Werk

Titel: II. Développement des produits ..... et de quelques-unes de leurs combinaisons.

Jahr: 1873

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?129323659_0040|log19

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

$$\sqrt[4]{\frac{\omega'}{\omega}}\,[1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots]=\sqrt[4]{\frac{\omega}{\omega'}}\,[1+2q'+2q'^4+2q'^9+2q'^{16}+\cdots], \quad (25)\,(*)$$

$$\sqrt{k}=2q^{\frac{1}{4}}\frac{1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots}, \quad \sqrt{k'}=\frac{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots}, \quad (26)$$

$$\sqrt[4]{k'}=\frac{1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots}=\frac{1-q-q^3+q^6+q^{10}-q^{15}-\cdots}{1+q+q^3+q^6+q^{10}+q^{15}+\cdots}, \quad \ldots \quad (27)$$

$$\sqrt{kk'}=2q^{\frac{1}{4}}\frac{1-3q^2+5q^6-7q^{12}+9q^{20}-\cdots}{(1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots)^3}, \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

$$(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)^4-(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)^4=16q\,(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^4, \quad (29)\ (**)$$

$$(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)^2+(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)^2=2\,(1+2q^2+2q^8+2q^{18}+\cdots)^2, \quad (30)\ (***)$$

$$(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)^2-(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)^2=8q\,(1+q^4+q^{12}+q^{24}+\cdots)^2. \quad \ldots \quad (31)$$

II.

DÉVELOPPEMENTS DES PRODUITS $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ ET DE QUELQUES-UNES DE LEURS COMBINAISONS.

2. *Développement de* $\beta\beta'$. Si $\varphi(n)$ représente le *nombre des décompositions de* n *en parties positives, entières, inégales,* il est visible que

$$\beta\beta'=(1+q)\,(1+q^2)\,(1+q^3)\cdots=\sum_0^\infty \varphi(n)\,q^n \quad \ldots\ldots \quad (32)\ (****)$$

(*) Cauchy, *Mémoire sur la Théorie des nombres* (1830, p. 614). Cette relation, conséquence des formules (2) et (8), y est énoncée ainsi :

« $$a^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}+e^{-a^2}+e^{-4a^2}+e^{-9a^2}+\cdots\right]=b^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}+e^{-b^2}+e^{-4b^2}+e^{-9b^2}+\cdots\right]$$

si $$ab=\pi. \text{ »}$$

(**) Cette identité, qui équivaut à la relation

$$\beta^8-\alpha^8=16q\beta'^8,$$

a été écrite autrement par Jacobi (*Fundamenta nova*, p. 90).

(***) Celle-ci résulte immédiatement d'une formule donnée par Cauchy (*Comptes rendus*, t. XVII, p. 530).

(****) On suppose $\varphi(0)=1$.

3. *Développement de* $\frac{1}{x}$. D'après la relation (7), $\frac{1}{\alpha} = \beta\beta'$; ainsi

$$\frac{1}{\alpha} = \sum_0^\infty \varphi(n)\, q^n. \quad \ldots \quad (33)$$

4. *Développement de* β. Soit $\varphi_i(n)$ le *nombre des décompositions de* n *en parties impaires, inégales;* alors

$$\beta = (1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots = \sum_0^\infty \varphi_i(n)\, q^n \quad \ldots \quad (34)$$

5. *Développement de* β'. De même, $\varphi_p(n)$ désignant le *nombre des décompositions de* n *en parties paires, inégales,*

$$\beta' = (1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\cdots = \sum_0^\infty \varphi_p(n)\, q^n \quad \ldots \quad (35)$$

6. *Remarque.* Le produit β', qui renferme seulement les puissances paires de q, se déduit de $\beta\beta'$ par le changement de q en q^2; donc

$$\beta' = \sum_0^\infty \varphi(n)\, q^{2n}, \quad \ldots \quad (36)$$

et

$$\varphi_p(2n) = \varphi(n);$$

relation évidente.

7. *Décomposition de* φ (n). Dans le produit des séries (34), (35), le coefficient de q^n a pour valeur

$$\varphi_p(n) + \varphi_i(1)\varphi_p(n-1) + \varphi_i(2)\varphi_p(n-2) + \cdots + \varphi_i(n-1)\varphi_p(1) + \varphi_i(n).$$

Donc, quand n est *pair*, on a, d'après la formule (32),

$$\varphi(n) = \varphi_p(n) + \varphi_i(4)\varphi_p(n-4) + \varphi_i(6)\varphi_p(n-6) + \cdots + \varphi_i(n-2)\varphi_p(2) + \varphi_i(n); \quad (37)$$

et, quand n est *impair*,

$$\varphi(n) = \varphi_i(1)\varphi_p(n-1) + \varphi_i(3)\varphi_p(n-3) + \cdots + \varphi_i(n-2)\varphi_p(2) + \varphi_i(n). \quad (38)$$

Soit, par exemple, $n = 13$. La Table III donne

$$\varphi(13) = 18,\ \varphi_i(1) = 1,\ \varphi_i(3) = 1,\ \varphi_i(5) = 1,\ \varphi_i(7) = 1,\ \varphi_i(9) = 2,\ \varphi_i(11) = 2,\ \varphi_i(13) = 3,$$
$$\varphi_p(12) = 4,\ \varphi_p(10) = 3,\ \varphi_p(8) = 2,\ \varphi_p(6) = 2,\ \varphi_p(4) = 1,\ \varphi_p(2) = 1;$$

ainsi,

$$18 = 1.4. + 1.3 + 1.2 + 1.2 + 2.1 + 2.1 + 3;$$

ce qui est exact.

8. *Développement de* α. Si, dans le produit β, on change q en $-q$, on obtient α; conséquemment :

$$\alpha = \frac{1}{\beta\beta'} = (1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots\cdots = \sum_0^\infty \varphi_i(n)(-q)^n. \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

9. *Relation entre les nombres* φ, φ_i. Le produit des séries (32), (39) doit se réduire à 1; on a donc ce théorème :

La fonction

$$\varphi(n) - \varphi_i(1)\varphi(n-1) + \varphi_i(2)\varphi(n-2) - \cdots \pm \varphi_i(n)$$

est nulle pour toutes les valeurs de n (*).

Par exemple,

$$\begin{aligned}\varphi(15) &- \varphi_i(1)\varphi(12) + \varphi_i(2)\varphi(11) - \varphi_i(3)\varphi(10) + \varphi_i(4)\varphi(9) - \varphi_i(5)\varphi(8) + \varphi_i(6)\varphi(7)\\ &- \varphi_i(7)\varphi(6) + \varphi_i(8)\varphi(5) - \varphi_i(9)\varphi(4) + \varphi_i(10)\varphi(3) - \varphi_i(11)\varphi(2) + \varphi_i(12)\varphi(1)\\ &- \varphi_i(15) = 0;\end{aligned}$$

ou (Tables I et III)

$$18 - 1.15 + 0.12 - 1.10 + 1.8 - 1.6 + 1.5 - 1.4 + 2.3 - 2.2 + 2.2 - 2.1 + 3.1 - 3 =$$
$$18 - 15 - 10 + 8 - 6 + 5 - 4 + 6 - 2 = 0.$$

10. *Développement de* $\alpha\beta$. Ce produit résulte de α, par le changement de q en q^2; donc

$$\alpha\beta = \frac{1}{\beta'} = (1-q^2)(1-q^6)(1-q^{10})\cdots = \sum_0^\infty (-1)^n \varphi_i(n) q^{2n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

11. *Relations entre les nombres* φ_i. Reprenons les formules

$$\beta = 1 + \varphi_i(1)q + \varphi_i(2)q^2 + \varphi_i(3)q^3 + \varphi_i(4)q^4 + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$
$$\alpha = 1 - \varphi_i(1)q + \varphi_i(2)q^2 - \varphi_i(3)q^3 + \varphi_i(4)q^4 - \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$
$$\alpha\beta = 1 - \varphi_i(1)q^2 + \varphi_i(2)q^4 - \varphi_i(3)q^6 + \varphi_i(4)q^8 - \cdots. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

(*) Dans cet énoncé, et dans tous ceux du même genre, il est toujours sous-entendu que n *est un nombre entier.*

Il en résulte que l'on doit avoir, *identiquement,*

$$\sum_0^\infty (-1)^n \varphi_i(n)\, q^{2n} = \left[1 + \varphi_i(2)\, q^2 + \varphi_i(4)\, q^4 + \cdots\right]^2 - \left[\varphi_i(1)\, q + \varphi_i(3)\, q^3 + \cdots\right]^2; \quad (41)$$

puis, suivant que n est *pair* ou *impair :*

$$\pm \varphi_i(n) = \varphi_i(2n) + \varphi_i(2)\,\varphi_i(2n-2) + \varphi_i(4)\,\varphi_i(2n-4) + \cdots + \varphi_i(2n-2)\,\varphi_i(2) + \varphi_i(2n)$$
$$- \left[\varphi_i(1)\,\varphi_i(2n-1) + \varphi_i(3)\,\varphi_i(2n-3) + \cdots + \varphi_i(2n-1)\,\varphi_i(1)\right] \quad (42)$$

Par exemple :

$$-\varphi_i(9) = 2\left[\varphi_i(18) + \varphi_i(2)\,\varphi_i(16) + \varphi_i(4)\,\varphi_i(14) + \varphi_i(6)\,\varphi_i(12) + \varphi_i(8)\,\varphi_i(10)\right]$$
$$- \left[\varphi_i(1)\,\varphi_i(17) + \varphi_i(3)\,\varphi_i(15) + \varphi_i(5)\,\varphi_i(13) + \varphi_i(7)\,\varphi_i(11) + \varphi_i(9)\,\varphi_i(9) + \cdots\right]$$
$$\varphi_i(10) = \varphi_i(20) + \varphi_i(2)\,\varphi_i(18) + \varphi_i(4)\,\varphi_i(16) + \varphi_i(6)\,\varphi_i(14) + \varphi_i(8)\,\varphi_i(12) + \varphi_i(10)\,\varphi_i(10)$$
$$+ \varphi_i(12)\,\varphi_i(8) + \cdots$$
$$- 2\left[\varphi_i(1)\,\varphi_i(19) + \varphi_i(3)\,\varphi_i(17) + \varphi_i(5)\,\varphi_i(15) + \varphi_i(7)\,\varphi_i(13) + \varphi_i(9)\,\varphi_i(11)\right].$$

En effet, ces deux égalités se réduisent à (*)

$$-2 = 2\left[5 + 1.3 + 1.3 + 4\right] - \left[1.3 + 1.4 + 1.3 + 1.2 + 4 + 2 + 3 + 4 + 5\right]$$
$$= 2.15 - 52,$$
$$2 = 7 + 1.3 + 1.3 + 2.3 + 2.2 + 3.2 + 3.1 + 5.1 + 7$$
$$- 2\left[1.6 + 1.3 + 1.4 + 1.3 + 2.2\right] = 46 - 2.22.$$

12. *Remarque.* Si l'on suppose

$$\alpha = f(q), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

on a, par ce qui précède,

$$\beta = f(-q), \qquad \alpha\beta = f(q^2); \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

puis

$$f(q)\,f(-q) = f(q^2); \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

relation qui nous sera utile plus loin.

