourrelet intérieur sont plus ou moins prononcés, et si quelques auteurs admettent, dans ce genre, quelques coquilles à bord simple, ces caractères n'en doivent pas moins être considérés comme le cas général et les indices de l'âge adulte. Le bourrelet intérieur n'est pas régulier et présente souvent des renflements allongés, quelquefois même dentiformes, établissant la liaison avec d'autres genres. D'un autre côté, les évasements peuvent se répéter périodiquement sous forme de varices latérales, établissant ainsi d'autres liaisons. De là, des hésitations bien naturelles pour le classement des espèces.

MM. Adams ont abandonné le nom d'*Auricula* pour reprendre celui

d'*Ellobium*, donné par Bolten en 1798, mais sans qu'il ait été accompagné d'aucune description. Les noms donnés par Bolten dans les mêmes conditions ont parfois été préférés à des noms plus récents; mais dans le cas présent, il n'en a pas été de même, le nom d'*Auricula* étant en quelque sorte consacré par l'usage et caractérisant très bien la forme de l'ouverture de la coquille.

Ce genre a commencé à se montrer dans le terrain jurassique. Il est surtout devenu fort abondant dans les terrains tertiaires.

Le calcaire grossier de Mons nous en a fourni six espèces, dont une très remarquable comme nous le verrons (*A. grandis*).

*AURICULA GRANDIS*, nov. sp.

Pl. XXV, fig. 1a, b.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,044 — 100
	Largeur — . . . . .	0,020 — 43
	Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,025 — 57
	Angle apical . . . . .	41° à 42°

Coquille grande, épaisse, allongée, à spire conique et aiguë mais souvent érodée, formée en son état complet de neuf tours s'enroulant régulièrement, peu saillants, séparés par des sutures bien marquées, irrégulières et onduleuses, ornés de côtes transverses irrégulières, très saillantes à la partie postérieure du dernier tour, où elles sont même quelquefois tuberculeuses près de la suture et non parallèles aux nombreuses stries de croissance qui les recoupent souvent sous un angle assez prononcé; dernier tour très développé, portant une très forte côte à l'opposé de l'ouverture, celle-ci ovale, allongée, arrondie en avant, anguleuse en arrière; labre fortement évasé et muni d'un bourrelet intérieur très fort, surtout à la partie postérieure en arrivant à la suture, où il s'élargit considérablement, plus mince à la partie antérieure où il fait retour sur le bord columellaire en cachant un faux ombilic; bord columellaire portant deux plis; le postérieur assez fort, l'antérieur beaucoup moindre et quelquefois peu visible.

*Remarques.* — Cette espèce est une des plus grandes du genre trouvées à l'état fossile. La très forte côte qui se remarque à l'opposé de l'ouverture et qui n'est qu'un bourrelet antérieur, indique une périodicité d'accroissement égale à un demi-tour de la coquille, ce qui caractérise certains genres de la famille des Auriculides; et comme on n'en remarque généralement plus

aux tours précédents, on en doit conclure que l'âge adulte ne se marquait que quand la coquille avait déjà atteint une très grande taille, remarque qui pourrait être faite à propos de beaucoup d'espèces du genre.

Cette espèce est très commune dans le calcaire grossier de Mons, et c'est une des plus grandes coquilles du gisement. Aucune des espèces du bassin de Paris décrites par Deshayes n'atteint cette taille. Toutes s'en distinguent parfaitement par les particularités de l'ouverture.

FIG. 1a, vue du côté de l'ouverture, grandeur naturelle.  
— 1b, vue par-dessus, grandeur naturelle.

*AURICULA CONICA*, nov. sp.

Pl. XXV, fig. 2a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,013 — 100
Largeur — . . . . .	0,006 — 46
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,007 — 56
Angle apical . . . . .	40°

Coquille épaisse, allongée, à spire pointue, composée de sept tours arrondis s'enroulant régulièrement, séparés par des sutures bien marquées un peu irrégulières, ornés de stries de croissance obliques, irrégulières; dernier tour très développé; ouverture allongée, étroite, un peu oblique, arrondi en avant, aiguë en arrière, à labre évasé et épaissi en un bourrelet intérieur très saillant vers le milieu du bord droit, mais interrompu assez brusquement avant d'arriver à l'angle postérieur, faisant retour, en avant, jusque vers le milieu du bord gauche, en obstruant en partie un faux ombilic; bord columellaire muni de deux plis bien prononcés, le postérieur vers le milieu de l'ouverture est plus fort que l'autre; une large et mince callosité rejoint l'angle postérieur.

*Remarques.* — A première vue, et surtout d'après les dessins, on pourrait prendre cette coquille pour le jeune âge de l'espèce précédente; mais un examen attentif y fait vite reconnaître des différences essentielles. L'ouverture est beaucoup plus étroite, les plis columellaires plus forts et plus apparents, et le bourrelet présente la particularité d'être brusquement interrompu vers l'angle postérieur.

Nous ne possédons qu'un seul spécimen complet de cette espèce. L'inté-

rier est, en partie encroûté, ce qui nous a peut-être caché certaines particularités intéressantes.

Les *A. ovata*, Lamk. (*Ann. du Mus.*, IV, p. 435 et VIII, pl. LX, fig. 8ab, et Desh., 1824, II, p. 68, pl. VI, fig. 12-13) et *A. Lamarki*, Desh. (1863, II, p. 778, pl. XLVIII, fig. 22-24), toutes deux du calcaire grossier, nous semblent être celles du bassin de Paris qui s'approchent le plus de notre espèce. Elles en ont à peu près la taille; mais, entre autres caractères distinctifs, le bourrelet de l'espèce de Mons est beaucoup plus fort et l'ouverture plus étroite. Nous ne remarquons pas non plus, à cette dernière, les varices périodiques des espèces du bassin de Paris.

FIG. 2a, vue du côté de l'ouverture, grandeur double.

— 2b, vue par-dessus, grandeur double.

— 2c, grandeur naturelle.

AURICULA PERFORATA, nov. sp

Pl. XXV, fig. 3a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,021	—	100
Largeur — . . . . .	0,010	—	18
Hauteur du dernier tour. . . . .	0,0105	—	50
Angle apical . . . . .			60°

Coquille assez grande, ovale, allongée, composée de huit ou neuf tours étroits, presque plats, s'enroulant d'abord sous un angle un peu concave au voisinage du sommet mais devenant convexe aux derniers tours, séparés par des sutures linéaires presque superficielles et bordées d'une mince bandelette relevée à la partie postérieure des tours; dernier tour très développé, portant un léger renflement au tiers postérieur, un peu en avant duquel se fait le retour de la spire; base atténuée en avant, ayant un ombilic profond, étroit, semi-lunaire, très-bien limité par une carène saillante partant de la partie antérieure de l'ouverture pour se perdre en arrière sous la callosité du bord columellaire; toute la surface est ornée de stries de croissance fines, obliques, irrégulières, et de costulations parallèles affectant une certaine régularité aux premiers tours, mais devenant irrégulières au dernier; ouverture allongée, irrégulière ou sub-polygonale, aiguë en arrière, dilatée et légèrement sinueuse en avant; péristome bordé par un bourrelet arrondi, fortement épaissi à la columelle et à la partie antérieure, moins fort au bord droit; bord columellaire portant trois plis, le plus fort presque au milieu, étroit et très saillant, l'antérieur plus petit et de même forme, le troisième en arrière, plus obtus et affectant la forme d'un renflement provenant du passage de la carène de l'ombilic.

*Remarques.* — De toutes les espèces données par Deshayes, l'*A. Neglecta*, Desh. (1866, II, p. 777, pl. XLVIII, fig. 27-29), de l'étage des sables moyens, est celle qui se rapproche le plus de la nôtre. Mais, outre les différences provenant des dimensions proportionnelles, l'espèce de Mons possède un ombilic véritable au lieu de la simple fente ombilicale de l'espèce du bassin de Paris.

FIG. 3a, vue du côté de l'ouverture, grossie une fois et demie.  
— 3b, vue par-dessus, grossie une fois et demie.  
— 3c, grandeur naturelle.

## AURICULA VICINA, nov. sp.

Pl. XXV, fig. 4a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0075	— 100
Largeur — . . . . .	0,0055	— 47
Hauteur du dernier tour. . . . .	0,0035	— 47
Angle apical . . . . .		55°

Coquille assez petite, allongée, turriculée, à spire pointue, composée de six tours presque plats s'enroulant sous un angle convexe, très étroits au sommet, mais s'élargissant rapidement, réunis par des sutures linéaires presque superficielles, un peu irrégulières et onduleuses, le dernier très développé en longueur, ornés de stries d'accroissement obliques, très fines et très serrées; extérieur des tours montrant une légère dépression suturale bien visible au dernier, mais s'effaçant de plus en plus en approchant du sommet; ouverture ovale, oblique, un peu dilatée en avant, fort aiguë en arrière; bord droit et bord antérieur simples et tranchants, mais s'épaississant en un large bourrelet intérieur peu saillant; bord columellaire portant vers le milieu un pli très saillant, un peu oblique, presque transverse, en avant un second pli beaucoup moins saillant, presque droit, et en arrière un troisième plus petit encore, séparé du pli médian par un sillon large et profond; une légère callosité recouvre tout le bord columellaire.

*Remarques.* — Un examen rapide ferait facilement confondre cette espèce avec le *Blauneria acuta* que nous verrons plus loin; mais les particularités de l'ouverture, et surtout le troisième pli columellaire, ne doivent pas faire hésiter à l'en distinguer et même à la placer dans un autre genre. On lui reconnaît également un second bourrelet intérieur en arrière de celui du

bord, indiquant une périodicité d'accroissement peu prolongée. Elle est plus élancée que toutes les espèces données par Deshayes.

FIG. 4a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.  
— 4b, vue par-dessus, grossie quatre fois.  
— 4c, grandeur naturelle.

AURICULA LONGA, *nov. sp.*

Pl. XXV, fig. 5a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,0125	—	100
	Largeur — . . . . .	0,004	—	52
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,005	—	40
	Angle apical au sommet . . . . .			40°
	— au dernier tour . . . . .			15°

Coquille assez petite, fort allongée, sub-cylindrique, composée de six tours peu arrondis, séparés par des sutures linéaires irrégulières, déprimés à la partie postérieure et dessinant ainsi un cordonnet sutural, ornés de stries d'accroissement obliques, irrégulières; ouverture étroite, oblique, arrondie et un peu élargie en avant, aiguë en arrière; le bord antérieur et le bord droit simples, mais ce dernier s'épaississant rapidement en un bourrelet intérieur bien marqué portant vers le milieu un léger enflement dentiforme; bord columellaire oblique, portant trois plis, le premier à la partie antérieure de la columelle assez petit, le second vers le milieu plus prononcé et correspondant au renflement du bord droit, le troisième plus petit, un peu en arrière; bord gauche recouvert d'une légère callosité.

*Remarques.* — Nous répétons, à propos de cette espèce, ce que nous avons dit de l'espèce précédente (*A. vicina*, p. 93), qu'un examen rapide la ferait facilement ranger parmi les *Blauneria*. Les dents columellaires, et le bourrelet du bord droit beaucoup plus accusé que chez l'*A. vicina*, en font également une *Auricula*, plus élancée que cette dernière et avec laquelle d'autres particularités de l'ouverture empêchent de la confondre.

FIG. 5a, vue du côté de l'ouverture, grossie cinq fois.  
— 5b, vue par-dessus, grossie cinq fois.  
— 5c, grandeur naturelle.

## AURICULA PARVA, nov. sp.

Pl. XXV. fig. 6a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,008 — 100
Largeur — . . . . .	0,004 — 50
Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,004 — 50
Angle apical . . . . .	45°

Coquille assez petite, mince et fragile, ovale, composée de six tours peu saillants, arrondis, s'enroulant régulièrement en une spire pointue, séparés par des sutures bien marquées, ornés de stries d'accroissement obliques, irrégulières, et creusés d'une légère dépression postérieure produisant un petit cordonnet sutural; dernier tour très développé, portant à la partie postérieure une carène obtuse en avant de laquelle se fait le retour de la spire; base conique; ouverture ovale, oblique, allongée, aiguë en arrière, arrondie et saillante en avant; bord droit ovale, arqué, mince, s'épaississant un peu en dedans; bord columellaire légèrement concave, portant deux plis aigus assez petits, l'anérieur est un peu plus saillant que l'autre.

*Remarques.* — Cette espèce se rapproche de certaines espèces du bassin de Paris, entre autres de l'*A. depressa*, Desh. (1863, II, p. 776, pl. XLVIII, fig. 19-21), des sables inférieurs d'Héronval et qui est extrêmement rare. Notre espèce est beaucoup plus petite, un peu moins large proportionnellement et n'a que deux plis columellaires.

FIG. 6a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.

— 6b, vue par-dessus, grossie trois fois.

— 6c, grandeur naturelle.

Genre *PYTHIA*, Bolten, 1798.

*Car. gén.* — Coquille ovale, à spire conique et déprimée, à tours nombreux portant des varices latérales obliques, opposées et correspondant à chaque demi-tour de spire; ouverture étroite, grimaçante, le bord columellaire fortement plissé, le bord droit portant au bourrelet quelques dents alternant avec les plis columellaires.

*Remarques.* — Nous rapportons à ce genre trois espèces du calcaire gros-



sier de Mons qui, par leurs varices latérales, semblent bien lui appartenir. D'autres espèces, très voisines par les particularités de l'ouverture, ont été rapportées à d'autres genres.

*PYTHIA DISTENSUS*, nov. sp.

Pl. XXVI, fig. 2a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0105	—	100
Largeur — . . . . .	0,007	—	67
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0065	—	64
Angle apical . . . . .			75°

Coquille mince et fragile, ovale, globuleuse, composée de cinq à six tours arrondis, s'enroulant sous un angle un peu convexe en une spire courte et obtuse, réunis par des sutures linéaires portant une dépression longitudinale bien accusée à la partie postérieure des tours, et à chaque tour deux varices obliques opposées correspondant d'un tour à l'autre; ces tours sont ornés de stries et sillons d'accroissement obliques, transverses, très serrés, le dernier tour très développé, ovale, très renflé en avant de la dépression suturale; ouverture ovale, oblique, grimaçante, arrondie en avant, aiguë en arrière; bord droit arqué, mince, mais fortement épaissi à l'intérieur par un bourrelet très fort à la partie médiane, assez atténué vers la partie postérieure et portant deux protubérances dentiformes qui le divisent presque par tiers; bord columellaire portant trois plis, l'antérieur très saillant et tordu, le second presque au milieu de l'ouverture aussi saillant et bifide, le troisième plus petit se prolongeant vers la partie postérieure, les intervalles entre les plis correspondant aux dents du bord droit; une callosité très mince réunit le bord droit au bord columellaire.

*Remarques.* — Les varices caractéristiques ne laissent aucun doute sur la détermination générique de cette espèce; il en est de même des particularités de l'ouverture; la dent médiane du bord columellaire, qui est bifide, la rapproche des *Plecotrema*. Nous ne connaissons pas une coquille dans les terrains éocènes que nous puissions comparer à la nôtre. Elle est assez rare dans le calcaire grossier de Mons.

FIG. 2a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.

— 2b, vue par-dessus, grossie trois fois.

— 2c, grandeur naturelle.

## PYTHIA GLOBOSA, nov. sp.

Pl. XXVI, fig. 3a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0085	—	100
Largeur — . . . . .	0,0055	—	65
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0033	—	65
Angle apical . . . . .			90°

Assez petite coquille, globuleuse, déprimée, à spire courte, composée de quatre à cinq tours fort étroits, un peu arrondis, s'enroulant sous un angle convexe en une spire obtuse, recouverts de stries de croissance obliques assez fortes, surtout au dernier tour, et de quelques varices périodiques, montrant une légère dépression longitudinale à la partie postérieure, ce qui produit une bandelette mince le long de la suture; dernier tour très développé, renflé et marqué d'une carène obtuse postérieure, en avant de laquelle se fait le retour de la spire; ouverture ovale, allongée, oblique, aiguë en arrière, arrondie en avant; bord droit arqué, tranchant mais épaissi intérieurement en un bourrelet assez large portant deux protubérances dentiformes sensiblement égales et le divisant presque par tiers; bord columellaire recouvert d'une large callosité d'où se détachent trois plis transverses, l'antérieur en spirale sur une columelle saillante, le médian beaucoup plus fort, assez écarté du premier, le troisième moins fort un peu en arrière.

*Remarques.* — Cette espèce est bien caractérisée, quoique la coquille soit incomplète; en effet, le dernier tour semble avoir été enlevé, mais il est probable qu'il n'a jamais été complet lui-même, en ce sens que l'animal a dû mourir avant d'avoir formé son dernier bourrelet. Les varices périodiques se montrent moins bien que sur le *P. distensus* (p. 96), mais la forme générale déprimée n'est pas moins évidente et la détermination générique ne peut guère être contestée. Les deux espèces sont, du reste, assez voisines, mais on les distinguera parfaitement l'une de l'autre par la forme et les particularités de l'ouverture.

Fig. 3a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.

— 3b, vue par-dessus, grossie quatre fois.

— 3c, grandeur naturelle.

## PYTHIA PISARIA, nov. sp.

Pl. XXVI, fig. 4a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0045	—	100
Largeur — . . . . .	0,0035	—	78
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,003	—	67
Angle apical . . . . .			100°

Coquille petite, globuleuse, très fragile, à spire courte, composée de quatre ou cinq tours très étroits, recouverts de stries de croissance obliques très fines, s'enroulant sous un angle très ouvert, un peu arrondis et portant une légère dépression longitudinale à la partie postérieure produisant une bandelette mince le long de la suture; le dernier tour très développé, renflé et montrant une carène postérieure obtuse sur laquelle se fait le retour de la spire; ouverture ovale, allongée, très oblique, atténuée et aiguë en arrière, arrondie en avant; bord droit arqué, tranchant mais épaissi intérieurement surtout à la partie antérieure, et portant trois dents sur la moitié postérieure, la plus forte en avant, les deux autres progressivement plus petites; bord columellaire recouvert d'une large callosité, muni de trois plis; l'antérieur, qui est comme le retour en spirale du bord, est saillant, oblique, tordu; le second mince, également saillant, transverse, situé vers le milieu; le troisième un peu en arrière beaucoup plus petit.

*Remarques.* — Il n'y a que de faibles différences entre cette espèce et le *P. globosa* (p. 97). Elles consistent dans la disposition des dents du bord droit plus nombreuses chez cette dernière, dans la petitesse de son dernier pli columellaire et dans sa forme générale un peu plus trapue. Elle est également assez rare.

FIG. 4a, vue du côté de l'ouverture, grossie cinq fois.

— 4b, vue par-dessus, grossie cinq fois.

— 4c, grandeur naturelle.

Genre ALEXIA, Lamk., 1847.

*Car. gén.* — Coquille ovale, oblongue, à spire aiguë; ouverture allongée, ovale; bord columellaire portant de trois à cinq plis, les plus petits en arrière; bord droit réfléchi, épaissi ou denté intérieurement.

*Remarques.* — Nous croyons devoir adopter cette coupe générique pour deux espèces du calcaire grossier de Mons dont l'aspect extérieur est à peu près le même, mais qui se distinguent facilement par les particularités de l'ouverture.

## ALEXIA ELONGATA, nov. sp.

Pl. XXV, fig. 7a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,017	—	100
Largeur — . . . . .	0,007	—	41
Hauteur du dernier tour. . . . .	0,0075	—	44
Angle au sommet . . . . .			45°
— aux derniers tours . . . . .			20°

Coquille ovale, allongée, composée de sept ou huit tours presque plats, ornés de stries de croissance obliques et irrégulières, s'enroulant sous un angle un peu convexe près du sommet mais devenant régulier en même temps que plus aigu aux derniers tours, séparés par des sutures linéaires, irrégulières, presque superficielles mais bien marquées par une légère bandelette provenant d'une petite dépression longitudinale à la partie postérieure des tours, le dernier tour bien développé, renflé vers le milieu à l'endroit où se fait le retour de la spire; base conique avec un ombilic profond, étroit, semi-lunaire, très bien limité par une carène assez aiguë partant de la partie antérieure de l'ouverture et se perdant sous la callosité du bord columellaire; ouverture allongée, losangiforme, oblique, aiguë en arrière, sinueuse en avant; bord columellaire arqué portant quatre plis, l'antérieur peu saillant, le second vers le milieu beaucoup plus fort, aigu, dirigé obliquement, le troisième moins fort quoique plus fort que le premier, le postérieur le plus petit de tous; bord gauche renversé en arrière à la partie antérieure, anguleux au renflement extérieur du tour, mince et tranchant mais s'épaississant à l'intérieur en un bourrelet large et bien marqué portant deux dents saillantes vers le milieu.

*Remarques.* — Cette espèce est surtout caractérisée par sa spire allongée; très peu d'Auriculidées peuvent, sous ce rapport, lui être comparées. Elle a quelques points de contact avec notre *Auricula perforata* (p. 92), par ses caractères extérieurs; mais elle s'en sépare complètement par les particularités de l'ouverture constituant ses caractères génériques.

FIG. 7a, vue du côté de l'ouverture, grandeur double.

— 7b, vue par-dessus, grandeur double.

— 7c, grandeur naturelle.

**ALEXIA FUSIFORMIS, nov. sp.**

Pl. XXV, fig. 8a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0115	—	100
Largeur — . . . . .	0,0045	—	30
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0045	—	30
Angle apical. . . . .			30°

Coquille allongée, fusiforme, à tours nombreux presque plats, s'enroulant régulièrement en une spire conique, séparés par des sutures peu profondes, irrégulières, le dernier assez développé, renflé vers le milieu où se fait le retour de la spire, ornés de stries et de côtes transverses obliques affectant une certaine régularité; base conique, saillante; ouverture allongée, étroite, oblique, aiguë en avant et en arrière; bord columellaire orné de quatre plis bien visibles, le premier assez saillant, mince, dessinant une espèce de canal antérieur et en avant duquel un pli secondaire beaucoup plus petit peut se voir en regardant obliquement dans ce canal, le second plus fort que tous les autres est dirigé en avant, aplati et comme renflé à sa partie la plus saillante, séparé du premier par un vide très profond dans le fond duquel se montre une dent obtuse que l'on voit très bien en inclinant la coquille, les deux derniers également dirigés en avant et en décroissance régulière; bord droit peu courbé dans sa partie moyenne, sinueux avant d'arriver à la suture, mince mais renflé à l'intérieur en un large bourrelet portant trois protubérances dentiformes correspondant aux intervalles des plis columellaires, les postérieures plus saillantes.

*Remarques.* — Les premiers tours font malheureusement défaut aux deux spécimens que nous possédons de cette curieuse espèce, ce qui nous empêche d'en donner les dimensions avec certitude. Elle est très voisine du *A. elongata* (p. 99), mais elle a l'ouverture plus étroite, la base plus saillante, les plis columellaires plus saillants, etc.; la particularité du second pli aplati et renflé la rapproche des espèces suivantes que nous avons cru devoir ranger dans le genre *Plecotrema* que caractérise souvent un pli élargi et bifide.

FIG. 8a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.

— 8b, vue par-dessus, grossie trois fois.

— 8c, grandeur naturelle.

## Genre PLECOTREMA.

*Car. gén.* — Coquille petite, ovale, à spire conique, aiguë; ouverture oblongue, contractée; bord columellaire muni de plusieurs plis dont un est bifide; péristome épais, souvent variqueux, portant deux ou trois tubercules dentiformes.

*Remarques.* — Ce genre se lie intimement à quelques genres voisins. Les quatre espèces du calcaire grossier de Mons que nous décrivons se distinguent des *Alexia*, par l'ouverture plus contractée et plus de saillie en avant. Elles n'ont pas toutes un des plis columellaires bifide; mais, à l'exemple de M. Tournouër, nous n'attachons pas une importance trop considérable à ce caractère difficile parfois à reconnaître et qui nous forcerait à séparer des espèces qui, par leur forme générale, montrent un degré de parenté incontestable.

## PLECOTREMA MINUTA, nov. sp.

Pl. XXVI, fig. 5a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0045 — 100
Largeur — . . . . .	0,0025 — 71
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,002 — 57
Angle apical . . . . .	55° à 65°

Très petite coquille globuleuse, ovo-conique, composée de six tours assez étroits, s'enroulant en une spire légèrement convexe, séparés par des sutures linéaires un peu irrégulières, légèrement arrondis et ne montrant que des stries de croissance obliques et une légère dépression longitudinale à la partie postérieure produisant un mince cordonnet sutural; dernier tour très développé, renflé à la circonférence de la base où se fait le retour de la spire, sensiblement conique à la partie antérieure; ouverture assez grande, allongée, oblique, aiguë à la partie postérieure, un peu arrondie en avant; bord droit largement arrondi; bord gauche fortement infléchi à la base de la columelle, portant deux plis saillants, le postérieur à la base de la columelle, l'antérieur vers le milieu de celle-ci.

*Remarques.* — Nous possédons d'assez nombreux spécimens de cette espèce, tous à peu près de la même taille et auxquels manque toujours le

bord droit qui, à l'état complet, devait être épaissi en bourrelet et même dentelé comme le prouve un bourrelet antérieur que l'on aperçoit fort avant dans l'ouverture. En regard de ce bourrelet on remarque au bord gauche deux plis postérieurs très petits que l'on ne pourrait jamais apercevoir si la coquille était entière. Ces particularités de l'intérieur de la coquille indiquent une périodicité d'accroissement plus courte qu'un demi-tour ce qui, du reste, n'apparaît pas au dehors. C'est la plus petite des Auriculidées du calcaire grossier de Mons.

Nous ne pouvons lui comparer aucune espèce du bassin de Paris; la coquille qui s'en approche le plus provient des Faluns; c'est le *P. marginalis*, Grateloup (*Auricula*, 1838, *Plecotrema*, Tournouër, 1870), dont les proportions et les ornements sont les mêmes, mais dont les plis columellaires sont assez différents et appartiennent plus franchement au genre *Plecotrema*.

FIG. 5a, vue du côté de l'ouverture, grossie six fois.  
— 5b, vue par-dessus, grossie six fois.  
— 5c, grandeur naturelle.

**PLECOTREMA TURBINIFORMIS, nov. sp.**

Pl. XXVI, fig. 6a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0055	--	100
Largeur — . . . . .	0,0035	—	64
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0025	—	45
Angle apical . . . . .			55° à 60°

Coquille petite, mince et fragile, conique, turbinée, composée d'environ huit tours étroits, lisses, plats, ornés de lignes de croissance obliques, s'enroulant régulièrement en une spire allongée, conique, séparés par des sutures linéaires superficielles mais parfaitement indiquées par une mince bandelette suturale, le dernier obtus, très renflé à la partie supérieure où se fait le retour de la spire; base arrondie, un peu conique; ouverture allongée, assez étroite, très oblique, aiguë à la partie postérieure, arquée; bord droit mince, tranchant, légèrement épaissi à l'intérieur et portant une dent très légère un peu en arrière du milieu; bord columellaire courbe, recouvert d'une légère callosité, portant quatre plis, l'antérieur, qui est comme le retour du bord en spirale, assez saillant et tranchant; le second plus saillant, bifide à la base et transverse, laisse entre lui et le premier une dépression très profonde; le troisième plus petit, anguleux; le quatrième plus petit encore, dentiforme.

*Remarques.* — Cette coquille est à peu près de même taille que la suivante; elle en est également très voisine par sa forme et ses ornements extérieurs, mais la longueur proportionnelle de sa spire et les particularités de l'ouverture en font une espèce bien distincte.

Elle est assez rare dans le calcaire grossier de Mons.

- FIG. 6a, vue du côté de l'ouverture, grossie cinq fois.  
 — 6b, vue par-dessus, grossie cinq fois.  
 — 6c, grandeur naturelle.

*PLECOTREMA OVALIS, nov. sp.*

Pl. XXVI, fig. 7a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,005 — 100
	Largeur — . . . . .	0,003 — 60
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,003 — 60
	Angle apical . . . . .	60° à 65°

Coquille petite, mince et fragile, conique, ovale, composée de sept à huit tours s'enroulant sous un angle légèrement convexe en une spire pointue, assez étroite, presque plats, ornées de stries d'accroissement et de légères costulations obliques, séparées par des sutures linéaires bien marquées par une mince bandelette suturale provenant d'une légère dépression longitudinale à la partie postérieure des tours; dernier tour très développé, renflé, saillant à la partie antérieure; ouverture allongée, étroite, oblique; bord columellaire orné de quatre plis: l'antérieur très oblique, en spirale autour de la columelle, le second transverse, mince, fort saillant et un peu épaissi à l'intérieur, les deux postérieurs plus petits, assez rapprochés; bord droit tranchant, s'épaississant très fort en un bourrelet intérieur portant trois dents correspondant aux vides laissés entre les plis du bord columellaire, les plus grosses en regard des plus grands vides.

*Remarques.* — Cette espèce n'appartient pas aussi franchement au genre *Plecotrema* que le *P. turbiniformis* (p. 102), dont elle se distingue par sa forme plus élancée du côté antérieur et les particularités de l'ouverture. Elle paraît aussi très voisine du *P. minuta* (p. 101), dont les plis sont cependant beaucoup moins développés.

Cette coquille est assez rare dans le calcaire grossier de Mons.

- FIG. 7a, vue du côté de l'ouverture, grossie cinq fois.  
 — 7b, vue par-dessus, grossie cinq fois.  
 — 7c, grandeur naturelle.



PLECOTREMA CONICA, *nov. sp.*

Pl. XXVI, fig. 8a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,010	—	100
Largeur — . . . . .	0,0035	—	55
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0045	—	45
Angle apical. . . . .			50°

Coquille assez petite, conique, mince et fragile, à peu près deux fois aussi longue que large, composée de sept ou huit tours presque plats, ornés de stries de croissance et de costulations obliques, s'enroulant régulièrement en une spire pointue, séparés par des sutures peu profondes, linéaires, quelque peu irrégulières, une légère dépression longitudinale produisant une bandelette suturale à la partie postérieure des tours; le dernier tour assez développé montre une carène obtuse à la circonférence de la base où se fait le retour de la spire; base conique; ouverture oblique, étroite, aiguë aux deux extrémités; bord columellaire revêtu d'une mince callosité d'où se détachent trois plis, le premier assez saillant et comme la continuation en retour du bord antérieur, le second plus saillant se relevant dans l'ouverture, le troisième beaucoup plus gros et obtus, tous ces plis séparés par de profonds sillons; bord droit sinueux à la carène, presque droit jusqu'à l'extrémité antérieure, tranchant mais rapidement épaissi à l'intérieur et portant deux dents peu saillantes à la partie postérieure.

*Remarques.* — Cette espèce est plus aiguë que le *P. ovalis* (p. 103), lequel est plus globuleux, a la base moins conique et les particularités de l'ouverture toutes différentes. Elle est presque aussi abondante que le *P. minuta* (p. 101) dans le calcaire grossier de Mons.

FIG. 8a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.  
— 8b, vue par-dessus, grossie trois fois.  
— 8c, grandeur naturelle.

Genre **BLAUNERIA**, Schu'tleworth.

*Car. gén.* — Coquille oblongue, turrulée, mince; ouverture étroite, allongée; bord columellaire portant au milieu un pli saillant, presque transverse; columelle sub-tronquée simulant un pli antérieur beaucoup plus petit; péristome non denté, tranchant, mince ou légèrement épaissi intérieurement.

*Remarques.* — Ce genre fut créé pour des espèces terrestres vivantes des Indes et des îles Sandwich, et rapproché, par son auteur, des oléacines; ces espèces sont sénestres. Plus tard, Deshayes reconnut, parmi les fossiles du bassin de Paris, quelques espèces de formes analogues, mais dextres, qu'il crut devoir rapprocher des *Auriculidées* et pour lesquelles il créa le genre *Stolidoma*, qui fut admis par M. Tournouër (*Auriculidées fossiles des Faluns*, 1872) et par la plupart des conchyliologistes (MM. Adams et Woodward). Mais il a été reconnu depuis que les *Blauneria* vivantes, qui n'avaient pu être suffisamment étudiées par M. Schuttleworth pour l'établissement de son genre, appartenaient également, par leurs caractères anatomiques, à la famille des *Auriculidées*. Le genre de Deshayes devient donc un double emploi qui doit disparaître, le mode d'enroulement ayant peu d'importance.