13. *Développement de* $\alpha\alpha'$. 1° Euler a trouvé (**) cette formule remarquable :

$$\alpha\alpha' = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots = \sum_0^\infty (-1)^l q^{\frac{3l^2 \mp l}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

(*) Voir la Table III.

(**) *Introduction à l'Analyse,* p. 250.

2° Représentons par n_p le *nombre des décompositions de* n *en un nombre pair de parties inégales*, et par n_i *le nombre des décompositions de* n *en un nombre impair de parties inégales;* nous aurons, comme on le voit sans peine,

$$\alpha\alpha' = \sum_0^\infty (n_p - n_i)\, q^n. \quad \ldots \quad (47)$$

14. *Conséquences.* D'après ces deux expressions de $\alpha\alpha'$:

1° *Si le nombre* n *n'est pas pentagonal, il admet autant de décompositions en un nombre pair de parties inégales, que de décompositions en un nombre impair de parties inégales;*

2° *Si le nombre* n *est pentagonal,* c'est-à-dire, s'il est compris dans la formule $n = \frac{3l^2 \mp l}{2}$, *l'excès du premier nombre de décompositions sur le second, est* $(-1)^l$;

3° *Le nombre total des décompositions de* n, *en parties inégales, c'est-à-dire* $\varphi(n)$, *est impair ou pair, selon que* n *est ou n'est pas pentagonal;*

4° *Si le nombre* n *est pentagonal,*

$$n_p = \frac{1}{2}\left[\varphi(n) + (-1)^l\right]; \quad n_i = \frac{1}{2}\left[\varphi(n) - (-1)^l\right]; \quad \ldots \quad (48)$$

5° *Dans le cas contraire,*

$$n_p = n_i = \frac{1}{2}\varphi(n) \quad \ldots \quad (49)$$

15. *Développement de* α'. Cette fonction se déduit de $\alpha\alpha'$ par le changement de q en q^2; donc

$$\alpha' = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots = \sum_0^\infty (-1)^l q^{3l^2 \mp l} = \sum_0^\infty (n_p - n_i)\, q^{2n} \quad \ldots \quad (50)$$

16. *Relation entre les nombres* φ_i. Écrivons ainsi les formules (46), (39), (50) :

$$\alpha\alpha' = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + q^{51} + q^{57} - \cdots, \quad (51)$$

$$\alpha = 1 - \varphi_i(1)\, q + \varphi_i(2)\, q^2 - \varphi_i(3)\, q^3 + \varphi_i(4)\, q^4 - \cdots \quad \ldots \quad (39)$$

$$\alpha' = 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - q^{30} + q^{44} + q^{52} - q^{70} - q^{80} + \cdots \quad \ldots \quad (52)$$

Dans le produit des deux dernières séries, le coefficient de q^n est

$$(-1)^n\left[\varphi_i(n) - \varphi_i(n-2) - \varphi_i(n-4) + \varphi_i(n-10) + \varphi_i(n-14) - \varphi_i(n-24) - \cdots\right].$$

Comparant avec le développement (51), on a cette proposition, analogue à un célèbre théorème d'Euler (*) :

La fonction

$$\varphi_i(n) - \varphi_i(n-2) - \varphi_i(n-4) + \varphi_i(n-10) + \varphi_i(n-14) - \cdots$$

égale $(-1)^{n-1}$ *ou zéro, selon que le nombre* n *est ou n'est pas pentagonal.*

17. *Développements de* $\alpha'\beta'$. 1° Par les formules (56), (52) :

$$\alpha'\beta' = (1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots) \sum_0^\infty \varphi(n)\, q^{2n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

2° A cause des définitions (4), (6) et de la formule (51) :

$$\alpha'\beta' = 1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - q^{48} - q^{60} + q^{88} + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

3° De

$$\alpha'\beta'^2 = 1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$$\frac{1}{\beta'} = \sum_0^\infty (-1)^n \varphi_i(n)\, q^{2n}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

on conclut

$$\alpha'\beta' = (1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots) \sum_0^\infty (-1)^n \varphi_i(n)\, q^{2n}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

4° Les relations (21), (52) donnent, semblablement,

$$\alpha'\beta' = (1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - \cdots) \sum_0^\infty \varphi(n)\, q^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

(*) Parmi toutes les démonstrations de ce théorème, la plus simple est peut-être celle qu'a donnée LABEY, dans ses *Notes sur l'Introduction à l'Analyse*. Voici comment on la peut présenter :

De $$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \cdots,$$

on déduit, en prenant les logarithmes et les dérivées,

$$\frac{1}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} + \frac{3x^2}{1-x^3} + \cdots = \frac{1 + 2x - 5x^4 - 7x^6 + \cdots}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \cdots};$$

puis, en multipliant par x et développant le premier membre :

$$x + 3x^2 + 4x^3 + 7x^4 + \cdots + x^n \int n + \cdots = \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + \cdots}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7}.$$

Enfin, chassant le dénominateur, et identifiant, on a :

$$\int n - \int(n-1) - \int(n-2) + \int(n-5) + \int(n-7) - \cdots = \text{zéro ou } \pm n.$$

5° Si l'on change q en $-q$, on trouve

$$\alpha'\beta' = (1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots)\sum_0^\infty (-1)^n \varphi(n)\, q^n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

18. *Relations entre les nombres* φ. 1° D'après les valeurs (53), (54) :
La fonction

$$\varphi(n) - \varphi(n-1) - \varphi(n-2) + \varphi(n-5) + \varphi(n-7) - \varphi(n-12) - \cdots,$$

nulle si n *n'est pas le double d'un nombre pentagonal, se réduit à* $(-1)^l$ *dans le cas contraire,* c'est-à-dire quand $n = 3l^2 \mp l$.

2° La comparaison des valeurs (54), (56) donne cet autre théorème :
La fonction

$$\varphi(n) - \varphi(n-1) - \varphi(n-3) + \varphi(n-6) + \varphi(n-10) - \varphi(n-15) - \cdots,$$

nulle si n *n'est pas le quadruple d'un nombre pentagonal, se réduit à* $(-1)^l$ *dans le cas contraire,* c'est-à-dire quand $n = 2l(3l \mp 1)$.

19. *Relations entre les nombres* φ_i. Elle se déduit des formules (54), (55) :
La fonction

$$\varphi_i(n) - \varphi_i(n-1) - \varphi_i(n-3) + \varphi_i(n-6) + \varphi_i(n-10) - \cdots,$$

nulle si n *n'est pas le double d'un nombre pentagonal, se réduit à* $(-1)^{n-l}$ *dans le cas contraire:*

20. *Vérifications des quatre derniers théorèmes.*

1° $\varphi_i(15) - \varphi_i(13) - \varphi_i(11) + \varphi_i(5) + \varphi_i(1) = 4 - 3 - 2 + 1 + 1 = 1 = (-1)^{15-3}$,
$\varphi_i(11) - \varphi_i(9) - \varphi_i(7) + \varphi_i(1) = 2 - 2 - 1 + 1 = 0$;

2° $\varphi(11) - \varphi(10) - \varphi(9) + \varphi(6) + \varphi(4) = 12 - 10 - 8 + 4 + 2 = 0$,
$\varphi(14) - \varphi(13) - \varphi(12) + \varphi(9) + \varphi(7) - (2) = 22 - 18 - 15 + 8 + 3 - 1 = 1 = (-1)^{14-2}$;

3° $\varphi(11) - \varphi(10) - \varphi(8) + \varphi(5) + \varphi(1) = 12 - 10 - 6 + 3 + 1 = 0$,
$\varphi(20) - \varphi(19) - \varphi(17) + \varphi(14) + \varphi(10) - \varphi(5) = 64 - 54 - 38 + 22 + 10 - 3 = 1 = (-1)^2$;

4° $\varphi_i(11) - \varphi_i(10) - \varphi_i(8) + \varphi_i(5) + \varphi_i(1) = 2 - 2 - 2 + 1 + 1 = 0$,
$\varphi_i(14) - \varphi_i(13) - \varphi_i(11) + \varphi_i(8) + \varphi_i(4) = 3 - 3 - 2 + 2 + 1 = 1 = (-1)^{14-2}$.

21. *Remarques.* I. On a, simultanément :

$$x\alpha' = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$
$$\alpha' = 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - q^{30} + q^{44} + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$
$$\alpha'\beta' = 1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - q^{48} - q^{60} + q^{88} + \cdots. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Mais, par les formules (5), (4), (6) :

$$\alpha\alpha' = 2^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{12}} k'^{\frac{1}{3}} q^{-\frac{1}{24}}, \quad \alpha' = 2^{\frac{1}{6}}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (kk')^{\frac{1}{6}} q^{-\frac{1}{12}}, \quad \alpha'\beta' = 2^{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{3}} k'^{\frac{1}{12}} q^{-\frac{1}{6}}.$$

Si donc l'on suppose $q^2 = q_1$, et que l'on représente par ω_1, k_1, k_1' les valeurs correspondantes de ω, k, k', on doit trouver

$$2^{\frac{1}{6}}\omega_1^{\frac{1}{2}} k_1^{\frac{1}{12}} k_1'^{\frac{1}{3}} = \omega^{\frac{1}{2}} (kk')^{\frac{1}{6}}, \quad 2^{\frac{1}{3}}\omega_1^{\frac{1}{2}} (k_1 k_1')^{\frac{1}{6}} = \omega^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{3}} k'^{\frac{1}{12}};$$

ou, plus simplement :

$$2^{\frac{1}{2}}\omega_1 k_1^{\frac{1}{4}} k_1'^{\frac{1}{2}} = \omega k^{\frac{1}{2}} k'^{\frac{1}{4}}, \quad kk_1' = 2(k_1 k')^{\frac{1}{2}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

En effet, ces relations s'accordent avec les formules connues :

$$k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}, \quad k_1' = 2\frac{\sqrt{k'}}{1+k'}, \quad \omega_1 = \frac{1+k'}{2}\omega, \quad \omega_1' = (1+k')\omega'. \quad (59)\ (*)$$

II. Soit

$$\alpha\alpha' = \varphi(q); \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

alors

$$\alpha' = \varphi(q^2), \quad \alpha'\beta' = \varphi(q^4); \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

puis

$$\alpha = \frac{\varphi(q)}{\varphi(q^2)}, \quad \beta' = \frac{\varphi(q^4)}{\varphi(q^2)}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

et, en vertu de la relation (7),

$$\beta = \frac{[\varphi(q^2)]^2}{\varphi(q)\varphi(q^4)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

III. L'équation (45), qui caractérise la fonction f, devient en vertu de la valeur de α,

$$[\varphi(q^2)]^3 = \varphi(q)\varphi(-q)\varphi(q^4). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (64)$$

22. *Développement de* $\frac{1}{\alpha\alpha'}$. Cette fonction est égale au produit

$$(1+q+q^2\ldots)(1+q^2+q^4+\cdots)(1+q^3+q^6+\cdots)\ldots$$

(*) LEGENDRE, t. III, p. 99.

Par conséquent, si $\psi(n)$ représente le *nombre des décompositions de* n *en parties entières, positives, égales ou inégales,*

$$\frac{1}{\alpha\alpha'} = \sum_0^\infty \psi(n)\, q^n. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

23. *Relation entre les nombres* ψ. A cause du développement de $\alpha\alpha'$ (51), on a le théorème suivant :

La fonction

$$\psi(n) - \psi(n-1) - \psi(n-2) + \psi(n-5) + \psi(n-7) - \cdots$$

est nulle pour toutes les valeurs de n (*).

24. *Développement de* $\frac{1}{\alpha}$. Soit $\psi_i(n)$ le *nombre des décompositions de* n *en parties impaires, égales ou inégales;* alors

$$\frac{1}{\alpha} = \beta\beta' = \sum_0^\infty \psi_i(n)\, q^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

25. *Remarque.* D'après la formule (52),

$$\psi_i(n) = \varphi(n); \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

ou, ce qui est équivalent :

Il y a autant de décompositions d'un nombre n, *en parties impaires, égales ou inégales, que de décompositions de* n *en parties inégales* (**).

26. *Développement de* $\frac{1}{\alpha'}$. Si, dans la formule (65), on remplace q par q^2, le premier membre devient $\frac{1}{\alpha'}$ (15); donc

$$\frac{1}{\alpha'} = \sum_0^\infty \psi(n)\, q^{2n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

27. *Autre expression de* $\frac{1}{\alpha'}$. Elle résulte, immédiatement, des formules (65), (66), (67) :

$$\frac{1}{\alpha'} = \frac{\sum_0^\infty \psi(n)\, q^n}{\sum_0^\infty \varphi(n)\, q^n}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

(*) On suppose $\psi(0) = 1$.

(**) Euler, *Introduction à l'Analyse*, p. 252.

28. *Relations entre les nombres* φ, ψ. 1° D'après les égalités (52), (69) :

$$\varphi(n) = \psi(n) - \psi(n-2) - \psi(n-4) + \psi(n-10) + \psi(n-14) - \cdots \quad (70)$$

2° Si l'on identifie les deux valeurs de $\frac{1}{\alpha}$, on trouve

$$\psi(n) = \varphi(n) + \varphi(n-2)\psi(1) + \varphi(n-4)\psi(2) + \varphi(n-6)\psi(3) + \cdots \quad (71)$$

29. *Seconde expression de* α. Si l'on divise, membre à membre, les égalités (68), (65), on trouve

$$\alpha = \frac{\sum_0^\infty \psi(n)\, q^{2n}}{\sum_0^\infty \psi(n)\, q^n}; \quad (72)$$

résultat qui est d'accord avec l'une des remarques ci-dessus (21, II).

30. *Relation entre les nombres* φ_i, ψ. La comparaison des formules (59), (72) donne le théorème suivant :

La fonction

$$\psi(n) - \varphi_i(1)\psi(n-1) + \varphi_i(2)\psi(n-2) - \varphi_i(3)\psi(n-3) + \cdots$$

égale zéro ou $\psi\left(\frac{n}{2}\right)$, *suivant que* n *est impair ou pair.*

31. *Vérifications des trois derniers théorèmes.* D'après la Table III :

1° $\psi(15) - \psi(11) - \psi(9) + \psi(3) = 101 - 56 - 50 + 3 = 18 = \varphi(15)$,
$\psi(14) - \psi(12) - \psi(10) + \psi(4) + \psi(1) = 135 - 77 - 42 + 5 + 1 = 22 = \varphi(14)$;

2° $\varphi(15) + \varphi(11)\psi(1) + \varphi(9)\psi(2) + \varphi(7)\psi(3) + \varphi(5)\psi(4) + \varphi(3)\psi(5) + \varphi(1)\psi(6)$
$= 18 + 12.1 + 8.2 + 5.3 + 3.5 + 2.7 + 1.11 = 101 = \psi(15)$;
$\varphi(14) + \varphi(12)\psi(1) + \varphi(10)\psi(2) + \varphi(8)\psi(3) + \varphi(6)\psi(4) + \varphi(4)\psi(5) + \varphi(2)\psi(6) + \psi(7)$
$= 22 + 15.1 + 10.2 + 6.3 + 4.5 + 2.7 + 1.11 + 15 = 135 = \psi(14)$;

3° $\psi(15) - \varphi_i(1)\psi(12) + \varphi_i(2)\psi(11) - \varphi_i(3)\psi(10) + \varphi_i(4)\psi(9) - \varphi_i(5)\psi(8) + \varphi_i(6)\psi(7)$
$- \varphi_i(7)\psi(6) + \varphi_i(8)\psi(5) - \varphi_i(9)\psi(4) + \varphi_i(10)\psi(3) - \varphi_i(11)\psi(2) + \varphi_i(12)\psi(1) - \varphi_i(15)$
$= 101 - 1.77 + 0.56 - 1.42 + 1.30 - 1.22 + 1.15 - 1.11 + 2.7 - 2.5 + 2.3$
$- 2.2 + 3.1 - 3 = 0$,
$\psi(14) - \varphi_i(1)\psi(13) + \varphi_i(2)\psi(12) - \varphi_i(3)\psi(11) + \varphi_i(4)\psi(10) - \varphi_i(5)\psi(9) + \varphi_i(6)\psi(8)$
$- \varphi_i(7)\psi(7) + \varphi_i(8)\psi(6) - \varphi_i(9)\psi(5) + \varphi_i(10)\psi(4) - \varphi_i(11)\psi(3) + \varphi_i(12)\psi(2)$
$- \varphi_i(13)\psi(1) + \varphi_i(14)$
$= 135 - 1.101 + 0.77 - 1.56 + 1.42 - 1.30 + 1.22 - 1.15 + 2.11 - 2.7 + 2.5$
$- 2.3 + 3.2 - 3.1 + 3 = 13 = \psi(7)$.

32. *Développement de* $\frac{1}{\beta}$. Les fonctions α, β ne diffèrent que par le changement de q en $-q$. Donc (66), (67) :

$$\frac{1}{\beta} = \alpha\beta' = \sum_0^\infty (-1)^n \varphi(n)\, q^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

33. *Second développement de* α. On a

$$\alpha = \frac{1}{\beta\beta'} = (1 - q + q^3 - q^5 + \cdots)(1 - q^2 + q^4 - \cdots)(1 - q^3 + q^6 - \cdots)\cdots$$

Un produit partiel quelconque a la forme

$$(-q)^a (-q^2)^b (-q^3)^c \cdots = (-1)^{a+b+c\cdots} q^{a+2b+3c+\cdots} = (-1)^{a+b+c+\cdots} q^n.$$

Ce produit égale $\pm q^n$, suivant que le nombre $a + b + c + \cdots$, des parties de n, est *pair* ou *impair*. Donc, dans le développement cherché, le *coefficient de* q^n *est égal à l'excès* ε_n *du nombre des décompositions de* n *en un nombre pair de parties, égales ou inégales, sur le nombre des décompositions de* n *en un nombre impair de parties, égales ou inégales.* Autrement dit,

$$\alpha = \frac{1}{\beta\beta'} = \sum_0^\infty \varepsilon_n q^n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

34. *Remarques.* **I.** La comparaison avec le premier développement (59) donne cette relation

$$\varepsilon_n = (-1)^n \varphi_i(n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

II. Si n_p, n_i sont les nombres dont il s'agit, l'on a

$$n_p + n_i = \psi(n);$$

et, par conséquent,

$$n_p = \frac{1}{2}[\psi(n) + (-1)^n \varphi_i(n)], \quad n_i = \frac{1}{2}[\psi(n) - (-1)^n \varphi_i(n)]. \quad . \quad . \quad (76)\ (*)$$

III. $\psi(n)$ *et* $\varphi_i(n)$ *sont de même parité.*

(*) Nous avons trouvé, ci-dessus (**14**), des formules analogues à celles-ci.