Deshayes, dans la diagnose de son nouveau genre, n'indique, au bord columellaire, qu'un grand pli médian; mais, dans ses descriptions spécifiques, il signale un autre pli plus petit qui simule une troncature de la columelle. Ce pli ne se voit pas sur ses figures, mais bien sur les échantillons-types (Tournouër). Toutes ces considérations font, selon nous, disparaître les motifs du *G. stolidoma*.

Le genre *Blauneria* serait donc un genre fossile, et son apparition daterait des premiers temps de l'âge tertiaire.

Le calcaire grossier de Mons nous en a fourni trois espèces.

**BLAUNERIA ACUTA, nov. sp.**

Pl. XXV, fig. 9a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0085 — 100
Largeur — . . . . .	0,0035 — 38
Hauteur du dernier tour. . . . .	0,004 — 47
Angle apical . . . . .	25° à 45°

Petite coquille allongée, composée de cinq tours assez larges, peu arrondis, s'enroulant en une spire pointue légèrement convexe, le dernier très développé, séparés par des sutures bien marquées et quelque peu irrégulières, ornés de fines stries d'accroissement obliques disposées irrégulièrement et, à la partie postérieure, d'un sillon bien accusé assez

écarté de la suture; ouverture ovale, assez grande, aiguë en arrière, évasée en avant, le labre aigu mais épaissi en un large bourrelet intérieur peu saillant; un second bourrelet s'aperçoit un peu en arrière et indique une période d'accroissement assez courte; deux plis au bord columellaire, l'antérieur assez petit, presque droit, le second à la base de la columelle, beaucoup plus saillant, mince, presque transverse; une légère callosité recouvre tout le bord columellaire jusqu'à l'angle postérieur de l'ouverture.

*Remarques.* — Le *Blauneria crassidens*, Desh. (*Stolidoma*, 1863, II, p. 766, pl. XLVIII, fig. 1-3), des sables inférieurs est très voisine de cette espèce; mais il est beaucoup plus allongé proportionnellement, et le pli antérieur est moins accusé.

Notre espèce est assez rare dans le calcaire grossier de Mons.

FIG. 9a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.  
— 9b, vue par-dessus, grossie quatre fois.  
— 9c, grandeur naturelle.

**BLAUNERIA OVATA, nov. sp.**

Pl. XXV, fig. 10a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,007	—	100
Largeur — . . . . .	0,003	—	45
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0035	—	50
Angle apical . . . . .			50° à 45°

Coquille petite, allongée, composée de cinq tours peu arrondis, s'enroulant en une spire aiguë sous un angle légèrement convexe, séparés par des sutures linéaires irrégulières et bien marquées, ornés de très fines stries d'accroissement irrégulières, obliques et, à la partie postérieure, d'un léger sillon plus ou moins écarté de la suture; dernier tour très développé; ouverture ovale, très grande, évasée en avant, aiguë en arrière; labre mince et tranchant, mais s'épaississant en un bourrelet large et peu saillant; bord columellaire portant deux plis, l'antérieur assez petit, presque droit, le second à la base de la columelle, beaucoup plus saillant, mince, presque transverse; une légère callosité recouvre presque tout le bord columellaire.

*Remarques.* — Cette coquille est plus abondante dans le calcaire grossier de Mons que le *B. acuta* (p. 105) et a avec lui la plus grande ressemblance; mais elle est constamment beaucoup plus courte relativement à la largeur et

aucun intermédiaire ne vient relier les deux formes. Elle s'écarte d'autant plus de l'espèce des sables inférieurs (*Stolidoma crassidens*, Desh.).

Fig. 10a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.  
 — 10b, vue par-dessus, grossie quatre fois.  
 — 10c, grandeur naturelle.

**BLAUNERIA CYLINDRATA, nov. sp.**

Pl. XXV, fig. 11a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,014	— 100
	Largeur — . . . . .	0,004	— 29
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,005	— 56
	Angle apical, près du sommet . . . . .		45°
	— aux trois derniers tours . . . . .		11°

Coquille mince, allongée, subcylindrique, composée de six tours très larges, presque plats, ornés de stries de croissance obliques et irrégulières, s'enroulant d'abord sous un angle assez ouvert mais qui se referme ensuite considérablement, de sorte que l'angle apical est très convexe près du sommet, séparés par des sutures linéaires bien distinctes au milieu d'une large mais peu profonde dépression; dernier tour très développé; base conique et comme tronquée; ouverture ovale, allongée, aiguë en arrière, dilatée en avant; le bord droit largement arqué, aigu, mais s'épaississant en un bourrelet intérieur; bord columellaire portant deux plis, l'antérieur très petit, presque droit, le postérieur beaucoup plus fort et plus saillant, presque transverse.

*Remarques.* — Cette espèce s'écarte un peu du type des deux espèces précédentes : *B. acuta* et *B. ovata* (pp. 105 et 106). Elle est plus cylindrique et, par conséquent, moins ventrue. Par son facies elle se rapproche plus du *Stolidoma praelonga*, Desh. (1863, II, p. 767, pl. XVI, fig. 8-9) et *Singularis*, Desh. (*id.*, fig. 10-11). Mais ces dernières sont lisses et entièrement dépourvues d'ornements, ce qui, entre autres caractères, suffit pour les distinguer.

Cette espèce n'est pas très rare dans le calcaire grossier de Mons.

Fig. 11a, vue du côté de l'ouverture, grossie deux fois.  
 — 11b, vue par-dessus, grossie deux fois.  
 — 11c, grandeur naturelle.

## Genre MELAMPUS.

*Car. gén.* — Coquille ovale, à spire généralement courte, le dernier tour très développé; ouverture longue, étroite; bord columellaire portant plusieurs plis transverses, les plus forts à la columelle; bord droit simple ou épaissi et fréquemment garni de petites côtes ou plis transverses à l'intérieur.

*Remarques.* — Le genre *Melampus* est caractérisé principalement par le faciès général des coquilles qui s'atténuent insensiblement en avant. Les plissements du bord droit ont aussi une certaine importance, mais, à l'exemple de M. Tournouër et d'autres auteurs, nous ne pouvons lui attribuer un caractère générique.

## MELAMPUS OLIVIFORMIS, nov. sp.

Pl. XXV, fig. 12a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,019	—	100
	Largeur — . . . . .	0,0095	—	50
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0135	—	71
	Angle apical . . . . .			90°

Coquille assez grande, presque régulièrement ovale, deux fois aussi longue que large, composée de cinq à six tours s'enroulant sous un angle très convexe en une spire très courte, peu arrondis, réunis par des sutures irrégulières, ondulées, subcanaliculées, la partie postérieure du tour n'étant qu'imparfaitement soudée au tour précédent, ornés de stries ou plis d'accroissement très bien marqués au dernier tour, peu obliques vers le milieu du tour, mais s'infléchissant en arrière pour rejoindre la suture; dernier tour très développé; ouverture allongée, étroite, très aiguë à la partie postérieure, un peu élargie et arrondie en avant; bord droit peu arqué, mince, mais s'épaississant rapidement et laissant voir plusieurs bourrelets intérieurs successifs, contigus, assez larges et bien marqués; bord columellaire portant une assez large callosité d'où se détachent deux gros plis, l'antérieur un peu oblique en arrière, très large à la base, le postérieur plus mince et presque aussi saillant, se relevant vers la partie antérieure de la coquille; un troisième pli très petit ne paraît pas à l'extérieur mais se voit très bien quand on regarde obliquement par la partie antérieure de l'ouverture.

*Remarques.* — Les bourrelets successifs intérieurs se terminent en arrière

par de légères protubérances tenant lieu des plis des *Melampus*, qui, comme on sait, n'existent pas chez toutes les espèces; notre coquille peut cependant être considérée comme une forme de passage entre ce dernier genre et les véritables *Auricules*.

Cette espèce est très rare; nous n'en possédons qu'un seul spécimen. Elle se rapproche, par sa forme ovale, du *M. Tridentatus*, F.-E. Edwards, de High cliff, Hampshire (*Eocene Mollusca*, 1852, p. 113, pl. X, fig. 4a-4b); mais, outre ses trois plis à la columelle, celle-ci est beaucoup moins allongée. Pour les autres comparaisons, voyez l'espèce suivante.

FIG. 12a, vue du côté de l'ouverture, grossie une fois et demie.  
— 12b, vue par-dessus, grossie une fois et demie.  
— 12c, grandeur naturelle.

**MELAMPUS COCHLEATUS, nov. sp.**

Pl. XXV, fig. 13a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,0105	— 100
	Largeur — . . . . .	0,005	— 48
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0025	— 24
	Angle apical . . . . .		70° à 72°

Coquille assez grande, un peu plus de deux fois aussi longue que large, ovale, atténuée et conoïde en avant, composée de six tours presque plats, s'enroulant en une spire aiguë, mais s'évasant de manière à en rendre l'angle concave, séparés par des sutures plus profondes aux premiers tours qu'au dernier, celui-ci allongé, dilaté vers la partie postérieure, lisses et sans autre ornement que de très fines stries de croissance; ouverture étroite, oblique, arrondie antérieurement, aiguë en arrière; bord columellaire portant deux plis également saillants, l'antérieur assez fort, le postérieur plus mince se projetant en avant; bord droit mince et tranchant, mais s'épaississant insensiblement sans former de bourrelet intérieur bien défini.

*Remarques.* — En regardant obliquement, comme à l'espèce précédente, par la partie antérieure de l'ouverture, on aperçoit un petit pli antérieur. Les deux espèces sont, du reste, très voisines, et nous étions fort portés à en faire deux variétés du même type: en effet, les formes de l'ouverture et

des plis columellaires sont les mêmes, mais le bord droit ne montre pas d'une façon aussi marquée les renflements antérieurs formant des bourrelets successifs; d'autres différences plus sensibles consistent dans le facies général de la coquille, plus conique et à spire aiguë et concave au lieu d'être obtuse. Enfin les stries de croissance rejoignent normalement la suture au lieu de se recourber en arrière.

Comme pour le *M. olivæformis* (p. 108), aucune espèce du bassin de Paris n'a la spire aussi courte. Pour leur trouver, à l'un et à l'autre, des points de comparaison, il nous faut remonter jusque dans les faluns : nous citerons entre autres le *M. pilula*, Tournouër (*Auriculidées fossiles des faluns, Journal de conchyliologie*, 1872, p. 77, pl. III, fig. 6) qui n'offre que comme une très rare exception de petits plis transverses à l'intérieur du bord droit.

Cette espèce est plus abondante que la précédente.

FIG. 15a, vue du côté de l'ouverture, grossie une fois et demie.  
 — 15b, vue par-dessus, grossie une fois et demie.  
 — 15c, grandeur naturelle.

Genre **CARYCHIUM**, Muller, 1774.

*Car. gén.* — Coquille très petite, pupiforme, hyaline, à tours peu nombreux; ouverture sub-ovale; columelle ornée d'un à trois plis dentiformes inégaux; bord droit muni d'une dent médiane.

*Remarques.* — Ce genre est bien caractérisé. Les *Carychium*, dit Deshayes, sont au nombre des plus petites coquilles qui habitent la surface de la terre. Il est probable que, par cela même, bien des espèces ont échappé à l'œil de l'observateur.

Ce genre a commencé à se montrer à l'époque jurassique. Nous n'en avons rencontré qu'une seule espèce dans le calcaire grossier de Mons.

## CARYCHIUM MUNIERI, nov. sp.

Pl. XXVI, fig. 1a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,002 — 100
Largeur — . . . . .	0,001 — 50

Très petite coquille ovoïde, deux fois aussi longue que large, composée de cinq tours arrondis, lisses et brillants, s'enroulant en une spire convexe très obtuse au sommet mais devenant ensuite subcylindrique, d'abord assez étroits mais acquérant de plus en plus de largeur jusqu'au dernier qui est très développé, séparés par des sutures bien marquées; ouverture ovale, oblique, aiguë en arrière, arrondie en avant; bord droit muni d'un bourrelet arrondi, saillant à l'intérieur comme à l'extérieur et ayant un renflement au milieu; deux dents au bord columellaire, l'antérieure assez petite, la postérieure au milieu très saillante et se relevant en avant en regard du renflement du bord droit.

*Remarques.* — Deshayes a figuré quatre espèces éocènes du bassin de Paris, provenant toutes des terrains lacustres du Soissonnais. Celle qui se rapproche le plus de l'espèce de Mons est le *C. Michelini* (*Auricula*, Boissy, 1848; Desh., 1863, II, p. 783, pl. XLIX, fig. 4-6), assez commune dans les marnes calcaires de Rilly, qui s'en distingue par la spire plus pointue et une dent bien caractérisée au bord droit au lieu d'un simple renflement.

Nous dédions cette espèce à M. Meunier-Chalmas, le savant préparateur de la Sorbonne, qui nous a aidé avec tant d'intelligence et de sûreté de coup d'œil dans les comparaisons que nous avons dû faire avec les espèces du bassin de Paris.

FIG. 1a, vue du côté de l'ouverture, grossie onze fois.

— 1b, vue par-dessus, grossie onze fois.

— 1c, grandeur naturelle.

Genre CYCLOSTOMA, Draparnaud, 1801.

*Car. gén.* — Coquille turbinée, ovale, turriculée ou déprimée; ouverture ronde ou ovulaire; péristome simple, rarement discontinu, quelquefois évasé; opercule corné ou calcaire.



*Remarques.* — Ces Mollusques sont entièrement terrestres et ont une poche pulmonaire. Cependant les naturalistes les excluent de l'ordre des pulmonés véritables qui, à l'exception du genre *Amphibola*, ne sont jamais operculés et ont les deux sexes réunis sur chaque individu, pour les placer dans les *Pectinibranches*. Nous continuerons cependant à suivre la classification de Woodward qui les place à la suite des *Auriculidées*.

Ce genre est apparu à l'époque crétacée, mais il est surtout très abondant dans les terrains tertiaires. « Il est presque impossible, dit M. Fischer (p. 747), de classer les formes fossiles faute de l'opercule. On doit donc considérer comme très hypothétiques les identifications génériques proposées par les auteurs et notamment par Sandberger. » Ceci pourrait s'appliquer aux deux espèces que nous donnons du calcaire grossier de Mons, dont les opercules nous sont inconnus, mais dont, cependant, les coquilles réunissent suffisamment, d'après nous, les autres caractères du genre.

CYCLOSTOMA PARVISULCATA, nov. sp.

Pl. XXV, fig. 14a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,006 — 100
	Largeur — . . . . .	0,004 — 67
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,005 — 50
	Angle apical . . . . .	50° à 55°

Coquille assez petite, conique, très large à la base, composée de cinq à six tours s'enroulant régulièrement sous un angle assez ouvert, séparés par des sutures profondes, arrondis mais légèrement aplatis à la partie extérieure, les deux premiers entièrement lisses, les autres ornés de sillons longitudinaux assez irréguliers dont six ou sept restent à découvert à l'extérieur des tours, les plus serrés longeant la suture postérieure; base un peu carénée à la circonférence, également ornée de sillons longitudinaux plus ou moins forts, assez serrés depuis le retour de la spire jusqu'à la carène d'un ombilic profond qui en occupe le centre; ouverture assez grande, arrondie, le bord droit très mince, légèrement anguleux à la carène de la base, le bord gauche décrivant une courbe régulière.

*Remarques.* — Cette coquille est très fragile; aussi les spécimens que nous possédons sont-ils tous incomplets du côté de l'ouverture. Cependant nous conservons peu de doutes quant à la détermination générique. Par sa forme

générale elle rappelle le *C. parvulum* (Desh., 1863, II, p. 884, pl. LVII, fig. 31-33), mais par cela seulement, car notre coquille est beaucoup plus grande et l'espèce de Deshayes est entièrement lisse.

FIG. 14a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.  
— 14b, vue par-dessus, grossie quatre fois.  
— 14c, grandeur naturelle.

## CYCLOSTOMA MATHILDIFORMIS, nov. sp.

Pl. XXV, fig. 15a, b, c, d.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,015	—	100
	Largeur — . . . . .	0,007	—	54
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,005	—	58
	Angle apical. . . . .			40°

Coquille conique, à tours nombreux, arrondis, séparés par des sutures profondes, ornés de côtes longitudinales dont sept restent à découvert par le retour de la spire, et entre lesquelles on remarque des filets beaucoup plus petits, séparés par des intervalles assez larges à la suture postérieure mais diminuant progressivement en avançant vers la partie antérieure; ces côtes sont recoupées par d'autres côtes transverses à peu près d'égale grosseur, mais plus serrées, assez irrégulières, au nombre de cinquante à soixante pour une révolution de la spire, granuleuses à la traversée des ornements longitudinaux; base ronde, ombilicquée; ouverture arrondie; columelle creuse.