35. *Développements de* $\alpha'\beta$. Ils se déduisent des développements de $\alpha\alpha'$, par le changement de q en $-q$ (8). Ainsi (46), (47) :

$$\alpha'\beta = \sum_0^\infty (-1)^i (-q)^{\frac{3i^2 \mp i}{2}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

$$\alpha'\beta = \sum_0^\infty (n_p - n_i)(-q)^n. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

36. *Remarque.* D'après la formule (51),

$$\alpha'\beta = 1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + q^{15} + q^{22} + q^{26} + q^{35} - q^{40} - q^{51} - \cdots \quad (79)$$

Les termes de cette nouvelle série semblent donc, à partir du troisième, se succéder par groupes de quatre termes, alternativement négatifs et positifs. C'est ce qu'il est facile de vérifier.

37. *Développement de* $\alpha\alpha'\beta$. On tire, des formules (12), (14), (17), (18) :

$$\alpha^2\alpha' = \sqrt{\frac{2\omega k'}{\pi}}, \qquad \alpha'\beta^2 = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (80)$$

puis, de celles-ci,

$$\alpha\alpha'\beta = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}\sqrt{k'}}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (81)$$

ou, en vertu de la formule (25),

$$\alpha\alpha'\beta = \frac{\alpha'}{\beta'} = 1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots \quad \ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

38. *Remarque.* La fonction

$$\alpha\alpha'\beta = \alpha\beta \times \alpha' = (1-q^2)(1-q^6)(1-q^{10})\cdots \times (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots;$$

donc, *dans le développement de ce produit, les coefficients sont* ± 2 *ou zéro.* Cette propriété a de l'analogie avec celle dont jouit le produit $\alpha\alpha'$.

39. *Relation entre les nombres* φ_i. Les développements de $\alpha\beta$ et de α' étant (10), (15)

$$\sum_0^\infty (-1)^n \varphi_i(n)\, q^{2n}, \qquad 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots,$$

le coefficient de q^{2n}, dans le produit, est

$$(-1)^n\varphi_i(n) - (-1)^{n-1}\varphi_i(n-1) - (-1)^{n-2}\varphi_i(n-2) + (-1)^{n-5}\varphi_i(n-5) + (-1)^{n-7}\varphi_i(n-7) - \cdots,$$

ou

$$(-1)^n [\varphi_i(n) + \varphi_i(n-1) - \varphi_i(n-2) - \varphi_i(n-5) - \varphi_i(n-7) - \varphi_i(n-12) + \cdots].$$

Identifiant cette quantité avec le terme général de la série (82), on a ce nouveau théorème :

La fonction

$$\varphi_i(n) + \varphi_i(n-1) - \varphi_i(n-2) - \varphi_i(n-5) - \varphi_i(n-7) - \cdots$$

égale 2 *ou zéro, suivant que* n *est ou n'est pas carré* (*).

Par exemple :

$$\varphi_i(16) + \varphi_i(15) - \varphi_i(14) - \varphi_i(11) - \varphi_i(9) - \varphi_i(4) + \varphi_i(1) = 5 + 4 - 3 - 2 - 2 - 1 + 1 = +2,$$

$$\varphi_i(25) + \varphi_i(24) - \varphi_i(23) - \varphi_i(20) - \varphi_i(18) - \varphi_i(15) + \varphi_i(10) + \varphi_i(3)$$
$$= 12 + 11 - 9 - 7 - 5 - 3 + 2 + 1 = +2,$$

$$\varphi_i(24) + \varphi_i(23) - \varphi_i(22) - \varphi_i(19) - \varphi_i(17) - \varphi_i(12) + \varphi_i(9) + \varphi_i(2)$$
$$= 11 + 9 - 8 - 6 - 5 - 3 + 2 + 0 = 0.$$

40. *Remarque.* Le produit $\alpha'\beta^2$ est décomposable en $\alpha'\beta \times \beta$; donc, à cause des formules (14), (34) et (77) :

$$1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots = [1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - \cdots] \sum_0^\infty \varphi_i(n)\, q^n. \quad . \quad . \quad (83)$$

Identifiant les deux membres, on retombe sur le théorème précédent. [*Ad.*] (**)

41. *Autre relation entre les nombres* φ_i. Si l'on décompose $\alpha\alpha'\beta$ en $\beta \times \alpha\alpha'$, et que l'on ait égard aux formules

$$\beta = 1 + \varphi_i(1)\, q + \varphi_i(2)\, q^2 + \varphi_i(3)\, q^3 + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

$$\alpha\alpha' = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

on trouve la proposition suivante :

La fonction

$$\varphi_i(n) - \varphi_i(n-1) - \varphi_i(n-2) + \varphi_i(n-5) + \varphi_i(n-7) - \varphi_i(n-12) - \varphi_i(n-15) + \cdots$$

égale $2(-1)^{\frac{n}{2}}$ *ou zéro, suivant que* n *est ou n'est pas le double d'un carré.*

(*) Le terme général est $(-1)^{a-l}\varphi_i(n-a)$, a désignant $\frac{3l^2 \mp l}{2}$.

(**) Nous indiquons ainsi les *additions* au texte primitif.

Exemples :

$$\varphi_i(8)-\varphi_i(7)-\varphi_i(6)+\varphi_i(5)+\varphi_i(1)=2-1-1+1+1=2=2(-1)^4,$$
$$\varphi_i(18)-\varphi_i(17)-\varphi_i(16)+\varphi_i(15)+\varphi_i(11)-\varphi_i(6)-\varphi_i(5)=5-5-5+5+2-1-1=-2=2(-1)^9,$$
$$\varphi_i(16)-\varphi_i(15)-\varphi_i(14)+\varphi_i(11)+\varphi_i(9)-\varphi_i(4)-\varphi_i(1)=5-4-5+2+2-1-1=0.$$

42. Corollaire. Si l'on combine les deux derniers théorèmes, on en conclut un autre, assez simple, que l'on peut énoncer ainsi :

La fonction

$$\varphi_i(n)-\varphi_i(n-2)-\varphi_i(n-12)+\varphi_i(n-22)+\varphi_i(n-26)-\cdots$$

égale 1, *ou* $(-1)^{\frac{n}{2}}$, *ou zéro, suivant que* n *est un carré, ou le double d'un carré, ou un autre nombre.*

Par exemple :

$$\varphi_i(16)-\varphi_i(14)-\varphi_i(4)=5-5-1=1,$$
$$\varphi_i(25)-\varphi_i(23)-\varphi_i(15)+\varphi_i(5)=12-9-5+1=1,$$
$$\varphi_i(18)-\varphi_i(16)-\varphi_i(6)=5-5-1=(-1)^9,$$
$$\varphi_i(24)-\varphi_i(22)-\varphi_i(12)+\varphi_i(2)=11-8-5+0=0.$$

43. *Seconde expression de* $\alpha\alpha'\beta$. Des formules (54), (65), on déduit

$$\alpha\alpha'\beta=\frac{1+\varphi_i(1)\,q+\varphi_i(2)\,q^2+\varphi_i(5)\,q^3+\cdots}{1+\psi(1)\,q+\psi(2)\,q^2+\psi(5)\,q^3+\cdots}. \quad (84)$$

44. *Relation entre les nombres* ψ, φ_i. D'après cette dernière valeur, comparée au développement ci-dessus (82) :

$$\varphi_i(n)=\psi(n)-2\psi(n-2)+2\psi(n-8)+2\psi(n-18)-\cdots \quad (85)$$

45. *Développement de* $\frac{\beta'}{\alpha'}$. Nous avons trouvé

$$\beta'=1+\varphi(1)\,q^2+\varphi(2)\,q^4+\varphi(5)\,q^6+\cdots, \quad (56)$$
$$\frac{1}{\alpha'}=1+\psi(1)\,q^2+\psi(2)\,q^4+\psi(5)\,q^6+\cdots. \quad (68)$$

Par suite

$$\frac{\beta'}{\alpha'}=1+A_1q^2+A_2q^4+\cdots+A_nq^{2n}+\cdots, \quad (86)$$

$A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ étant des *nombres entiers*, définis par la formule

$$A_n = \varphi(n) + \varphi(n-1)\psi(1) + \varphi(n-2)\psi(2) + \cdots + \varphi(1)\psi(n-1) + \psi(n). \quad (87)$$

46. *Calcul des coefficients* A_n. Le produit des séries (82), (86) doit se réduire à l'unité; donc

$$A_n = 2\,[A_{n-1} - A_{n-4} + A_{n-9} - A_{n-16} + \cdots], \quad (88)$$

formule plus commode que la précédente. Les premières valeurs de A_n sont

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 2, \quad A_2 = 4, \quad A_3 = 8, \quad A_4 = 14, \quad A_5 = 24, \quad A_6 = 40,$$
$$A_7 = 64, \quad A_8 = 100, \quad A_9 = 154, \quad A_{10} = 232, \quad A_{11} = 344, \quad A_{12} = 504,$$
$$A_{13} = 728, \quad A_{14} = 1\,040, \quad A_{15} = 1\,472, \quad A_{16} = 2\,062, \ldots.$$

47. *Identité remarquable.* En vertu de la relation (7),

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\alpha'}{\alpha\alpha' \times \alpha'\beta}.$$

Mais

$$\alpha\alpha' = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + \cdots, \quad (51)$$
$$\alpha'\beta = 1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + q^{15} + q^{22} + \cdots, \quad (79)$$
$$\alpha' = 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - q^{30} + q^{44} + \cdots, \quad (52)$$
$$\frac{\alpha'}{\beta'} = 1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - 2q^{50} + \cdots; \quad (82)$$

donc

$$\left.\begin{aligned}(1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + \cdots)(1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + \cdots)\\ = (1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - \cdots)(1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots)\end{aligned}\right\} (89)\ (*)$$

48. *Développement de* $\alpha\alpha'\beta'$. Par les formules (5), (6) :

$$\alpha\alpha'\beta' = \frac{\alpha'}{\beta} = q^{-\frac{1}{8}}\sqrt{\frac{\omega}{\pi}\sqrt{kk'}}; \quad (90)$$

donc (21)

$$\alpha\alpha'\beta' = \frac{\alpha'}{\beta} = 1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - q^{15} - q^{21} + \cdots \quad (91)$$

(*) On arrive au même résultat si l'on emploie les formules (60), (61), ...

49. *Développement de* $\alpha'\beta\beta'$. Il est donné par la dernière formule, dans laquelle on changerait q en $-q$. Ainsi :

$$\alpha'\beta\beta' = \frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + q^{15} + q^{21} + \cdots \quad (92)$$

50. Corollaires. I. *Dans le produit des fonctions*

$$\alpha\alpha' = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots, \qquad \beta' = (1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\cdots,$$

le coefficient de q^n *est* $(-1)^n$ *ou zéro, suivant que* n *est ou n'est pas triangulaire.*

II. *Dans le produit des fonctions*

$$\alpha' = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots, \qquad \beta\beta' = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots,$$

le coefficient de q^n *est* 1 *ou zéro, selon que* n *est ou n'est pas triangulaire.*

51. *Relation entre les nombres* φ_p. Comme

$$\alpha\alpha' = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \cdots, \qquad \beta' = 1 + \varphi_p(1)\,q + \varphi_p(2)\,q^2 + \varphi_p(3)\,q^3 + \cdots,$$

il s'ensuit que :

La fonction

$$\varphi_p(n) - \varphi_p(n-1) - \varphi_p(n-2) + \varphi_p(n-5) + \varphi_p(n-7) - \cdots,$$

nulle si n *n'est pas triangulaire, se réduit à* $+1$ *quand* n *est triangulaire pair, et à* -1 *dans le cas contraire.*

52. *Relations entre les nombres* φ. 1° Si $n = 2n'$, les termes $\varphi_p(2n'-1)$, $\varphi_p(2n'-3)$, $\varphi_p(2n'-7)$, ... sont nuls. En même temps, $\varphi_p(2n') = \varphi(n')$, $\varphi_p(2n'-2) = \varphi(n'-1)$, etc. Remplaçant n' par n, on peut énoncer ainsi la dernière propriété :

La fonction

$$\varphi(n) - \varphi(n-1) - \varphi(n-6) + \varphi(n-11) + \varphi(n-15) - \varphi(n-20) - \cdots$$

se réduit à 1 *ou à zéro, suivant que* 2n *est ou n'est pas triangulaire* (*).

(*) Le terme général est $(-1)^l \varphi(n-b)$, b représentant $\frac{1}{4}(3l^2 \mp l)$, $\frac{1}{4}(3l^2 - l)$ ou $\frac{1}{4}(3l^2 + l)$, selon que l a la forme $4l'$, $4l'-1$ ou $4l'+1$.

2° A cause de

$$\alpha' = 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots, \quad \beta\beta' = 1 + \varphi(1)\,q + \varphi(2)\,q^2 + \varphi(3)\,q^3 + \cdots,$$

on conclut, de l'égalité (92), cet autre théorème :

La fonction

$$\varphi(n) - \varphi(n-2) - \varphi(n-4) + \varphi(n-10) + \varphi(n-14) - \cdots$$

se réduit à 1 *ou à zéro, suivant que* n *est ou n'est pas triangulaire.*

53. *Relations entre les nombres* φ *et* ψ. 1° On a (52), (68), (92) :

$$\beta\beta' = \sum_0^\infty \varphi(n)\,q^n, \quad \frac{1}{\alpha'} = \sum_0^\infty \psi(n)\,q^{2n}, \quad \alpha'\beta\beta' = 1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots;$$

et, par conséquent :

$$\varphi(2n) = \psi(n) + \psi(n-3) + \psi(n-5) + \psi(n-14) + \psi(n-18) + \psi(n-33) + \cdots, \quad (93)$$
$$\varphi(2n+1) = \psi(n) + \psi(n-1) + \psi(n-7) + \psi(n-10) + \psi(n-22) + \psi(n-27) + \cdots. \quad (94)$$

Par exemple :

$$\varphi(72) = \psi(36) + \psi(35) + \psi(31) + \psi(22) + \psi(18) + \psi(1),$$
$$\varphi(71) = \psi(35) + \psi(34) + \psi(28) + \psi(25) + \psi(13) + \psi(8);$$

ou (*)

$$56\,552 = 17\,977 + 10\,143 + 6\,842 + 1\,002 + 585 + 3,$$
$$52\,994 = 14\,885 + 12\,310 + 3\,718 + 1\,958 + 101 + 22;$$

ce qui est exact.

2° Si l'on fait usage de la formule

$$\frac{1}{\alpha'} = \frac{\sum_0^\infty \psi(n)\,q^n}{\sum_0^\infty \varphi(n)\,q^n}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (69)$$

on trouve, avec la même facilité,

$$\left[1 + \varphi(1)\,q + \varphi(2)\,q^2 + \cdots\right]^2 = \left[1 + \psi(1)\,q + \psi(2)\,q^2 + \cdots\right](1 + q + q^3 + q^6 + \cdots); \quad (95)$$

puis

$$\psi(n) + \psi(n-1) + \psi(n-3) + \psi(n-6) + \cdots = \varphi(n) + \varphi(1)\varphi(n-1) + \varphi(2)\varphi(n-2) + \cdots + \varphi. \quad (96)$$

(*) Voir Tables II et III.

54. *Développement de* $\frac{\beta}{\alpha'}$. Si l'on suppose

$$\frac{\beta}{\alpha'} = 1 + B_1 q + B_2 q^2 + \cdots B_n q^n + \cdots, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (97)$$

on conclut, des relations (34), (68),

$$B_n = \varphi_i(n) + \varphi_i(n-2)\,\psi(1) + \varphi_i(n-4)\,\psi(2) + \cdots; \quad \ldots\ldots \quad (98)$$

et, par la formule (91) :

$$B_n = B_{n-1} + B_{n-3} - B_{n-6} - B_{n-10} + B_{n-15} + B_{n-21} - \cdots \quad \ldots\ldots \quad (99)$$

Ainsi, *les coefficients* B_n *sont des nombres entiers.* A cause de $B_0 = 1$, la dernière équation donne, successivement :

$$B_1 = 1,\ B_2 = 1,\ B_3 = 2,\ B_4 = 3,\ B_5 = 4,\ B_6 = 5,\ B_7 = 7,\ B_8 = 10,\ B_9 = 15, \ldots$$

55. *Remarque.* Si les nombres B_n étaient connus, il serait facile d'en déduire les nombres φ_i. En effet (34), (32)

$$\frac{\beta}{\alpha'} = \frac{1 + \varphi_i(1)\,q + \varphi_i(2)\,q^2 + \varphi_i(3)\,q^3 + \cdots}{1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{26} - q^{30} + \cdots}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (100)$$

donc, à cause de la formule (97) :

$$\varphi_i(n) = B_n - B_{n-2} - B_{n-4} + B_{n-10} + B_{n-14} - \cdots. \quad \ldots\ldots \quad (101)$$

56. *Développement de* $\frac{\alpha}{\alpha'}$. D'après ce que nous avons fait observer plusieurs fois,

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = 1 - B_1 q + B_2 q^2 - \cdots \pm B_n q^n \mp \cdots \quad \ldots\ldots\ldots \quad (102)$$

57. *Développement de* $\frac{\alpha}{\beta}$. On a trouvé (8), (31) :

$$\alpha = \sum_0^\infty (-1)^n \varphi_i(n)\, q^n, \qquad \frac{1}{\beta} = \sum_0^\infty (-1)^n \varphi(n)\, q^n;$$

donc

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1 - C_1 q + C_2 q^2 - \cdots \pm C_n q^n \mp \cdots, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (103)$$

pourvu que

$$C_n = \varphi_i(n) + \varphi_i(n-1)\,\varphi(1) + \varphi_i(n-2)\,\varphi(2) + \cdots + \varphi(n). \quad \ldots \quad (104)$$

38. *Calcul des coefficients* C_n. Au lieu d'employer la dernière formule, on peut faire attention que, d'après les relations (31), (79), on a

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + \cdots}{1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + q^{15} + q^{22} + \cdots}; \quad \ldots \quad (105)$$

et, en conséquence :

La fonction

$$C_n - C_{n-1} - C_{n-2} + C_{n-5} + C_{n-7} - C_{n-12} - \cdots$$

nulle si le nombre n *n'est pas pentagonal, se réduit à* $(-1)^{n-l}$ *dans le cas contraire, c'est-à-dire quand* $n = \frac{3l^2 \mp l}{2}$ (*).

On trouve, en appliquant ce théorème :

$$C_1 = 2, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 4, \quad C_4 = 6, \quad C_5 = 8,$$
$$C_6 = 12, \quad C_7 = 16, \quad C_8 = 22, \quad C_9 = 30, \quad C_{10} = 40, \ldots$$

39. *Relation entre les nombres* φ, φ_i. La série (105) est le quotient de

$$\alpha = 1 - \varphi_i(1)\, q + \varphi_i(2)\, q^2 - \varphi_i(3)\, q^3 + \cdots, \quad \ldots \quad (39)$$

par

$$\beta = 1 + \varphi_i(1)\, q + \varphi_i(2)\, q^2 + \varphi_i(3)\, q^3 + \cdots. \quad \ldots \quad (34)$$

Conséquemment

$$\varphi_i(n) = C_n - C_{n-1}\varphi_i(1) + C_{n-2}\varphi_i(2) - C_{n-3}\varphi_i(3) + \cdots \pm \varphi_i(n), \quad \ldots \quad (106)$$

C_n, C_{n-1}, C_{n-2} ... C_1 étant déterminés par la formule (104).