*Remarques.* — La description de cette coquille laisse à désirer et les dimensions données plus haut sont plus ou moins douteuses. Nous n'en avons recueilli qu'un spécimen incomplet, dont les ornements, il est vrai, sont parfaitement conservés, mais qui nous laissent un peu d'incertitude quant à sa détermination générique. Elle est remarquable par ses côtes transverses très nombreuses, dessinant avec les côtes longitudinales un treillis d'une grande régularité qui rappelle les ornements de certains *Scalaria* ou même ceux des *Mathildia*.

Nous ne trouvons dans Deshayes aucune espèce qui puisse lui être comparée.

FIG. 15a, vue du côté de l'ouverture, grossie deux fois.  
— 15b, vue par-dessus, grossie quatre fois.  
— 15d, ornements fortement grossis.  
— 15c, grandeur naturelle.

## ORDRE III. — OPISTHOBANCHES.

Genre **ACTEON**, Monf., 1810.

SYNONYMIE : **Tornatella**, Lamk., 1812.

*Car. gén.* — Coquille ovale, à spire conique, saillante, aiguë; tours arrondis, marqués généralement de sillons longitudinaux ponctués; ouverture allongée, arrondie et élargie en avant, aiguë en arrière; labre simple et tranchant; bord columellaire portant un ou plusieurs plis.

*Remarques.* — Le plus grand nombre des genres de la famille des *Tornatellidés* ne nous sont connus qu'à l'état fossile et paraissent avoir caractérisé principalement la période crétacée. Le genre *Acteon* est un de ceux qui nous ont été conservés. Les espèces actuelles vivent dans les mers de toutes les régions à d'assez grandes profondeurs.

Les espèces fossiles ont commencé à se montrer dès le trias. Elles sont devenues très nombreuses à l'époque tertiaire. Le calcaire grossier de Mons nous en a fourni trois espèces, dont une anciennement connue dans le bassin de Paris.

**ACTEON PARISIENSIS**, Milleville, *sp.*

Pl. XXVI, fig. 10a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,008
Largeur — . . . . .	0,0045
Hauteur du dernier tour. . . . .	0,004
Angle apical . . . . .	50°

SYNONYMIE : **Tornatella biplicata**, Melleville, 1843, *Sables tert. inf.*, p. 32, pl. IV, fig. 20-22.

**Acteon biplicatus**, d'Orb., 1850, *Prod.*, II, p. 304, n° 78.

**Tornatella Parisiensis**, Desh., 1862, II, p. 603, pl. XXXVII, fig. 26-28.

— — Watelet, 1870, *Cat. des moll. des sables inf.*, p. 9.

— — G. Vincent, 1876, *Faune de l'ét. land. inf.*, p. 139, pl. X, fig. 6 a, b.

— — Moulon, 1880, *Géol. de la Belg., listes des foss.*, p. 148.

Coquille assez petite, ovale, composée de six tours s'enroulant régulièrement en une spire pointue, séparés par des sutures profondes sub-caniculées, un peu arrondis, le

dernier très développé, ornés de sillons longitudinaux séparés par des parties presque planes, quelquefois d'un espacement assez régulier, mais le plus souvent assez serrés à la partie antérieure et plus loin s'écartant et se rapprochant d'une façon assez capricieuse, traversés par des stries de croissances irrégulières, plus serrées, et y laissant des perforations caractéristiques; ouverture ovale, presque droite, assez large en avant, atténuée en arrière; bord droit mince, arqué; bord antérieur arrondi; bord columellaire revêtu d'une mince callosité, renflé jusqu'à la base de la columelle; celle-ci droite, portant deux plis spiraux, minces, élevés, le postérieur un peu plus fort que l'autre.

*Remarques.* — Il ne nous a pas été possible, par un examen des plus minutieux et des comparaisons avec d'assez nombreux spécimens de l'*A. Parisiensis* que nous possédons de Châlons-sur-Vesles, de séparer l'espèce de Mons de celle du bassin de Paris. On sait qu'elle est propre aux sables inférieurs, depuis les sables de Bracheux jusqu'aux sables de Jonchery. Les dimensions des plus grands individus de Mons dépassent un peu la taille maxima que Melleville assigne à la coquille de Châlons-sur-Vesles, mais les proportions restent les mêmes. Quant aux ornements, aux plis columellaires et au facies en général, nous ne pouvons les différencier.

Cette coquille est très abondante dans le calcaire grossier de Mons. Elle a été signalée en Belgique dans l'étage du tufeau de Lincen par M. G. Vincent (*Mém. de la Société malacologique de Belgique, 1875-1876*) qui lui trouve aussi une taille un peu supérieure à celle des types des auteurs français.

FIG. 10a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.

— 10b, vue par-dessus, grossie quatre fois.

— 10c, grandeur naturelle.

*ACTEON TENUPLICATUS, nov. sp.*

Pl. XXVI, fig. 11a, b, c, d.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,0055	— 100
	Largeur — . . . . .	0,005	— 55
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,003	— 55
	Angle apical . . . . .		42°

Assez petite coquille ovale, allongée, solide, brillante, composée de cinq à six tours légèrement convexes, séparés par des sutures bien marquées, le tour antérieur surplombant un peu, enroulés régulièrement en une spire pointue, ornés de sillons longitudinaux fins, laissant entre eux des espaces plats assez réguliers, ponctués à la traversée de stries

de croissance irrégulières, obliques, dont six restent à découvert à l'extérieur des tours, les plus forts à la partie postérieure et les autres se prolongeant sur toute la base en s'écartant un peu à la partie renflée; ouverture ovale, oblique, arrondie en avant, aiguë en arrière; bord droit largement arqué; bord gauche recouvert d'une légère callosité montrant vers le milieu un pli antérieur oblique très bien accusé, et un peu en arrière un léger relèvement simulant vaguement un second pli.

*Remarques.* — Nous possédons plusieurs individus complets de cette curieuse espèce, mais du jeune âge et ne montrant pas aussi bien toutes les particularités que le spécimen adulte que nous avons dessiné. Celui-ci a le bord droit en partie enlevé. Les ornements longitudinaux ont bien les caractères de ceux des actéons, mais ils demandent à être observés avec une assez forte loupe.

Deshayes décrit plusieurs espèces de *Tornatella* (*Acteon*) des sables inférieurs à un seul pli columellaire et qui ont, par cela même, certains rapports avec notre espèce, sans cependant pouvoir être identifiées avec elle. Le *T. turgidata* (1862, II, p. 594, pl. XXXVII, fig. 14, 16) a la spire beaucoup plus obtuse; le *T. electa* (p. 595, fig. 17-19. *T. elegans*, Mell., 1843) est, au contraire, plus élancé; il en est de même du *T. læta* (p. 600, pl. XXXVII, fig. 23, 25) et du *T. Aizyensis* (p. 597, fig. 29, 31, pl. XXXVIII, fig. 1, 3).

FIG. 11a, vue du côté de l'ouverture, grossie cinq fois.  
— 11b, vue par-dessus, grossie cinq fois.  
— 11c, grandeur naturelle.

ACTEON FORMOSUS, nov. sp.

Pl. XXVI, fig. 12a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0025 — 100
Largeur — . . . . .	0,0015 — 60
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0015 — 60
Angle apical . . . . .	75°

Très petite coquille ovale, globuleuse, brillante, composée de quatre tours arrondis, assez étroits, séparés par des sutures profondes et sub-canaliculées, s'enroulant régulièrement sous un angle très ouvert, ornés de nombreux sillons longitudinaux très fins, plus ou

moins régulièrement espacés, les plus forts et les plus serrés à la partie postérieure des tours et au milieu de la base, séparés par des intervalles presque plats, recoupés de stries de croissance nombreuses et bien marquées, surtout en approchant de l'ouverture; le dernier tour très développé, sub-conique, très renflé au retour de la spire; ouverture semi-lunaire, arrondie en avant, aiguë en arrière; bord droit largement arqué; bord gauche recouvert d'une callosité de laquelle se détache une dent assez obtuse à la base de la columelle.

*Remarques.* — Cette espèce, parfaitement caractérisée, est très rare dans le calcaire grossier de Mons. Le *Tornatella sphaericula*, Desh. (1856, II, p. 60, pl. XXVI, fig. 32-34 et pl. XXXVII, fig. 32, 33), espèce du calcaire grossier de Paris, est beaucoup plus grande; de plus, elle n'a pas à proprement parler de pli columellaire, lequel est remplacé par un renflement du milieu de la columelle, ce qui suffit pour la distinguer.

Fig. 12a, vue du côté de l'ouverture, grossie dix fois.  
 — 12b, vue par-dessus, grossie dix fois.  
 — 12c, grandeur naturelle.

Genre **BULLA**.

*Car. gén.* — Coquille enroulée, ovoïde, lisse et brillante; spire concave et ombiliquée; ouverture occupant toute la longueur de la coquille, arrondie en avant; le bord droit simple et tranchant.

*Remarques.* — Les *Bulles* ont commencé à se montrer dans les terrains crétacés; elles sont très nombreuses dans les terrains tertiaires, et ont acquis leur maximum dans les mers actuelles.

Le calcaire grossier de Mons nous en a procuré une seule espèce.

**BULLA BARISTRIATA**, nov. sp.

Pl. XXVI, fig. 13a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille	. . . . .	0,0045	— 100
Largeur	— . . . . .	0,00225	— 50

Coquille petite, ovoïde, lisse et brillante, deux fois aussi longue que large, atteignant sa plus grande largeur vers le milieu, le côté du labre un peu moins courbé que

l'autre, à spire cachée et rentrant dans la coquille en un ombilic petit et un peu caréné à la circonférence; ouverture fort allongée, recourbée vers l'axe de la coquille au côté postérieur, assez étroite et conservant ses deux bords parallèles sur un peu plus de la moitié de sa longueur, s'élargissant ensuite insensiblement jusqu'à la partie antérieure où elle atteint environ trois fois sa largeur primitive; bord droit arrondi à ses deux extrémités, s'avancant un peu sur l'ouverture à sa partie médiane; bord columellaire portant un pli oblique assez large à sa partie antérieure; surface extérieure ornée de quelques stries longitudinales laissant entre elles de larges espaces plats et se montrant surtout à la partie antérieure de la coquille.

*Remarques.* — Cette espèce est très abondante dans le calcaire grossier de Mons. Elle est assez voisine du *B. semistriata*, Desh. (1824, II, p. 44, pl. V, fig. 27, 28, et 1863, II, p. 642), coquille des sables inférieurs; mais celle-ci est généralement de plus grande taille et montre des stries beaucoup plus nombreuses, aussi bien à la partie postérieure qu'à la partie antérieure de la coquille.

FIG. 15a, vue du côté de l'ouverture, grossie six fois.  
 — 15b, vue par-dessus, grossie six fois.  
 — 15c, grandeur naturelle.

FIN DES GASTÉROPODES.

# TABLE ALPHABÉTIQUE

## DES

### GENRES ET DES ESPÈCES.

GENRES ET ESPÈCES.	Part.	Pag.	Planches.	Fig.	GENRES ET ESPÈCES.	Part.	Pag.	Planches.	Fig.
<b>A</b>					<b>BITHINIA</b> . . . . .	IV	24		
<b>ACTEON</b> . . . . .	IV	114			— <i>carinata, nov. sp.</i> . . . .	id.	25	XX	40
— <i>formosus, nov. sp.</i> . . . .	id.	116	XXVI	12	— <i>longula, nov. sp.</i> . . . .	id.	26	id.	44
— <i>Parisiensis, Mellev, sp.</i> . . . .	id.	114	id.	40	— <i>pupiformis, nov. sp.</i> . . . .	id.	28	id.	43
— <i>tenuiplicatus, nov. sp.</i> . . . .	id.	113	id.	11	— <i>regularis, nov. sp.</i> . . . .	id.	24	id.	9
<b>ADEORRIS</b> . . . . .	id.	62			— <i>vicina, nov. sp.</i> . . . .	id.	27	id.	42
— <i>similis, Desh.</i> . . . .	id.	63	XX	14	<b>BLAUNERIA</b> . . . . .	id.	104		
— <i>simplex, nov. sp.</i> . . . .	id.	64	id.	13	— <i>acuta, nov. sp.</i> . . . .	id.	105	XXV	9
— <i>radiata, nov. sp.</i> . . . .	id.	64	XXIII	4	— <i>cylindrica, nov. sp.</i> . . . .	id.	107	id.	44
<b>ALEXIA</b> . . . . .	id.	98			— <i>ovata, nov. sp.</i> . . . .	id.	106	id.	40
— <i>elongata, nov. sp.</i> . . . .	id.	99	XXV	7	<b>BORSONIA</b> . . . . .	I	60		
— <i>fusiformis, nov. sp.</i> . . . .	id.	100	id.	8	— . . . . .	III	30		
<b>ANCILLARIA</b> . . . . .	I	48			— <i>Bellardii, nov. sp.</i> . . . .	id.	32	XV	3
— <i>buccinoides, Lamk.</i> . . . .	id.	48	IV	4	— <i>Coemansi, nov. sp.</i> . . . .	I	64	V	3
<b>ANGARINA</b> . . . . .	IV	38			— <i>conoidea, nov. sp.</i> . . . .	III	34	XV	6
— <i>spinosa, nov. sp.</i> . . . .	id.	39	XXIII	14	— <i>mitrata, nov. sp.</i> . . . .	id.	34	id.	4
<b>AURICULA</b> . . . . .	id.	89			— <i>Nysti, nov. sp.</i> . . . .	id.	30	id.	3
— <i>conica, nov. sp.</i> . . . .	id.	94	XXV	2	<b>BRIARTIA</b> . . . . .	IV	30		
— <i>grandis, nov. sp.</i> . . . .	id.	90	id.	4	— <i>carinata, nov. sp.</i> . . . .	id.	34	XX	8
— <i>longa, nov. sp.</i> . . . .	id.	94	id.	3	— <i>Velaini, Mun.-Ch.</i> . . . .	id.	30	id.	7
— <i>parva, nov. sp.</i> . . . .	id.	95	id.	6	<b>BUCCINUM</b> . . . . .	I	27		
— <i>perforata, nov. sp.</i> . . . .	id.	92	id.	3	— . . . . .	III	22		
— <i>vicina, nov. sp.</i> . . . .	id.	93	id.	3	— <i>longulum, nov. sp.</i> . . . .	id.	22	XIII	14
<b>B</b>					— <i>Montense, nov. sp.</i> . . . .	I	30	II.	9
<b>BARLEEA</b> . . . . .	IV	43			— <i>stromboïdes, Herman.</i> . . . .	id.	28	id.	40
— <i>simplex, nov. sp.</i> . . . .	id.	43	XIX	14	<b>BULLA</b> . . . . .	IV	117		
<b>BELOPTERA</b> . . . . .	III	4			— <i>raristriata, nov. sp.</i> . . . .	id.	117	XXVI	13
— <i>Houzeani, nov. sp.</i> . . . .	id.	3	XIII	2	<b>C</b>				
— <i>Konincki, nov. sp.</i> . . . .	id.	2	id.	3	<b>CALYPTREA</b> . . . . .	IV	67		
					— <i>Suessoniensis, d'Orb., sp.</i> . . . .	id.	69	XXIV	3
					— <i>trochiformis, Lamk.</i> . . . .	id.	68	id.	2