Si par exemple, $n = 4$:

$$\varphi_i(4) = [\varphi_i(4) + \varphi_i(3)\varphi(1) + \varphi_i(2)\varphi(2) + \varphi_i(1)\varphi(3) + \varphi(4)]$$
$$- [\varphi_i(3) + \varphi_i(2)\varphi(1) + \varphi_i(1)\varphi(2) + \varphi(3)]\varphi_i(1) + [\varphi_i(2) + \varphi_i(1)\varphi(1) + \varphi(2)]\varphi_i(2)$$
$$- [\varphi_i(1) + \varphi(1)]\varphi_i(3) + \varphi_i(4);$$

ou (Table III)

$$1 = [1 + 1 + 2 + 2] - [1 + 1 + 2] + 0 - [1 + 1] + 1;$$

ce qui est exact. Du reste la relation (106) est beaucoup trop compliquée pour que l'on en puisse faire usage.

(*) On peut comparer ce théorème à l'un de ceux que nous avons énoncés dans le n° **18**.

60. *Développements de* $\frac{\beta}{\alpha}$. 1° Les fonctions α, β ne différant que par le changement de q en $-q$, il en doit être de même pour les fractions $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}$.

Ainsi

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + C_1 q + C_2 q^2 + \cdots + C_n q^n + \cdots, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (107)$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + q^{15} + q^{22} + \cdots}{1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + \cdots}, \quad \ldots\ldots \quad (108)$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1 + \varphi_i(1)\, q + \varphi_i(2)\, q^2 + \varphi_i(3)\, q^3 + \cdots}{1 - \varphi_i(1)\, q + \varphi_i(2)\, q^2 - \varphi_i(3)\, q^3 + \cdots}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (109)$$

2° A cause de la formule (72), et de la relation entre α et β,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1 + \psi(1)\, q + \psi(2)\, q^2 + \psi(3)\, q^3 + \cdots}{1 - \psi(1)\, q + \psi(2)\, q^2 - \psi(3)\, q^3 + \cdots}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (110)$$

61. *Autre relation entre les coefficients* C_n. D'après les formules (105), (107),

$$C_n - C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} - \cdots \pm C_n = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (111)$$

Cette équation, qui peut servir à calculer C_n quand n est *pair*, devient, dans le cas contraire, une pure identité. Voici, je pense, la raison de ce fait :

Le produit des séries (105), (107) a la forme $P^2 - Q^2 q^2$, P et Q représentant des fonctions *paires* de q. Pour rendre ce produit égal à 1, il n'est donc pas nécessaire d'attribuer des valeurs déterminées aux coefficients $C_1, C_3, C_5, \ldots$ Autrement dit, ces coefficients restent *arbitraires* ou *indéterminés* (*).

62. *Remarques.* I. La comparaison des formules (109), (110) conduit à cette conséquence assez curieuse : la fraction (109) ne change pas de valeur, si l'on y remplace les nombres φ_i par les nombres ψ.

(*) L'égalité dont il est question dans le texte, est

$$(1 + C_2 q^2 + C_4 q^4 + \cdots)^2 = 1 + q^2 (C_1 + C_3 q^2 + C_5 q^4 + \cdots)^2.$$

Posant

$$C_1 + C_3 q^2 + C_5 q^4 + \cdots = Q,$$

on a, par la formule du binôme,

$$1 + C_2 q^2 + C_4 q^4 + \cdots = 1 + \frac{1}{2} q^2 Q - \frac{1}{2.4} q^4 Q^2 + \frac{1.3}{2.4.6} q^6 Q^3 - \cdots;$$

relation d'où l'on tire, successivement :

$$C_2 = \frac{1}{2} C_1, \quad C_4 = \frac{1}{2} C_3 - \frac{1}{8} C_1^2, \quad C_6 = \frac{1}{2} C_5 - \frac{1}{4} C_1 C_3 + \frac{1}{16} C_1^3, \text{ etc. } [Ad.]$$

II. Si, pour abréger, on écrit ainsi les équations (108), (109), (110) :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{B}{A} = \frac{B'}{A'} = \frac{B''}{A''},$$

on a

$$AB' = A'B, \qquad AB'' = A''B.$$

Or,

$$A = \alpha\alpha', \qquad B' = \beta;$$

donc

$$AB' = \alpha\alpha'\beta = 1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \cdots. \quad \ldots\ldots \quad (82)$$

ou

$$\left[1+\varphi_1(1)\,q+\varphi_1(2)\,q^2+\varphi_1(3)\,q^3+\cdots\right](1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots)=1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots, \quad (112)$$

relation déjà trouvée (41).

III. De même,

$$A = \alpha\alpha', \qquad B'' = \frac{1}{\alpha\alpha'}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

donc $AB'' = 1$, ou

$$\left[1+\psi(1)\,q+\psi(2)\,q^2+\cdots\right]\left[1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots\right]=1, \quad \ldots \quad (113)$$

comme ci-dessus (22).

IV. Si l'on suppose $\frac{\alpha}{\beta} = F(q)$, on a $\frac{\beta}{\alpha} = F(-q)$, puis

$$F(q)\,F(-q) = 1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (114)$$

Ainsi,

$$F(q) = \frac{A}{B}, \quad F(q) = \frac{A'}{B'}, \quad F(q) = \frac{A''}{B''}$$

sont *trois solutions* de cette équation. La solution générale est donnée par la formule

$$F(q) = \frac{P + Qq}{P - Qq},$$

dans laquelle P, Q désignent, comme précédemment (61), des fonctions *paires* de q.

V. Si l'on prenait

$$F(q) = P_1 + Q_1 q, \quad F(-q) = P_1 - Q_1 q,$$

la fonction *paire* P_1 serait déterminée par la formule

$$P_1 = \sqrt{1 + Q_1^2 q^2};$$

mais cette solution est comprise dans la première. En effet, l'identification des deux valeurs de $F(q)$ conduit à

$$P_1 = \frac{P^2 + Q^2q^2}{P^2 - Q^2q^2}, \qquad Q_1 = 2\frac{PQ}{P^2 - Q^2q^2};$$

etc. (*).

63. *Développement de* $\frac{\beta}{\beta'}$. Des formules (54), (40) :

$$\beta = \sum_0^\infty \varphi_i(n)\, q^n, \quad \frac{1}{\beta'} = \sum_0^\infty (-1)^n \varphi_i(n)\, q^{2n},$$

on conclut

$$\frac{\beta}{\beta'} = 1 + D_1q + D_2q^2 + \cdots + D_nq^n + \cdots, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (115)$$

pourvu que l'on suppose

$$D_n = \varphi_i(n) - \varphi_i(1)\varphi_i(n-2) + \varphi_i(2)\varphi_i(n-4) - \varphi_i(3)\varphi_i(n-6) + \cdots. \quad (116)$$

64. *Autres expressions de* $\frac{\beta}{\beta'}$. 1° $\frac{\beta}{\beta'} = \frac{\alpha'\beta}{\alpha'\beta'}$; donc (79), (54) :

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + q^{15} + \cdots}{1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - q^{48} - q^{60} + \cdots} \quad \ldots\ldots \quad (117)$$

2° Les égalités (15), (15), divisées membre à membre, donnent

$$\frac{(1+q^2)(1+q^6)(1+q^{10})\cdots}{(1+q^4)(1+q^8)(1+q^{12})\cdots} = \frac{1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + \cdots}{1 - q^2 - q^6 + q^{12} + q^{20} - \cdots};$$

d'où, par le changement de q^2 en q :

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \cdots}{1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (118)$$

(*) Par exemple, on satisfait à l'équation (114) au moyen de

$$F(q) = \sqrt{1+q^6} + q^3;$$

mais cette égalité peut être mise sous la forme

$$F(q) = \frac{1 + \sqrt{1+q^6} + q^3}{1 + \sqrt{1+q^6} - q^3}.$$

3° Nous avons trouvé

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = 1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

$$\frac{\beta}{\alpha'} = \frac{1 + \varphi_i(1)\,q + \varphi_i(2)\,q^2 + \varphi_i(3)\,q^3 + \cdots}{1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - q^{30} + \cdots}. \quad \ldots\ldots \quad (100)$$

Conséquemment,

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots}{1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - q^{30} + \cdots}\left[1 + \varphi_i(1)\,q + \varphi_i(2)\,q^2 + \cdots\right]. \quad (119)$$

4° Si l'on a égard à la relation (112), on peut éliminer le second facteur. De là résulte, au lieu de la dernière expression,

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{\left[1 - 2q^2 - 2q^8 + 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots\right]^2}{\left[1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots\right]\left[1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \cdots\right]} \quad \ldots \quad (120)$$

5° Enfin, des formules (34), (36), (40), (75), on déduit encore :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\beta}{\beta'} &= \frac{1 + \varphi_i(1)\,q + \varphi_i(2)\,q^2 + \varphi_i(3)\,q^3 + \cdots}{1 + \varphi(1)\,q^2 + \varphi(2)\,q^4 + \varphi(3)\,q^6 + \cdots} \\ &= \frac{1 - \varphi_i(1)\,q^2 + \varphi_i(2)\,q^4 - \varphi_i(3)\,q^6 + \cdots}{1 - \varphi(1)\,q + \varphi(2)\,q^2 - \varphi(3)\,q^3 + \cdots}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (121)$$

65. *Identités remarquables.* 1° Si l'on égale les valeurs (117), (118), on trouve, en changeant q en $-q$:

$$\left.\begin{aligned} &(1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \cdots)(1 + q + q^3 + q^6 + \cdots) \\ &= (1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \cdots)(1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots). \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (122)$$

2° De même,

$$\left.\begin{aligned} &(1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \cdots)(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots) \\ &= (1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \cdots)(1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - \cdots). \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (125)$$

3° Il résulte, de ces deux égalités,

$$\left.\begin{aligned} &(1 + q + q^3 + q^6 + \cdots)(1 - q - q^3 + q^6 + \cdots) \\ &= (1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots)(1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots). \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (124)$$

66. *Remarques.* I. La valeur commune des deux membres, dans la première identité, est $\alpha\alpha' \times \frac{\alpha'}{\alpha} = \alpha'^2$.

II. D'après les formules (51), (52), la valeur commune des deux produits suivants est $\alpha\alpha'^2$.

III. Enfin, dans la dernière identité, la valeur commune des deux membres est (20), (21), (7) : $\frac{\alpha'^2}{\alpha\beta} = \alpha'^2\beta'$.

67. *Relations entre les coefficients* D_n. Elles résultent de la comparaison des formules (115), (117), (118) :

1° *La fonction*

$$D_n - D_{n-4} - D_{n-8} + D_{n-20} + D_{n-28} - \cdots$$

nulle si n *n'est pas pentagonal, se réduit, dans le cas contraire, à* $(-1)^{n-1}$;

2° *La fonction*

$$D_n - D_{n-1} - D_{n-3} + D_{n-6} + D_{n-10} -$$

nulle si n *n'est pas le double d'un carré, égale* $2(-1)^{\frac{n}{2}}$ *dans le cas contraire.*

On trouve, en appliquant l'un ou l'autre théorème :

$$D_1 = 1,\ D_2 = -1,\ D_3 = 0,\ D_4 = 1,\ D_5 = 0,\ D_6 = -1,\ D_7 = -1,\ D_8 = 2,\ D_9 = 1,\ D_{10} = -2, \ldots$$

68. *Développement de* $\frac{\beta}{\beta'}$. Si l'on fait

$$\frac{\beta'}{\beta} = 1 - E_1 q + E_2 q^2 - \cdots \pm E_n q^n \mp \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (125)$$

les formules (56), (75) :

$$\beta' = 1 + \varphi(1)\, q^2 + \varphi(2)\, q^4 + \cdots, \qquad \frac{1}{\beta} = 1 - \varphi(1)\, q + \varphi(2)\, q^2 - \varphi(3)\, q^3 + \cdots$$

donnent

$$E_n = \varphi(n) + \varphi(1)\,\varphi(n-2) + \varphi(2)\,\varphi(n-4) + \varphi(3)\,\varphi(n-6) + \cdots \quad . \quad . \quad (126)$$

69. *Relations entre les nombres* E_n. Il suffit de les énoncer :

1° *La fonction*

$$E_n - E_{n-1} - E_{n-2} + E_{n-5} + E_{n-7} - E_{n-12} - \cdots$$

égale $(-1)^i$ *ou zéro, selon que* n *est ou n'est pas quadruple d'un nombre pentagonal ;*

2° *La fonction*

$$E_n - 2E_{n-2} + 2E_{n-8} - 2E_{n-18} + \cdots$$

égale 1 *ou zéro, suivant que* n *est ou n'est pas triangulaire* (*).

Les premières valeurs sont :

$$E_1 = 1,\ E_2 = 2,\ E_3 = 3,\ E_4 = 4,\ E_5 = 6,\ E_6 = 9,\ E_7 = 12,\ E_8 = 16,\ E_9 = 22,\ E_{10} = 29, \ldots$$

70. *Valeurs de* $\sqrt[4]{k'}$, $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt{1+k'}$, etc. 1° D'après les formules (5) et (5), la fraction $\frac{\alpha}{\beta}$ est égale à $\sqrt[4]{k'}$. Conséquemment (55), (27) :

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt[4]{k'} = \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + \cdots}{1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + q^{15} + \cdots} \\
&= \frac{1 - \varphi_i(1)\, q + \varphi_i(2)\, q^2 - \varphi_i(3)\, q^3 + \cdots}{1 + \varphi_i(1)\, q + \varphi_i(2)\, q^2 + \varphi_i(3)\, q^3 + \cdots} \\
&= \frac{1 - \psi(1)\, q + \psi(2)\, q^2 - \psi(3)\, q^3 + \cdots}{1 + \psi(1)\, q + \psi(2)\, q^2 + \psi(3)\, q^3 + \cdots} \\
&= \frac{1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots} \\
&= \frac{1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - q^{15} - \cdots}{1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + q^{15} + \cdots}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (127)$$

2° On trouve, avec la même facilité, au moyen des formules (6), (5), (56), (54), (117), (118), (121) :

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt[4]{k} = 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}} \frac{\beta'}{\beta} &= 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}} \frac{1 + \varphi(1)\, q^2 + \varphi(2)\, q^4 + \varphi(3)\, q^6 + \cdots}{1 + \varphi_i(1)\, q + \varphi_i(2)\, q^2 + \varphi_i(3)\, q^3 + \cdots} \\
&= 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}} \frac{1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - q^{48} - q^{60} + \cdots}{1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + q^{15} + \cdots} \\
&= 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}} \frac{1 - \varphi(1)\, q + \varphi(2)\, q^2 - \varphi(3)\, q^3 + \cdots}{1 - \varphi_i(1)\, q^2 + \varphi_i(2)\, q^4 - \varphi_i(3)\, q^6 + \cdots} \\
&= 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}} \frac{1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - q^{15} - \cdots}{1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (128)$$

3° La comparaison des formules (26) et (50) donne ces valeurs simples :

$$\sqrt{\frac{1 + k'}{2}} = \frac{1 + 2q^2 + 2q^8 + 2q^{18} + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots}, \quad \ldots\ldots \quad (129)$$

$$\sqrt{\frac{1 - k'}{2}} = 2q^{\frac{1}{2}} \frac{1 + q^4 + q^{12} + q^{24} + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots}. \quad \ldots\ldots \quad [Ad.]\ (130)$$

(*) De là résulte que E_n est *impair* dans le premier cas, *pair* dans le second.

4° Des égalités (19), (22), on tire, semblablement,

$$\sqrt{\frac{k}{1+k'}} = 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{4}} \frac{1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots}{1 + 2q^2 + 2q^8 + 2q^{18} + \cdots} \quad [Ad.] \ (151)$$

5° Ce n'est pas tout : en partant de la valeur de $\sqrt{k}$ (26), et en faisant usage d'une identité connue, que nous indiquerons tout à l'heure, on arrive à ces deux autres formules :

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[4]{k} &= 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}} \frac{1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}} \frac{1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots}{1 + q + q^3 + q^6 + \cdots}. \end{aligned}\right\} \quad (152)$$

6° Enfin, celles-ci équivalent à

$$\left.\begin{aligned} \frac{\beta}{\beta'} &= \frac{1 + q + q^3 + q^6 + \cdots}{1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots} \\ &= \frac{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots}{1 + q + q^3 + q^6 + \cdots}. \end{aligned}\right\} \quad [Ad.] \ (153)$$

71. *Autre expression de* $\sqrt{\frac{k}{1+k'}}$. Des formules connues

$$cos\ am\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1+k'}}, \qquad cos\ am\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{H\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\Theta\left(\frac{\omega}{2}\right)},$$

on conclut, à cause des valeurs de $H\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $\Theta\left(\frac{\omega}{2}\right)$ (I) :

$$\sqrt{\frac{k}{1+k'}} = 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{4}} \frac{1 - q^2 - q^6 + q^{12} + q^{20} - \cdots}{1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + \cdots} \quad [Ad.] \ (154)$$

72. *Identités remarquables.* 1° Rappelons d'abord celles que nous avons citées ou démontrées précédemment :

$$\sqrt[4]{\frac{\omega'}{\omega}}[1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots] = \sqrt[4]{\frac{\omega}{\omega'}}[1 + 2q' + 2q'^4 + 2q'^9 + 2q'^{16} + \cdots], \quad (25)$$

$$(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots)^4 - (1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots)^4 = 16q(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots)^4, \quad (29)$$

$$(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots)^2 + (1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots)^2 = 2\ (1 + 2q^2 + 2q^8 + 2q^{18} + \cdots)^2, \quad (30)$$

$$(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots)^2 - (1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots)^2 = 8q\ (1 + q^4 + q^{12} + q^{24} + \cdots)^2, \quad (31)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots)(1+q-q^2-q^5-q^7-\cdots)\\&=(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\cdots),\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (89)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots)(1+q+q^2+q^6+q^{10}+\cdots)\\&=(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots)(1-q^4-q^8+q^{20}+q^{28}-\cdots),\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (122)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots)(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)\\&=(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots)(1-q-q^3+q^6+q^{11}-\cdots),\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (123)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots)(1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots)\\&=(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}+\cdots)(1-q^4-q^8+q^{20}+q^{28}-\cdots),\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (124)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots)(1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots)\\&=(1+q-q^2-q^5-q^7-\cdots)(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{36}-\cdots),\end{aligned}\right\}\ [Ad.]\ (127)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots)(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\cdots)\\&=(1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots)(1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}-\cdots).\end{aligned}\right\}\ [Ad.]\ (127^{bis})$$

2° Le changement de q en $-q$ donne

$$\left.\begin{aligned}&(1+q-q^2-q^5-q^7-\cdots)(1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots)\\&=(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots)(1-q^4-q^{18}+q^{20}+q^{28}-\cdots),\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (135)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1+q-q^2-q^5-q^7-\cdots)(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)\\&=(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots)(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots),\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (136)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1+q-q^2-q^5-q^7-\cdots)(1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots)\\&=(1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots)(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{36}-\cdots),\end{aligned}\right\}\ [Ad.]\ (137)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots)(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\cdots)\\&=(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots)(1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots).\end{aligned}\right\}\ [Ad.]\ (138)$$

3° Ces relations, combinées deux à deux, conduisent à celles-ci :

$$(1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots)^2=(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)(1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots),\ (139)$$

$$(1+q-q^2-q^5-q^7-\cdots)^2=(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)(1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots),\ (140)$$

$$\left.\begin{aligned}(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)^2&=(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots)(1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-\cdots)\\&=(1-q-q^3+q^5+q^{10}+\cdots)(1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}-\cdots)\\&=(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots)(1-q^4-q^8+q^{20}+q^{28}-\cdots),\end{aligned}\right\}\ (141)$$

$$(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\cdots)^2=(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots).\ (142)\ (*)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots)(1+q-q^2-q^5-q^7-\cdots)\\&=(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{10}+\cdots)(1-2q^2+2q^8-2q^{18}-\cdots).\end{aligned}\right\}\ [Ad.]\ (143)$$

(*) LEGENDRE, t. III, p. 112.