## TABLE ALPHABÉTIQUE

GENRES ET ESPÈCES.	Part.	Pag.	Planches.	Fig.	GENRES ET ESPÈCES.	Part.	Pag.	Planches.	Fig.
<b>CANCELLARIA</b> . . . . .	I	44			<b>CERITHIUM</b> ( <i>suite</i> ) . . . . .	II	24		
— . . . . .	III	44			— Queteleti, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	53	X	6
— biplicata, <i>nov. sp.</i> . . . .	I	42	I	7	— regularicostatum, <i>nov. sp.</i> .	id.	32	VIII	8
— carinata, <i>nov. sp.</i> . . . .	III	44	XIV.	5	— Ryckholti, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	46	IX	40
— Crepini, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	43	id.	6	— sexlinum, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	33	id.	7
— Duponti, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	42	id.	4	— striatum, Brug. . . . .	id.	54	X	9
— incompta, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	46	id.	7	— subcylindraceum, <i>nov. sp.</i> .	id.	44	VIII	42
— Malaisei, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	45	id.	2	— tenuiculum, <i>nov. sp.</i> . . . .	III	61	XVII	6
— Mourloni, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	42	id.	3	— tenuifilum, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	58	XVI	8
<b>CARYCHIUM</b> . . . . .	IV	140			— tenuiplicatum, <i>nov. sp.</i> . . .	II	58	X	7
— Munieri, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	144	XXVI	4	— id. . . . .	id.	58	id.	42
<b>CERITHIUM</b> . . . . .	II	24			— triangulum, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	37	VIII	7
— . . . . .	III	49			— tritonoides, <i>nov. sp.</i> . . . .	III	59	XVII	7
— abnorme, <i>nov. sp.</i> . . . .	II	59	X	5	— turritulosum, <i>nov. sp.</i> . . .	id.	62	id.	9
— Barroisi, <i>nov. sp.</i> . . . .	III	56	XVII	4	— unisulcatum, Lamk., var. <i>A.</i>	II	54	X	1
— Chapuisi, <i>nov. sp.</i> . . . .	II	60	X	43	— id. var. <i>B.</i> . . . .	id.	54	id.	2
— Chelloneixi, <i>nov. sp.</i> . . . .	III	57	XVII	5	— id. var. <i>C.</i> . . . .	id.	54	id.	3
— Coemansi, <i>nov. sp.</i> . . . .	II	47	IX	6	— id. var. <i>D.</i> . . . .	id.	54	id.	4
— id. . . . .	III	51	XVII	4	— varians, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	34	IX	3
— Dejaeri, <i>nov. sp.</i> . . . .	II	27	VIII	2	— versigranulum, <i>nov. sp.</i> . .	id.	45	id.	9
— id. . . . .	III	50			<b>CHITON</b> . . . . .	IV	78		
— Dumonti, <i>nov. sp.</i> . . . .	II	61	XII	44	— Baylei, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	78	XXIV	44
— Duponti, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	40	VI	15	<b>COEMANSIA</b> . . . . .	II	47		
— Edmondi, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	60	X	10	— conica, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	49	VII	5
— Francisci, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	42	VIII	11	— cylindracea, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	49	id.	6
— funiculosum, <i>nov. sp.</i> . . . .	III	55	XVII	3	<b>CORNETIA</b> . . . . .	IV	32		
— granisuturatum, <i>nov. sp.</i> . .	II	41	VII	13	— Modunensis, Mun.-Ch. . . .	id.	32	XXI	1
— Gosseleti, <i>nov. sp.</i> . . . .	III	56	XVII	8	<b>CYCLOSTOMA</b> . . . . .	id.	141		
— inopinatum, Desh. . . . .	II	25	VIII	1	— Mathildiaëformis, <i>nov. sp.</i> .	id.	143	XXVI	45
— id. . . . .	III	49			— parvisulcata, <i>nov. sp.</i> . . .	id.	142	id.	44
— instabile, <i>nov. sp.</i> . . . .	II	48	IX	8	<b>CYLINDRELLINA</b> . . . . .	id.	83		
— Koeneni, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	28	VIII	3	— Briarti, Mun.-Ch. . . . .	id.	83	id.	9
— Larteti, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	39	id.	9	<b>CYMBA</b> . . . . .	I	68		
— Lehardyi, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	42	IX	5	— inæquiplicata, <i>nov. sp.</i> . . .	id.	68	V	3
— Luciani, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	38	VIII	40					
— Malaisei, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	35	IX	2	<b>D</b>				
— minusculum, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	49	VII	14	<b>DELPHINULA</b> . . . . .	IV	50		
— Montense, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	50	XI	10	— bicarinata, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	52	XXIII	2
— Mourloni, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	43	IX	4	— crenulata, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	53	id.	5
— multiflum, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	29	VIII	4	— funicularis, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	54	id.	6
— nerineale, <i>nov. sp.</i> . . . .	III	53	XVII	2	— globosa, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	56	id.	7
— Ortliebi, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	60	XVI	9	— helicina, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	52	id.	3
— ovalituberosum, <i>nov. sp.</i> . .	II	34	VIII	6	— inornata, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	55	id.	4
— Pauli, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	36	IX	1	— Montensis, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	54	id.	40
— planovaricosum, <i>nov. sp.</i> . .	id.	30	VIII	5	— multilineata, <i>nov. sp.</i> . . .	id.	56	id.	8
— punctifibrum, <i>nov. sp.</i> . . .	id.	57	X	8	— spinosa, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	57	id.	9
— id. . . . .	id.	57	id.	14					

GENRES ET ESPÈCES.	Parl.	Pag.	Planches.	Fig.	GENRES ET ESPÈCES.	Parl.	Pag.	Planches.	Fig.
<b>DENTALIUM</b> . . . . .	IV	79			<b>HYDROBIA</b> . . . . .	IV	46		
— Hannonicum, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	81	XXIV	12	— depressa, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	17	XX	3
— magnum, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	81	id.	6	— elongata, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	46	id.	2
— Montense, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	80	id.	12	— minutissima, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	49	id.	5
<b>E</b>					— nana, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	49	id.	6
<b>EULIMA</b> . . . . .	II	20			— regularis, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	48	id.	4
— dubia, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	23	VII	41	— tenuis, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	47	id.	4
— lata, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	22	id.	40	<b>K</b>				
— levis, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	21	id.	13	<b>KELOSTOMA</b> . . . . .	id.	43		
— vicina, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	22	id.	12	— typica, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	44	XIX	40
<b>F</b>					<b>L</b>				
<b>FIGULA</b> . . . . .	I	15			<b>LACUNA</b> . . . . .	id.	5		
— bicarinata, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	15	I	11	— lineata, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	6	id.	2
<b>FISSURELLA</b> . . . . .	IV	66			<b>LEUCORHYNCHIA</b> . . . . .	id.	61		
— concentrica, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	66	XXIV	1	— nitida, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	61	XXII	44
<b>FUSUS</b> . . . . .	I	16			<b>LYMNEA</b> . . . . .	id.	85		
— . . . . .	III	16			— Hannonica, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	86	XXIII	12
— ecanaliculatus, <i>nov. sp.</i> . . . . .	I	15	I	10	<b>M</b>				
— Edmondi, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	22	II	8	<b>MATHILDIA</b> . . . . .	III	43		
— Heberti, <i>nov. sp.</i> . . . . .	III	20	XIV	8	— bimorpha, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	43	XVI	5
— interlineatus, <i>nov. sp.</i> . . . . .	I	26	I	8	— parva, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	44	id.	6
— Lapparenti, <i>nov. sp.</i> . . . . .	III	18	XIV	10	<b>MELANERPUS</b> . . . . .	IV	108		
— Luciani, <i>nov. sp.</i> . . . . .	I	27	II	3	— cochleatus, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	109	XXV	43
— . . . . . id. . . . .	III	17	XV	4	— oliviformis, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	108	id.	12
— Malaisei, <i>nov. sp.</i> . . . . .	I	49	II	2	<b>MELANIA</b> . . . . .	II	67		
— Montis, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	20	id.	4	— . . . . .	III	63		
— Munieri, <i>nov. sp.</i> . . . . .	III	21	XIV	44	— anomala, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	65	XVIII	7
— Potieri, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	49	id.	9	— Benedeni, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	64	id.	6
— pusillus, <i>nov. sp.</i> . . . . .	I	21	II	5	— bizonata, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	66	id.	5
— strictus, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	25	id.	7	— Elisæ, <i>nov. sp.</i> . . . . .	II	69	VII	4
— subnudus, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	23	id.	6	— exornata, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	68	id.	4
— varians, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	21	I	12	— Florentinæ, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	70	id.	2
— . . . . . id. . . . .	id.	24	id.	13	— Malaisei, <i>nov. sp.</i> . . . . .	III	67	XVIII	8
<b>H</b>					— Morreni, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	67	id.	9
<b>HALLOYSIA</b> . . . . .	III	45			— nuda, <i>nov. sp.</i> . . . . .	II	67	VII	3
— biplicata, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	46	XVI	7	— scalaroides, <i>nov. sp.</i> . . . . .	III	63	XVIII	4
<b>HARPOSNIS</b> . . . . .	id.	23			<b>MELANOPHIS</b> . . . . .	II	70		
— stromboïdes, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	23	II	40	— . . . . .	III	68		
— tritonoides, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	23	XIII	40	— buccinoïdea, Ferrussacæ . . . . .	II	74	VII	7
<b>HELICION</b> . . . . .	IV	75			— . . . . . id. . . . .	id.	74	id.	8
— simplex, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	76	XXIV	8	— . . . . . id. . . . .	id.	74	id.	9
<b>HIPPONIX</b> . . . . .	id.	72			<b>NITIDA</b> . . . . .	I	69		
— imbricataria, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	73	id.	5	— . . . . .	III	36		
					— brevis, <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	39	XV	8

## TABLE ALPHABÉTIQUE

GENRES ET ESPÈCES.	Part.	Paq.	Planches.	Fig.	GENRES ET ESPÈCES.	Part.	Paq.	Planches.	Fig.
<b>MITRA</b> ( <i>suite</i> ) . . . . .	I	69			<b>PILEOPSIS</b> . . . . .	IV	70		
— <i>dentata, nov. sp.</i> . . . .	III	38	XV	10	— <i>inevoluta, nov. sp.</i> . . . .	id.	71	XXIV	4
— <i>Dewalquei, nov. sp.</i> . . . .	I	72	V	11	<b>PIRENA</b> . . . . .	II	73		
— . . . . . <i>id.</i> . . . .	III	37			— <i>gibbosa, nov. sp.</i> . . . .	id.	74	XI	4
— <i>dilatata, nov. sp.</i> . . . .	I	73	id.	12	— <i>incerta, nov. sp.</i> . . . .	id.	75	id.	7
— . . . . . <i>id.</i> . . . .	III	36	XVI	1	<b>PLECOTREMA</b> . . . . .	IV	401		
— <i>Gosseleti, nov. sp.</i> . . . .	I	76	V	7	— <i>conica, nov. sp.</i> . . . .	id.	404	XXVI	8
— <i>Koeneni, nov. sp.</i> . . . .	id.	74	id.	8	— <i>ovalis, nov. sp.</i> . . . .	id.	403	id.	7
— <i>Omali, nov. sp.</i> . . . .	id.	71	id.	10	— <i>minuta, nov. sp.</i> . . . .	id.	401	id.	5
— <i>quinqueplicata, nov. sp.</i> . . . .	III	37	XV	11	— <i>turbiniiformis, nov. sp.</i> . . . .	id.	402	id.	6
— <i>vicina, nov. sp.</i> . . . .	I	70	V	6	<b>PLEUROTOMA</b> . . . . .	I	50		
— <i>Wateleti, nov. sp.</i> . . . .	id.	75	id.	9	— . . . . .	III	27		
<b>MUREX</b> . . . . .	id.	4			— <i>Alphonsi, nov. sp.</i> . . . .	I	59	IV	6
— <i>Hannonicus, nov. sp.</i> . . . .	id.	3	I	1	— <i>ampla, nov. sp.</i> . . . .	id.	51	id.	8
					— . . . . . <i>id.</i> . . . .	III	28	XV	7
<b>N</b>					— <i>Dewalquei, nov. sp.</i> . . . .	id.	29	id.	2
<b>NATICA</b> . . . . .	II	4			— <i>Duponti, nov. sp.</i> . . . .	I	53	IV	9
— <i>infundibulum, Watelet</i> . . . .	id.	4	VI	2	— <i>Hannonica, nov. sp.</i> . . . .	id.	52	id.	7
— . . . . . <i>id.</i> . . . .	id.	4	id.	3	— <i>Malaisei, nov. sp.</i> . . . .	id.	55	id.	5
— <i>Julei, nov. sp.</i> . . . .	id.	7	id.	16	— <i>minutula, nov. sp.</i> . . . .	id.	58	id.	10
— <i>Lavalleci, nov. sp.</i> . . . .	III	40	XVI	2	— <i>Pauli, nov. sp.</i> . . . .	id.	56	id.	4
— <i>Parisiensis, Desh. sp.</i> . . . .	II	2	VI	2	<b>POTAMACUS</b> . . . . .	IV	28		
— <i>Wateleti, Desh. sp.</i> . . . .	id.	6	id.	4	— <i>truncata, nov. sp.</i> . . . .	id.	29	XIX	15
<b>NERITINA</b> . . . . .	IV	34			<b>POTAMIDES</b> . . . . .	II	62		
— <i>fabula, nov. sp.</i> . . . .	id.	35	XXI	3	— <i>inornatus, nov. sp.</i> . . . .	id.	66	VI	13
— <i>Montensis, nov. sp.</i> . . . .	id.	36	id.	4	— <i>Montense, nov. sp.</i> . . . .	id.	63	XI	1
<b>NERITOPSIS</b> . . . . .	id.	33			<b>PSEUDOLIVA</b> . . . . .	I	31		
— <i>multicostata, nov. sp.</i> . . . .	id.	33	XXI	2	— . . . . .	III	25		
					— <i>canaliculata, nov. sp.</i> . . . .	id.	26	XV	8
<b>O</b>					— <i>curvicostata, nov. sp.</i> . . . .	I	34	III	2
<b>OLIVA</b> . . . . .	I	44			— <i>dubia, nov. sp.</i> . . . .	id.	41	id.	8
— <i>acuta, nov. sp.</i> . . . .	id.	45	IV	3	— <i>Elisæ, nov. sp.</i> . . . .	id.	36	id.	5
— <i>mitreola, Lamk.</i> . . . .	id.	46	id.	2	— <i>elongata, nov. sp.</i> . . . .	id.	38	id.	7
					— <i>grossecostata, nov. sp.</i> . . . .	id.	37	id.	3
<b>P</b>					— <i>Ludovicæ, nov. sp.</i> . . . .	id.	35	id.	6
<b>PALUDINA</b> . . . . .	IV	22			— <i>robusta, nov. sp.</i> . . . .	id.	32	id.	1
— <i>Lamberti, nov. sp.</i> . . . .	id.	22	XIX	14	— . . . . . <i>id.</i> . . . .	id.	33	id.	4
<b>PATELLA</b> . . . . .	id.	73			— . . . . . <i>id.</i> . . . .	III	25		
— <i>regularis, nov. sp.</i> . . . .	id.	75	XXIV	9	<b>PYRAMYDELLA</b> . . . . .	II	7		
— <i>Vincenti, nov. sp.</i> . . . .	id.	74	id.	7	— <i>eburnea, Desh.</i> . . . .	id.	8	VI	14
<b>PENTADACTYLUS</b> . . . . .	I	42			<b>PYRULA</b> . . . . .	I	13		
— <i>levis, nov. sp.</i> . . . .	id.	43	III	11	— <i>cymboidea, nov. sp.</i> . . . .	id.	13	I	9
— <i>Nysti, nov. sp.</i> . . . .	id.	44	id.	10	<b>PYTHIA</b> . . . . .	IV	95		
<b>PHYSA</b> . . . . .	IV	87			— <i>distensa, nov. sp.</i> . . . .	id.	96	XXVI	2
— <i>Dumonti, nov. sp.</i> . . . .	id.	88	XXIII	13	— <i>globosa, nov. sp.</i> . . . .	id.	97	id.	3
— <i>Montensis, nov. sp.</i> . . . .	id.	88	id.	15	— <i>pisaria, nov. sp.</i> . . . .	id.	98	id.	4

GENRES ET ESPÈCES.	Part.	Pag.	Planches.	Fig.	GENRES ET ESPÈCES.	Part.	Pag.	Planches.	Fig.
<b>R</b>									
<b>RINGICULA</b> . . . . .	III	47			<b>TROCHUS</b> ( <i>suiv.</i> ) . . . . .	IV			
— simplex, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	48	XVI	1	— carinadentatus, <i>nov. sp.</i> . . .	id.	49	XXI	8
<b>RISSOA</b> . . . . .	IV	6			— dentulifer, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	49	id.	9
— craticula, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	8	XIX	5	— Lefevrei, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	48	id.	7
— incerta, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	9	id.	6	— simplicilineatus, <i>nov. sp.</i> . . .	id.	47	id.	5
— pulchra, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	7	id.	4	<b>TRUNCATELLA</b> . . . . .	id.	20		
— tenuis, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	10	id.	3	— cylindrata, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	20	XIX	12
<b>RISSOINA</b> . . . . .	id.	10			— minor, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	24	id.	13
— labrata, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	12	id.	8	<b>TURBINELLA</b> . . . . .	I	8		
— nuda, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	11	id.	7	— . . . . .	III	9		
— tenuicancellata, <i>nov. sp.</i> . . .	id.	13	id.	9	— fusiopsis, <i>nov. sp.</i> . . . .	I	9	I	5
<b>ROSTELLARIA</b> . . . . .	I	1			— . . . . .	id.	9	II	4
— . . . . .	III	4			— granulosa, <i>nov. sp.</i> . . . .	III	10	XIV	4
— Houzeaui, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	5	XIII	1	— reticulata, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	9	XIII	9
<b>S</b>					— striatula, <i>nov. sp.</i> . . . .	I	10	I	6
<b>SCALARIA</b> . . . . .	II	91			<b>TURBO</b> . . . . .	IV	36		
— . . . . .	III	69			— Bretoni, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	44	XXII	9
— Dumonti, <i>nov. sp.</i> . . . .	II	93	XII	3	— contractus, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	45	id.	10
— formosa, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	92	id.	1	— Delvauxi, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	42	id.	7
— Gosseleti, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	93	id.	2	— Falyanus, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	41	id.	5
— Renardi, <i>nov. sp.</i> . . . .	III	71	XVIII	3	— Firketi, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	40	id.	4
— Tournoueri, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	69	id.	4	— faniculosus, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	43	id.	8
— Wateleti, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	0	id.	2	— Ludrierei, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	39	id.	3
<b>SIPHONARIA</b> . . . . .	IV	76			— Montensis, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	37	id.	1
— dubia, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	77	XXIV	10	— pisarius, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	38	id.	2
<b>SOLARIUM</b> . . . . .	id.	3			— quadrangulatus, <i>nov. sp.</i> . . .	id.	42	id.	6
— Montense, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	4	XIX	1	<b>TURBONELLA</b> . . . . .	II	9		
<b>T</b>					— . . . . .	III	42		
<b>TEINOSTOMA</b> . . . . .	id.	60			— acicula, Lamk., <i>sp.</i> . . . .	II	10	VI	11
— bilabrata, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	60	XXIII	11	— conica, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	16	id.	12
<b>TRITON</b> . . . . .	I	4			— conjungens, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	15	id.	5
— . . . . .	III	6			— Deshayesi, Desb., <i>sp.</i> . . . .	id.	13	id.	8
— curtulum, <i>nov. sp.</i> . . . .	I	7	I	4	— exigua, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	16	id.	9
— . . . . .	III	6	XIII	7	— expansa, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	14	id.	7
— Mariæ, <i>nov. sp.</i> . . . .	I	5	I	2	— hordeola, Lamk., <i>sp.</i> . . . .	id.	12	id.	6
— multicostatum, <i>nov. sp.</i> . . . .	III	8	XIII	5	— parva, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	15	id.	10
— planisulcatum, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	8	id.	6	— sulcata, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	42	id.	3
— simplicicostatum, <i>nov. sp.</i> . . .	I	6	I	3	<b>TURRITELLA</b> . . . . .	id.	76		
— subleve, <i>nov. sp.</i> . . . .	III	7	XIII	4	— . . . . .	III	69		
<b>TROCHUS</b> . . . . .	IV	43			— acuta, <i>nov. sp.</i> . . . .	II	83	XI	3
— basilevigatus, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	46	XXI	6	— Alphonsei, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	84	id.	6
					— Arsenei, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	85	id.	5
					— Coemansi, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	82	id.	9
					— Hannonica, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	83	XII	4
					— Herminæ, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	90	id.	6
					— instabilis, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	86	id.	9
					— Mariæ, <i>nov. sp.</i> . . . .	id.	88	id.	12

GENRES ET ESPÈCES.	Part.	Pag.	Planches.	Fig.	GENRES ET ESPÈCES.	Part.	Pag.	Planches.	Fig.
					V				
<b>TURRITELLA</b> ( <i>suite</i> , . . . . .)	II	76			<b>VOLUTA</b> . . . . .	I	62		
— <i>Marthæ</i> , <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	79	XI	8	— . . . . .	III	33		
— <i>Montensis</i> , <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	80	id.	2	— <i>elevata</i> , Lamk. . . . .	id.	34	XV	9
— . . . . . <i>id.</i> . . . . .	id.	80	id.	41	— <i>graciosa</i> , <i>nov. sp.</i> . . . . .	I	65	V	2
— . . . . . <i>id.</i> . . . . .	id.	80	id.	12	— <i>Mariæ</i> , <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	67	id.	4
— <i>multisulcata</i> , Lamk. . . . .	id.	77	XII	8	— <i>spinosa</i> , Lin., <i>sp.</i> . . . . .	id.	63	id.	4
— . . . . . <i>id.</i> . . . . .	id.	77	id.	10	<b>VERMETUS</b> . . . . .	III	72		
— <i>Nysti</i> , <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	85	id.	5	— <i>Montensis</i> , <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	72	XVIII	10
— <i>patula</i> , <i>nov. sp.</i> . . . . .	id.	88	id.	7					

# EXPLICATION DES PLANCHES.

## PREMIÈRE PARTIE. — 1870.

### Planche I.

Fig. 1. <i>Murex Hannonicus</i> , nov. sp. . . . .	3
— 2. <i>Triton Marie</i> , nov. sp. . . . .	5
— 3. — <i>simplicicostata</i> , nov. sp. . . . .	6
— 4. — <i>curtulum</i> , nov. sp. . . . .	7
— 5. <i>Turbinella fusiopsis</i> , nov. sp. . . . .	9
— 6. — <i>striatula</i> , nov. sp. . . . .	10
— 7. <i>Cancellaria biplicata</i> , nov. sp. . . . .	12
— 8. <i>Fusus interlineatus</i> , nov. sp. . . . .	26
— 9. <i>Pyrula cymboidea</i> , nov. sp. . . . .	13
— 10. <i>Fusus ecanaliculatus</i> , nov. sp. . . . .	15
— 11. <i>Ficula bicarinata</i> , nov. sp. . . . .	15
— 12. <i>Fusus varians</i> , nov. sp. . . . .	21
— 13. — <i>id.</i> . . . .	21

### Planche II.

Fig. 1. <i>Turbinella fusiopsis</i> , nov. sp. . . . .	9
— 2. <i>Fusus Malaisei</i> , nov. sp. . . . .	19
— 3. — <i>Luciani</i> , nov. sp. . . . .	24
— 4. — <i>Montis</i> , nov. sp. . . . .	20
— 5. — <i>pusillus</i> , nov. sp. . . . .	21
— 6. — <i>subnudus</i> , nov. sp. . . . .	23
— 7. — <i>strictus</i> , nov. sp. . . . .	23
— 8. — <i>Edmondi</i> , nov. sp. . . . .	22
— 9. <i>Buccinum Montese</i> , nov. sp. . . . .	30
— 10. — <i>stromboides</i> , Herman . . . . .	28

### Planche III.

Fig. 1. <i>Pseudoliva robusta</i> , nov. sp. . . . .	32
— 2. — <i>curvicostata</i> , nov. sp. . . . .	34
— 3. — <i>grossecostata</i> , nov. sp. . . . .	37
— 4. — <i>robusta</i> , jeune âge, nov. sp. . . . .	33

Fig. 5. <i>Pseudoliva Elisæ</i> . . . . .	36
6. <i>Ludovicæ</i> , nov. sp. . . . .	35
7. <i>elongata</i> , nov. sp. . . . .	38
8. <i>dubia</i> , nov. sp. . . . .	44
9. — <i>tenuicostata</i> , nov. sp. . . . .	39
10. <i>Pentadactylus Nystii</i> , nov. sp. . . . .	44
11. — <i>lævis</i> , nov. sp. . . . .	43

### Planche IV.

Fig. 1. <i>Ancillaria buccinoides</i> , Lamk . . . . .	48
2. <i>Oliva mitreola</i> , Lamk. . . . .	46
— 3. — <i>acuta</i> , nov. sp. . . . .	45
4. <i>Pleurotoma Paulti</i> , nov. sp. . . . .	56
5. — <i>Malaisei</i> , nov. sp. . . . .	55
6. — <i>Alphonsi</i> , nov. sp. . . . .	59
7. — <i>Hannonica</i> , nov. sp. . . . .	52
8. — <i>ampla</i> , nov. sp. . . . .	51
— 9. — <i>Duponti</i> , nov. sp. . . . .	53
— 10. — <i>minutula</i> , nov. sp. . . . .	38

### Planche V.

Fig. 1. <i>Voluta spinosa</i> , Lin. sp. . . . .	63
— 2. — <i>graciosa</i> , nov. sp. . . . .	65
— 3. <i>Cymba inæquiplicata</i> , nov. sp. . . . .	68
— 4. <i>Voluta Marie</i> , nov. sp. . . . .	67
— 5. <i>Borsonii Coemansi</i> , nov. sp. . . . .	61
— 6. <i>Mitra vicina</i> , nov. sp. . . . .	70
— 7. — <i>Gosseleti</i> , nov. sp. . . . .	76
— 8. — <i>Koeneni</i> , nov. sp. . . . .	74
— 9. — <i>Wateleti</i> , nov. sp. . . . .	75
— 10. — <i>Omali</i> , nov. sp. . . . .	71
— 11. — <i>Dewalquei</i> , nov. sp. . . . .	72
— 12. — <i>dilatata</i> , nov. sp. . . . .	73

SECONDE PARTIE. — 1873.

**Planche VI.**

Fig. 1. <i>Natica Parisiensis</i> , Desh., sp. . . . .	2
— 2. — <i>infundibulum</i> , Watelet. . . . .	4
— 3. — — id. . . . .	4
4. — <i>Wateleti</i> , nov. sp. . . . .	6
5. <i>Turbonilla conjungens</i> , nov. sp. . . . .	15
— 6. — <i>hordeola</i> , Lamk., sp. . . . .	12
— 7. — <i>expansa</i> , nov. sp. . . . .	14
— 8. — <i>Dehayesi</i> , Desh., sp. . . . .	13
9. — <i>exigua</i> , nov. sp. . . . .	16
10. — <i>parva</i> , nov. sp. . . . .	15
11. — <i>acicula</i> , Lamk., sp. . . . .	10
— 12. — <i>conica</i> , nov. sp. . . . .	16
— 13. <i>Potamides inornatus</i> , nov. sp. . . . .	66
— 14. <i>Pyramidella eburnea</i> , Desh. . . . .	8
— 15. <i>Cerithium Duponti</i> , nov. sp. . . . .	10
— 16. <i>Natica Julei</i> , nov. sp. . . . .	7

**Planche VII.**

Fig. 1. <i>Melania exornata</i> , nov. sp. . . . .	68
— 2. — <i>Florentinæ</i> , nov. sp. . . . .	70
— 3. — <i>nuda</i> , nov. sp. . . . .	67
— 4. — <i>Elisæ</i> , nov. sp. . . . .	69
— 5. <i>Coemansia conica</i> , nov. sp. . . . .	19
— 6. — <i>cylindræa</i> , nov. sp. . . . .	19
— 7. <i>Melanopsis buccinoides</i> , Ferrussac. . . . .	74
— 8. — — id. . . . .	74
— 9. — — id. . . . .	74
— 10. <i>Eulima lata</i> , nov. sp. . . . .	22
— 11. — <i>dubia</i> , nov. sp. . . . .	23
— 12. — <i>vicina</i> , nov. sp. . . . .	22
— 13. — <i>levis</i> , nov. sp. . . . .	21
— 14. <i>Cerithium minusculum</i> , nov. sp. . . . .	49
— 15. — <i>granisuturatum</i> , nov. sp. . . . .	41

**Planche VIII.**

Fig. 1. <i>Cerithium inopinatum</i> , Desh. . . . .	25
— 2. — <i>Dejaeri</i> , nov. sp. . . . .	27
— 3. — <i>Koeneni</i> , nov. sp. . . . .	28
— 4. — <i>multifilum</i> , nov. sp. . . . .	29
— 5. — <i>planovaricosum</i> , nov. sp. . . . .	30
— 6. — <i>ovalituberosum</i> , nov. sp. . . . .	31
— 7. — <i>triangulum</i> , nov. sp. . . . .	37
— 8. — <i>regularicostatum</i> , nov. sp. . . . .	32
— 9. — <i>Larteti</i> , nov. sp. . . . .	39
— 10. — <i>Luciani</i> , nov. sp. . . . .	38
— 11. — <i>Francisei</i> , nov. sp. . . . .	42
— 12. — <i>subcylindræum</i> , nov. sp. . . . .	44

**Planche IX.**

Fig. 1. <i>Cerithium Pauli</i> , nov. sp. . . . .	36
— 2. — <i>Malaisei</i> , nov. sp. . . . .	35

Fig. 3. <i>Cerithium varians</i> , nov. sp. . . . .	34
— 4. — <i>Mourloni</i> , nov. sp. . . . .	43
— 5. — <i>Lehardyi</i> , nov. sp. . . . .	42
— 6. — <i>Coemansi</i> , nov. sp. . . . .	47
— 7. — <i>sexlinum</i> , nov. sp. . . . .	33
— 8. — <i>instabile</i> , nov. sp. . . . .	48
— 9. — <i>versigranulatum</i> , nov. sp. . . . .	45
— 10. — <i>Ryckholti</i> , nov. sp. . . . .	46

**Planche X.**

Fig. 1. <i>Cerithium unisulcatum</i> , Lamk. . . . .	54
— 2. — — id. . . . .	54
— 3. — — id. . . . .	54
— 4. — — id. . . . .	54
— 5. — <i>abnorme</i> , nov. sp. . . . .	59
— 6. — <i>Queteleti</i> , nov. sp. . . . .	53
— 7. — <i>tenuiplicatum</i> , nov. sp. . . . .	58
— 8. — <i>punctifibrum</i> , nov. sp. . . . .	57
— 9. — <i>striatum</i> , Brug. . . . .	51
— 10. — <i>Edmondi</i> , nov. sp. . . . .	60
— 11. — <i>punctifibrum</i> , nov. sp., var. . . . .	57
— 12. — <i>tenuiplicatum</i> , nov. sp., var. . . . .	58
— 13. — <i>Chapuisi</i> , nov. sp. . . . .	60

**Planche XI.**

Fig. 1. <i>Potamides Montense</i> , nov. sp. . . . .	63
— 2. <i>Turritella Montensis</i> , nov. sp. . . . .	80
— 3. — <i>acuta</i> , nov. sp. . . . .	85
— 4. <i>Pirena gibbosa</i> , nov. sp. . . . .	74
— 5. <i>Turritella Arseniei</i> , nov. sp. . . . .	85
— 6. — <i>Alphonsi</i> , nov. sp. . . . .	84
— 7. <i>Pirena incerta</i> , nov. sp. . . . .	75
— 8. <i>Turritella Marthæ</i> , nov. sp. . . . .	79
— 9. — <i>Coemansi</i> , nov. sp. . . . .	82
— 10. <i>Cerithium Montense</i> , nov. sp. . . . .	50
— 11. <i>Turritella Montensis</i> , nov. sp. . . . .	80
— 12. — — id. nov. sp. . . . .	80

**Planche XII.**

Fig. 1. <i>Scalaria formosa</i> , nov. sp. . . . .	92
— 2. — <i>Gosseleti</i> , nov. sp. . . . .	93
— 3. — <i>Dumonti</i> , nov. sp. . . . .	93
— 4. <i>Turritella Harmonica</i> , nov. sp. . . . .	83
— 5. — <i>Nysti</i> , nov. sp. . . . .	85
— 6. — <i>Hernimæ</i> , nov. sp. . . . .	90
— 7. — <i>patula</i> , nov. sp. . . . .	88
— 8. — <i>multisulcata</i> , Lamk. . . . .	77
— 9. — <i>instabilis</i> , nov. sp. . . . .	86
— 10. — <i>multisulcata</i> , Lamk. . . . .	77
— 11. <i>Cerithium Dumonti</i> , nov. sp. . . . .	61
— 12. <i>Turritella Mariæ</i> , nov. sp. . . . .	88

TROISIÈME PARTIE. — 1877.

**Planche XIII.**

Fig. 1. <i>Rostellaria Houzeaui</i> , nov. sp. . . . .	5
— 2. <i>Beloptera Houzeaui</i> , nov. sp. . . . .	3
— 3. — <i>Konincki</i> , nov. sp. . . . .	2
— 4. <i>Triton subleve</i> , nov. sp. . . . .	7
— 5. — <i>multicostatum</i> , nov. sp. . . . .	8
— 6. — <i>planisulcatum</i> , nov. sp. . . . .	8
— 7. — <i>curtulum</i> , nov. sp. . . . .	6
— 8. <i>Pseudolina canaliculata</i> , nov. sp. . . . .	26
— 9. <i>Turbinella reticulata</i> , nov. sp. . . . .	9
— 10. <i>Harpopsis tritonoides</i> , nov. sp. . . . .	23
— 11. <i>Buccinum longulum</i> , nov. sp. . . . .	22

**Planche XIV.**

Fig. 1. <i>Turbinella granulosa</i> , nov. sp. . . . .	10
— 2. <i>Cancellaria Malaisei</i> , nov. sp. . . . .	13
— 3. — <i>Mourloni</i> , nov. sp. . . . .	12
— 4. — <i>Duponti</i> , nov. sp. . . . .	12
— 5. — <i>carinata</i> , nov. sp. . . . .	14
— 6. — <i>Crepini</i> , nov. sp. . . . .	13
— 7. — <i>incompta</i> , nov. sp. . . . .	16
— 8. <i>Fusus Heberti</i> , nov. sp. . . . .	20
— 9. — <i>Potteri</i> , nov. sp. . . . .	19
— 10. — <i>Lapparenti</i> , nov. sp. . . . .	18
— 11. — <i>Munieri</i> , nov. sp. . . . .	21

**Planche XV.**

Fig. 1. <i>Fusus Luciani</i> , nov. sp. . . . .	17
— 2. <i>Pleurotoma Devalqueti</i> , nov. sp. . . . .	29
— 3. <i>Borsonia Nysti</i> , nov. sp. . . . .	30
— 4. — <i>mitrata</i> , nov. sp. . . . .	31
— 5. — <i>Bellardi</i> , nov. sp. . . . .	32
— 6. — <i>conoides</i> , nov. sp. . . . .	31
— 7. <i>Pleurotoma ampla</i> , nov. sp. . . . .	28
— 8. <i>Mitra brevis</i> , nov. sp. . . . .	39
— 9. <i>Voluta elevata</i> , Lamk. . . . .	34

**Planche XIX**

Fig. 1. <i>Solarium Montense</i> , nov. sp. . . . .	4
— 2. <i>Lucina lineata</i> , nov. sp. . . . .	6
— 3. <i>Rissoa tenuis</i> , nov. sp. . . . .	10
— 4. — <i>pulchra</i> , nov. sp. . . . .	7
— 5. — <i>craticula</i> , nov. sp. . . . .	8
— 6. — <i>incerta</i> , nov. sp. . . . .	9
— 7. <i>Rissoina nuda</i> , nov. sp. . . . .	11

Fig. 10. <i>Mitra dentata</i> , nov. sp. . . . .	p. 38
— 11. — <i>quinqueplicata</i> , nov. sp. . . . .	37

**Planche XVI.**

Fig. 1. <i>Mitra dilatata</i> , nov. sp. . . . .	36
— 2. <i>Natica Lavalleyi</i> , nov. sp. . . . .	40
— 3. <i>Turbonilla sulcata</i> , nov. sp. . . . .	42
— 4. <i>Ringicula simplex</i> , nov. sp. . . . .	48
— 5. <i>Mathildia binorpha</i> , nov. sp. . . . .	43
— 6. — <i>parva</i> , nov. sp. . . . .	44
— 7. <i>Halloysia bispicata</i> , nov. sp. . . . .	46
— 8. <i>Cirithium tenuiflum</i> , nov. sp. . . . .	58
— 9. — <i>Ortliebi</i> , nov. sp. . . . .	60

**Planche XVII.**

Fig. 1. <i>Cerithium Coemansi</i> , nov. sp. . . . .	51
— 2. — <i>Nerineule</i> , nov. sp. . . . .	53
— 3. — <i>funiculosum</i> , nov. sp. . . . .	55
— 4. — <i>Barroisi</i> , nov. sp. . . . .	56
— 5. — <i>Chelloneixi</i> , nov. sp. . . . .	57
— 6. — <i>tenuiculum</i> , nov. sp. . . . .	61
— 7. — <i>tritonoides</i> , nov. sp. . . . .	59
— 8. — <i>Gosseleti</i> , nov. sp. . . . .	56
— 9. — <i>turritellosum</i> , nov. sp. . . . .	62

**Planche XVIII.**

Fig. 1. <i>Scalaria Tournoueri</i> , nov. sp. . . . .	69
— 2. — <i>Wateleti</i> , nov. sp. . . . .	70
— 3. — <i>Renardi</i> , nov. sp. . . . .	71
— 4. <i>Melania scalaroides</i> , nov. sp. . . . .	63
— 5. — <i>bizonata</i> , nov. sp. . . . .	66
— 6. — <i>Benedeni</i> , nov. sp. . . . .	64
— 7. — <i>anomala</i> , nov. sp. . . . .	65
— 8. — <i>Malaisei</i> , nov. sp. . . . .	67
— 9. — <i>Morreni</i> , nov. sp. . . . .	67
— 10. <i>Vermetus Montensis</i> , nov. sp. . . . .	72

QUATRIÈME PARTIE. — 1886.

**Planche XIX**

Fig. 1. <i>Solarium Montense</i> , nov. sp. . . . .	4
— 2. <i>Lucina lineata</i> , nov. sp. . . . .	6
— 3. <i>Rissoa tenuis</i> , nov. sp. . . . .	10
— 4. — <i>pulchra</i> , nov. sp. . . . .	7
— 5. — <i>craticula</i> , nov. sp. . . . .	8
— 6. — <i>incerta</i> , nov. sp. . . . .	9
— 7. <i>Rissoina nuda</i> , nov. sp. . . . .	11

Fig. 8. <i>Rissoina labrata</i> , nov. sp. . . . .	12
— 9. — <i>tenuicancellata</i> , nov. sp. . . . .	13
— 10. <i>Keilostoma typica</i> , nov. sp. . . . .	14
— 11. <i>Barlecia simplex</i> , nov. sp. . . . .	15
— 12. <i>Truncatella cylindrata</i> , nov. sp. . . . .	20
— 13. — <i>minor</i> , nov. sp. . . . .	21
— 14. <i>Paludina Lamberti</i> , nov. sp. . . . .	22
— 15. <i>Potamoclis truncata</i> , nov. sp. . . . .	29



**Planche XX.**

Fig. 1 *Hydrobia tenuis*, nov. sp. . . . . p. 47  
 — 2. — *elongata*, nov. sp. . . . . 46  
 — 3. — *depressa*, nov. sp. . . . . 47  
 — 4. — *regularis*, nov. sp. . . . . 48  
 — 5. — *minutissima*, nov. sp. . . . . 49  
 — 6. — *nana*, nov. sp. . . . . 49  
 — 7. *Briartia Velaini*, Munier-Chalmas . . . . . 30  
 — 8. — *carinata*, nov. sp. . . . . 31  
 — 9 *Bithinia regularis*, nov. sp. . . . . 24  
 — 10. — *carinata*, nov. sp. . . . . 25  
 — 11. — *longula*, nov. sp. . . . . 26  
 — 12. — *vicina*, nov. sp. . . . . 27  
 — 13. — *pupiformis*, nov. sp. . . . . 28  
 — 14. *Adeorbis similis*, Desh. . . . . 63  
 — 15. — *simplex*, nov. sp. . . . . 64

**Planche XXI.**

Fig. 1. *Cornetia Modunensis*, Munier-Chalmas. . . . . 32  
 — 2. *Neritopsis multicosata*, nov. sp. . . . . 33  
 — 3. *Neritina fabula*, nov. sp. . . . . 35  
 — 4. — *Montensis*, nov. sp. . . . . 36  
 — 5. *Trochus simplicilineatus*, nov. sp. . . . . 47  
 — 6. — *basilevigatus*, nov. sp. . . . . 46  
 — 7. — *Lefevrei*, nov. sp. . . . . 48  
 — 8. — *carinadentatus*, nov. sp. . . . . 49  
 — 9. — *dentulifer*, nov. sp. . . . . 49

**Planche XXII.**

Fig. 1. *Turbo Montensis*, nov. sp. . . . . 37  
 — 2. — *pisarius*, nov. sp. . . . . 38  
 — 3. — *Ladrierei*, nov. sp. . . . . 39  
 — 4. — *Firketi*, nov. sp. . . . . 40  
 — 5. — *Falyanus*, nov. sp. . . . . 41  
 — 6. — *quadrangulatus*, nov. sp. . . . . 42  
 — 7. — *Delvauxi*, nov. sp. . . . . 42  
 — 8. — *funiculosus*, nov. sp. . . . . 43  
 — 9. — *Bretoni*, nov. sp. . . . . 44  
 — 10. — *contractus*, nov. sp. . . . . 45  
 — 11. *Leucorhynchia nitida*, nov. sp. . . . . 61

**Planche XXIII.**

Fig. 1. *Adeorbis radiata*, nov. sp. . . . . 64  
 — 2. *Delphinula bicarinata*, nov. sp. . . . . 52  
 — 3. — *helicina*, nov. sp. . . . . 52  
 — 4. — *inornata*, nov. sp. . . . . 55  
 — 5. — *crenulata*, nov. sp. . . . . 53  
 — 6. — *funicularis*, nov. sp. . . . . 54  
 — 7. — *globosa*, nov. sp. . . . . 56  
 — 8. — *mulilineata*, nov. sp. . . . . 56  
 — 9. — *spinosa*, nov. sp. . . . . 57  
 — 10. — *Montensis*, nov. sp. . . . . 51

Fig. 11. *Teinostoma bilabrata*, nov. sp. . . . . p. 60  
 — 12. *Lymnea Hamonica*, nov. sp. . . . . 86  
 — 13. *Physa Dumontii*, nov. sp. . . . . 88  
 — 14. *Angarina spinosa*, nov. sp. . . . . 59  
 — 15. *Physa Montensis*, nov. sp. . . . . 88

**Planche XXIV.**

Fig. 1. *Fissurella concentrica*, nov. sp. . . . . 66  
 — 2. *Calyptrea Trochiformis*, Lamk. . . . . 68  
 — 3. — *Suessoniensis*, d'Orb. sp. . . . . 69  
 — 4. *Pileopsis involuta*, nov. sp. . . . . 71  
 — 5. *Hippoxis imbricataria*, nov. sp. . . . . 73  
 — 6. *Dentalium magnum*, nov. sp. . . . . 81  
 — 7. *Patella Vincenti*, nov. sp. . . . . 74  
 — 8. *Helcion simplex*, nov. sp. . . . . 76  
 — 9. *Patella regularis*, nov. sp. . . . . 75  
 — 10. *Siphonaria dubia*, nov. sp. . . . . 77  
 — 11. *Chiton Baylei*, nov. sp. . . . . 78  
 — 12. *Dentalium Montense*, nov. sp. . . . . 80

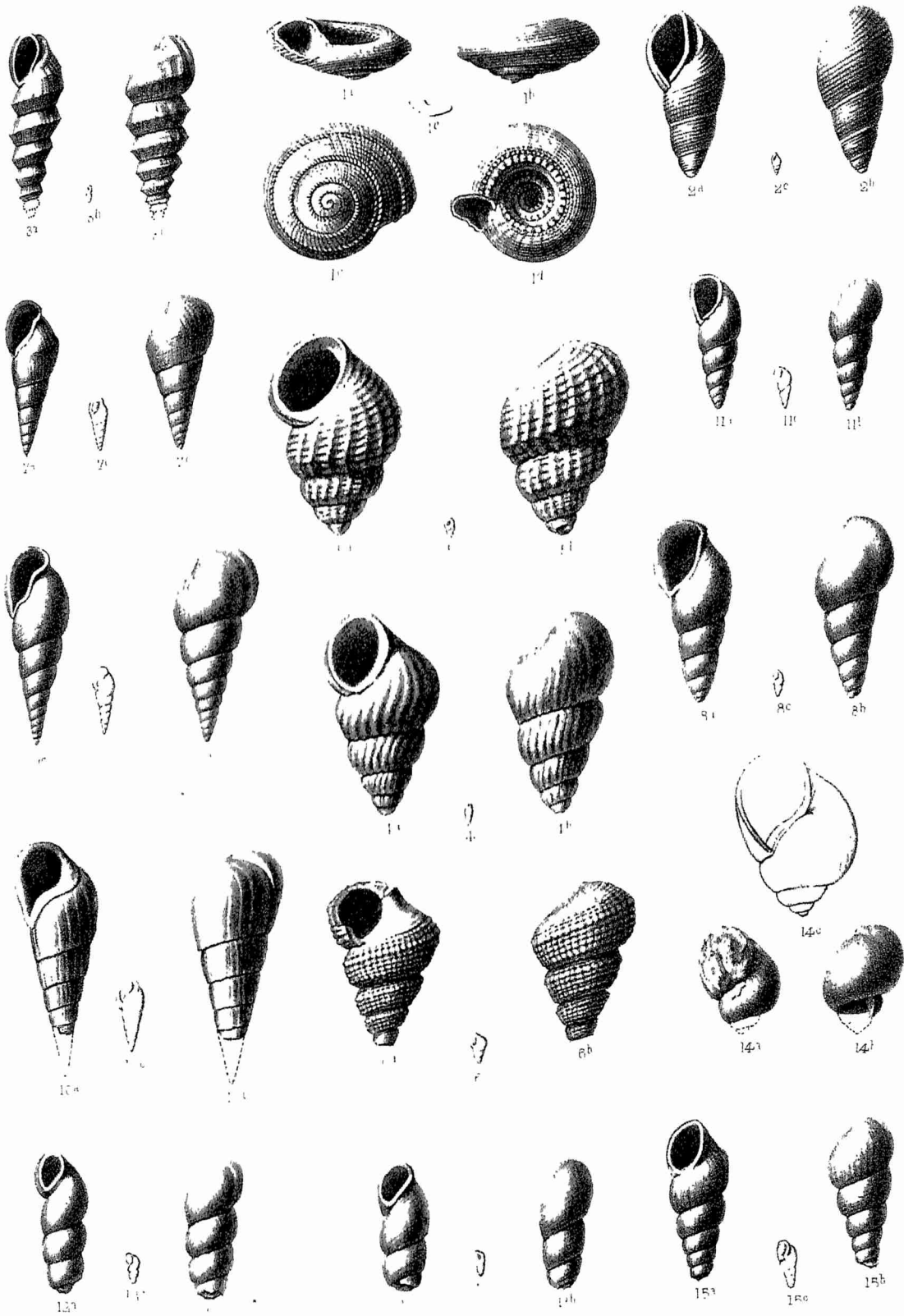
**Planche XXV.**

Fig. 1. *Auricula grandis*, nov. sp. . . . . 90  
 — 2. — *conica*, nov. sp. . . . . 91  
 — 3. — *perforata*, nov. sp. . . . . 92  
 — 4. — *vicina*, nov. sp. . . . . 93  
 — 5. — *longa*, nov. sp. . . . . 94  
 — 6. — *parva*, nov. sp. . . . . 95  
 — 7. *Alexia elongata*, nov. sp. . . . . 99  
 — 8. — *fusiformis*, nov. sp. . . . . 100  
 — 9. *Blanneria acuta*, nov. sp. . . . . 105  
 — 10. — *ovata*, nov. sp. . . . . 106  
 — 11. — *cylindrata*, nov. sp. . . . . 107  
 — 12. *Melampus olivæformis*, nov. sp. . . . . 108  
 — 13. — *cochleatus*, nov. sp. . . . . 109  
 — 14. *Cyclostoma parvisuleata*, nov. sp. . . . . 112  
 — 15. — *Mathildæformis*, nov. sp. . . . . 113

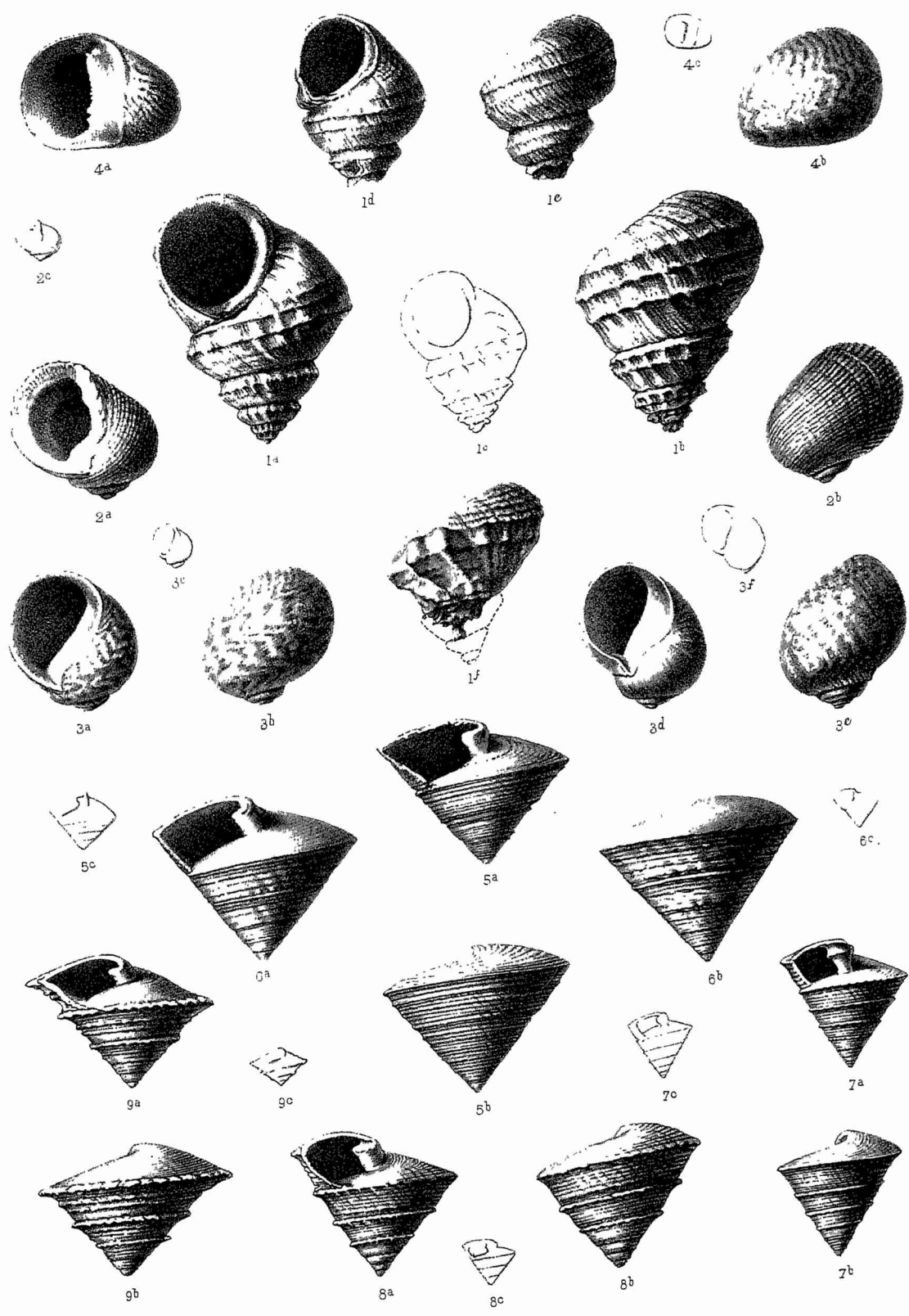
**Planche XXVI.**

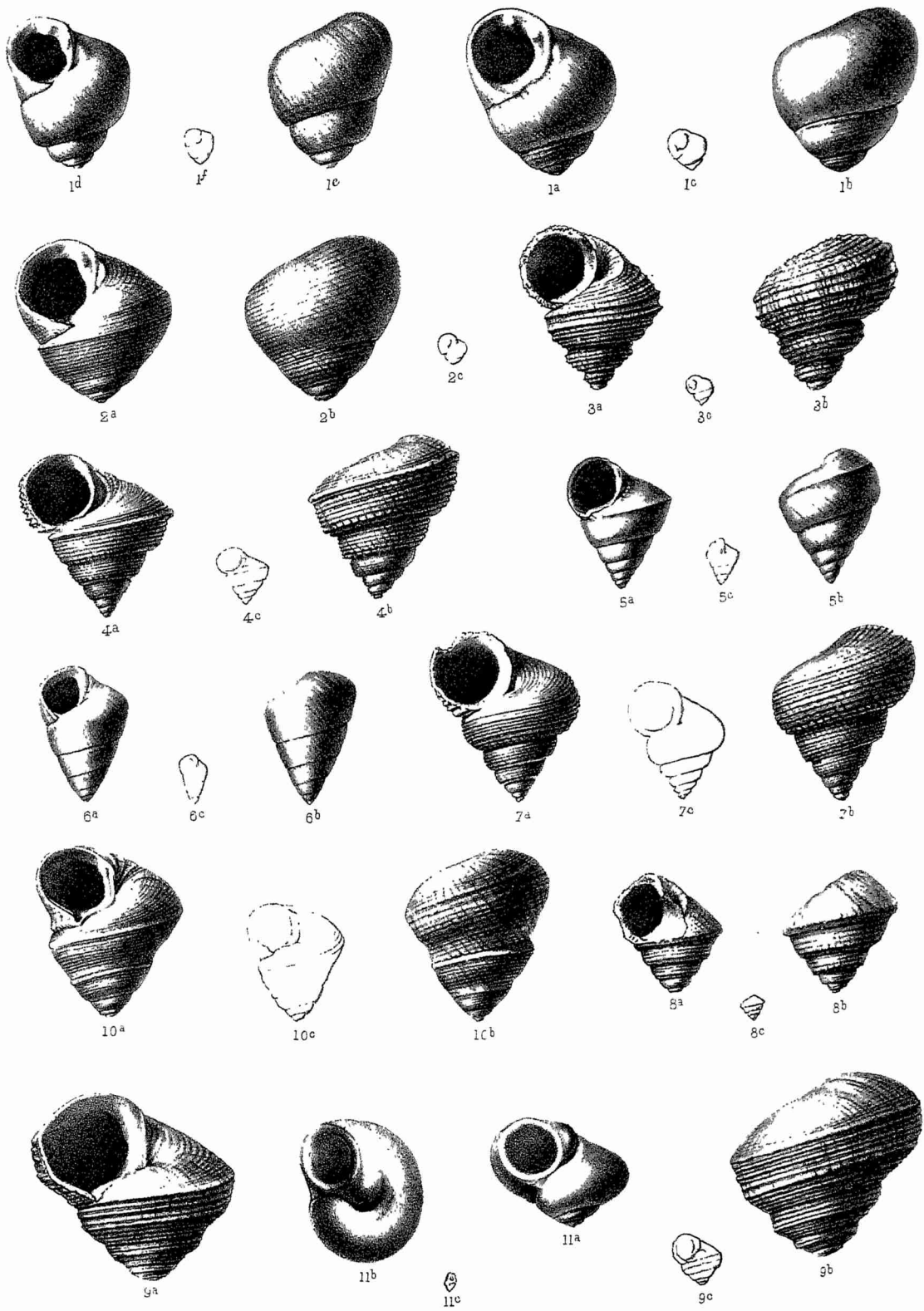
Fig. 1. *Carychium Munieri*, nov. sp. . . . . 111  
 — 2. *Pythia distensa*, nov. sp. . . . . 96  
 — 3. — *globosa*, nov. sp. . . . . 97  
 — 4. — *pisaria*, nov. sp. . . . . 98  
 — 5. *Plecotrema minuta*, nov. sp. . . . . 101  
 — 6. — *turbiniiformis*, nov. sp. . . . . 102  
 — 7. — *ovalis*, nov. sp. . . . . 103  
 — 8. — *conica*, nov. sp. . . . . 104  
 — 9. *Cylindrellina Briarti*, Munier-Chalmas. . . . . 83  
 — 10. *Acteon Parisiensis*, Melleville, sp. . . . . 114  
 — 11. — *tenuiplicatus*, nov. sp. . . . . 115  
 — 12. — *formosus*, nov. sp. . . . . 116  
 — 13. *Bulla raristriata*, nov. sp. . . . . 117

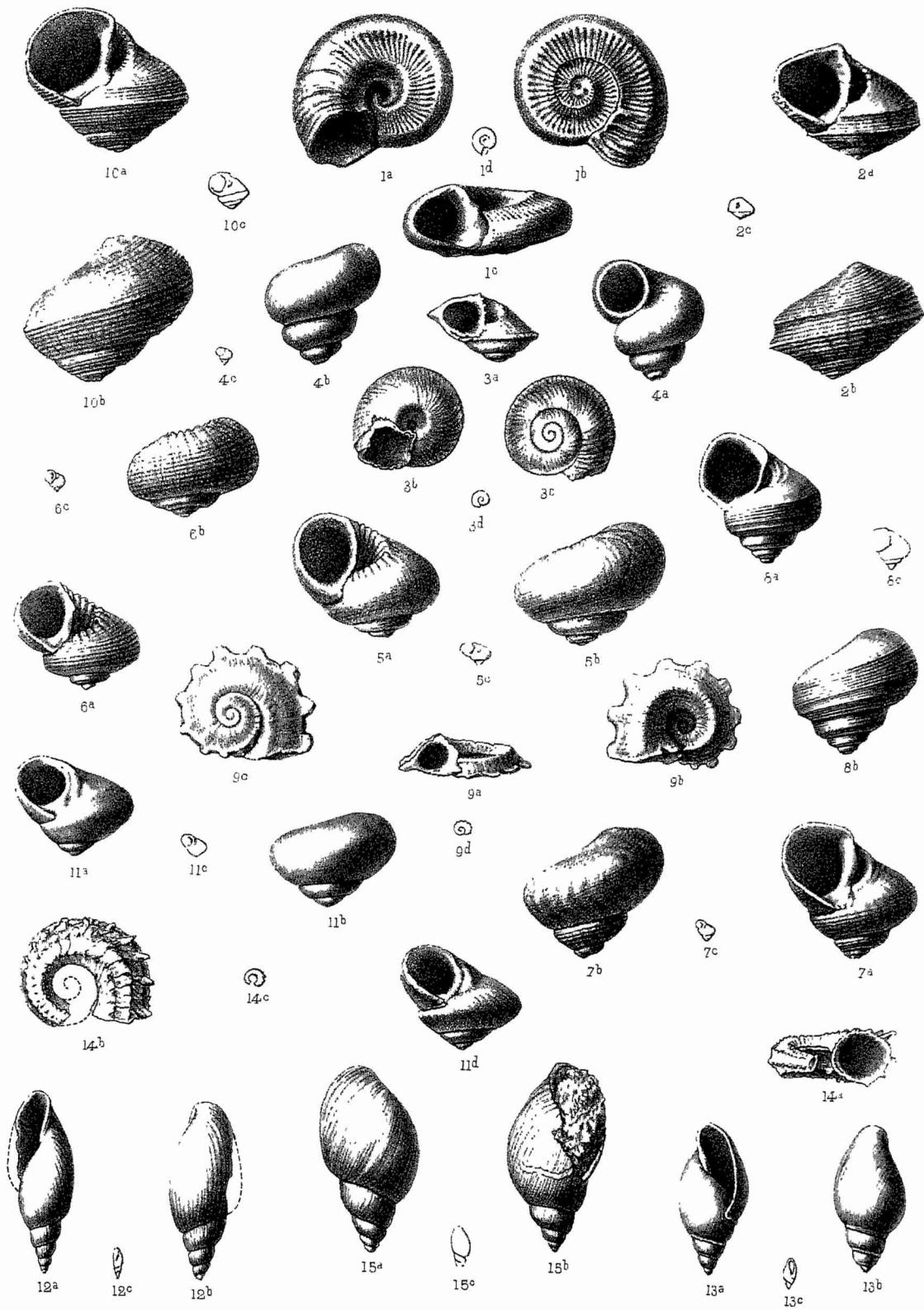


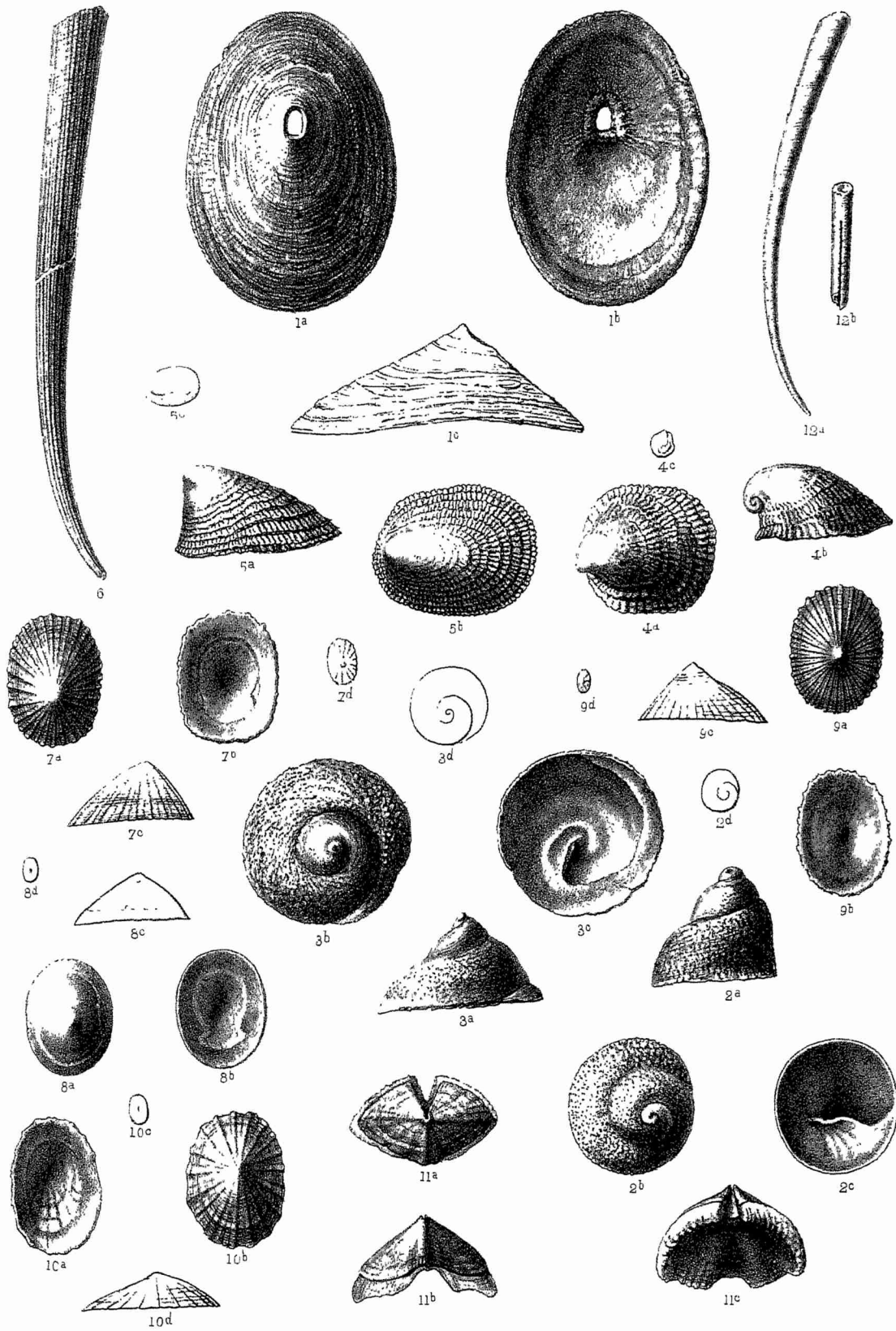














*Lich. G. Senaryus. Frustrillus*

*Briart, ad nat. del.*