4° On sait que

$$(1+q+q^3+q^6+\cdots)^2=(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots), \quad (144)\ (*)$$
$$(1-q-q^3+q^6+\cdots)^2=(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)(1-2q+2q^4+2q^9+\cdots); \quad (145)\ (*)$$

donc, à cause de la relation précédente,

$$(1+q+q^3+q^6+\cdots)(1-q-q^3+q^6+\cdots)=(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots); \quad (146)$$

puis, en vertu de l'égalité (124) :

$$\left.\begin{aligned}&(1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+\cdots)(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots)\\ =&(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)(1-q^4-q^8+q^{20}+q^{28}-\cdots).\end{aligned}\right\}\quad\cdots\quad(147)$$

5° Le changement de q^2 en $\pm q$ donne ensuite :

$$\left.\begin{aligned}&(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots)(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)\\ =&(1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots)(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots),\end{aligned}\right\}\quad\cdots\quad(148)\ (**)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots)(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)\\ =&(1+q-q^2-q^5-q^7-\cdots)(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots),\end{aligned}\right\}\quad\cdots\quad(149)$$

6° Des égalités (144), (145), on tire, par soustraction,

$$\left.\begin{aligned}&(1+q^6+q^{10}+q^{28}+q^{56}+\cdots)(q+q^5+q^{15}+q^{21}+q^{45}+\cdots)\\ =&(1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+\cdots)(q+q^9+q^{25}+q^{49}+q^{81}+\cdots);\end{aligned}\right\}\quad\cdots\quad(150)$$

ou, en désignant par i, i', des nombres impairs :

$$\sum_0^\infty q^{2i(4i\mp1)}\times\sum_0^\infty q^{i'(2i'\mp1)}=\sum_0^\infty q^{i(i\mp1)}\times\sum_0^\infty q^{i'^2}. \quad\cdots\quad(151)$$

(*) LEGENDRE, t. III, p. 111. La formule (144) donne les valeurs de $\sqrt[4]{k}$ rapportées ci-dessus (132).

(**) La relation (148) équivaut à

$$\alpha\alpha'.\alpha=\alpha'\beta\beta'\sqrt{\frac{2\omega k'}{\pi}},$$

ou à

$$\alpha^2\alpha'=\sqrt{\frac{2\omega k'}{\pi}};$$

et celle-ci est une conséquence des formules (3), (4).

7° L'identité (144) peut être écrite ainsi :

$$\left(q^{\frac{1}{8}}+q^{\frac{9}{8}}+q^{\frac{25}{8}}+q^{\frac{49}{8}}+\cdots\right)^2=\left(q^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{9}{4}}+q^{\frac{25}{4}}+q^{\frac{49}{4}}+\cdots\right)(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots);$$

ou, par le changement de q en q^8 :

$$(q+q^9+q^{25}+q^{49}+\cdots)^2=(q^2+q^{18}+q^{50}+q^{98}+\cdots)(1+2q^8+2q^{32}+2q^{72}+\cdots). \quad (152)$$

8° Faisant la multiplication par 1, réduisant, puis supprimant le facteur 2, on trouve

$$(q^2+q^{18}+q^{50}+q^{98}+\cdots)(q^8+q^{32}+q^{72}+q^{128}+\cdots)=\sum q^{i^2+i'^2} \quad . \quad . \quad . \quad (153)$$

Dans cette nouvelle relation (*), i, i' sont des *nombres impairs, inégaux.*

9° Si l'on ajoute membre à membre les égalités (144), (145), après avoir élevé au carré, on trouve, eu égard à la relation (50) :

$$\left.\begin{aligned}&(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots)^4+(1-q-q^3+q^6+q^{10}+\cdots)^4\\ =&\,2(1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+\cdots)^2(1+2q^2+2q^8+2q^{18}+\cdots)^2.\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (154)$$

10° Les mêmes relations (144), (145), combinées avec (29), donnent

$$(1+q+q^3+q^6+\cdots)^8-(1-q-q^3+q^6+\cdots)^8=16q(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^8; \quad (155)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$(q+q^9+q^{25}+q^{49}+\cdots)^8-(q-q^9-q^{25}+q^{49}+\cdots)^8=16(q^2+q^{18}+q^{50}+q^{98}+\cdots)^8. \quad (156)$$

11° On a aussi, d'après les formules (144), (145) :

$$\begin{aligned}&(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots)^4-(1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots)^4\\ =&\,(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^2\left[(1+2q+2q^4+\cdots)^2-(1-2q+2q^4-\cdots)^2\right];\end{aligned}$$

c'est-à-dire (31) :

$$(1+q+q^3+q^6+\cdots)^4-(1-q-q^3+q^6+\cdots)^4=8q(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^2(1+q^4+q^{12}+\cdots)^2; \quad (157)$$

(*) Elle ne diffère pas de l'identité (31).

relation que l'on peut conclure encore des égalités (154), (155). La valeur commune des deux membres est $q^{-\frac{1}{2}}\frac{\omega^2}{\pi^2}k(1-k')$.

12° En vertu des deux expressions de $\sqrt{\frac{k}{1+k'}}$ (151), (154), on a

$$\left.\begin{aligned}&(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)(1-2q^4+2q^{16}-2q^{36}+\cdots)\\ =&(1-q^2-q^6+q^{12}+\cdots)(1+2q^2+2q^8+2q^{18}+\cdots).\end{aligned}\right\}\quad [Ad.]\ (158)$$

73. *Remarque.* D'après les identités (127bis), (149), *les produits*

$$\begin{aligned}&(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots)(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\cdots),\\ &(1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots)(1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots),\\ &(1+q-q^2-q^5-q^7-\cdots)(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)\end{aligned}$$

sont égaux : leur valeur commune est $\alpha'^2\beta=\frac{\omega}{\pi}2^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{8}}(kk')^{\frac{1}{4}}$. [*Ad.*]

74. *Formes diverses de* $\beta\beta'$. 1° Nous avons trouvé (66), (72):

$$\beta\beta'=\sum_0^\infty\varphi(n)\,q^n,\qquad \beta\beta'=\frac{\sum_0^\infty\psi(n)\,q^n}{\sum_0^\infty\psi(n)\,q^{2n}}.$$

2° D'après les formules (5), (6),

$$\beta\beta'=2^{-\frac{1}{6}}k^{\frac{1}{12}}k'^{-\frac{1}{6}}q^{-\frac{1}{24}}=\sqrt[6]{\frac{\sqrt{k}}{2k'\sqrt[4]{q}}}.$$

Mais (26)

$$\frac{\sqrt{k}}{2k'\sqrt[4]{q}}=\frac{(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)}{(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)^2};$$

ou, à cause de la relation (144),

$$\frac{\sqrt{k}}{2k'\sqrt[4]{q}}=\left[\frac{1+q+q^3+q^6+\cdots}{1-2q+2q^4+2q^9+\cdots}\right]^2\quad\cdots\cdots\quad(159)$$

Ainsi

$$\beta\beta'=\left[\frac{1+q+q^3+q^6+\cdots}{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}\right]^{\frac{1}{3}}\quad\cdots\cdots\quad(160)$$

3° D'après la *Remarque* ci-dessus (73), on a aussi

$$\beta\beta' = \left[\frac{1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots}{1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots}\right]^{\frac{1}{3}} \quad [Ad.]\ (161)\ (^*)$$

4° La relation (7) peut être écrite ainsi :

$$\beta\beta' = \frac{\alpha'}{\alpha\alpha'}.$$

Donc, par les formules (50), (52) :

$$\beta\beta' = \frac{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots}{1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots} \quad (162)$$

5° A cause de l'identité (159), on peut remplacer cette formule par celle-ci :

$$\beta\beta' = \frac{1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots}{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots} \quad (163)$$

6° Si l'on divise le cube de $\beta\beta'$ (160) par le produit des deux dernières valeurs, on trouve

$$\beta\beta' = \frac{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots}{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots} \quad (164)$$

75. *Autres identités.* La comparaison des valeurs (160), (164) donne

$$(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)^3 = (1+q+q^3+q^6+\cdots)^2\,(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots); \quad (165)$$

et, par le changement de q en $-q$:

$$(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)^3 = (1-q-q^3+q^6+\cdots)^2\,(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots). \quad (166)$$

76. *Valeurs de* $(\beta\beta')^2$. Elles résultent des formules (162), (163), (164), combinées deux à deux ; savoir :

$$(\beta\beta')^2 = \frac{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots}{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots} = \frac{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots}{1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots} \quad (167)$$

(*) Cette valeur résulte encore de l'identité (127bis). [*Ad.*]

77. *Développement de* $(\beta\beta')^2$. Si l'on suppose

$$(\beta\beta')^2 = 1 + G_1 q + G_2 q^2 + \cdots + G_n q^n + \cdots, \quad (168)$$

les *nombres entiers* G_n sont déterminés par les propriétés suivantes, analogues à plusieurs des théorèmes ci-dessus :

1° *La fonction*

$$G_n - 2G_{n-1} + 2G_{n-2} - 2G_{n-9} + 2G_{n-16} - \cdots$$

se réduit à $(-1)^l$ *ou à zéro, suivant que* n *est ou n'est pas le double d'un nombre pentagonal* (*);

2° *La fonction*

$$G_n - G_{n-1} - G_{n-2} + G_{n-5} + G_{n-7} - \cdots$$

égale 1 *ou zéro, suivant que* n *est ou n'est pas triangulaire.*

78. *Relation entre les nombres* G_n, φ. Dans le premier membre de l'égalité (168), le coefficient de q^n est

$$G_n = \varphi(n) + \varphi(n-1)\varphi(1) + \varphi(n-2)\varphi(2) + \cdots \varphi(1)\varphi(n-1) + \varphi(n). \quad (169)$$

79. *Valeurs de* $(\beta\beta')^3$. 1° Par la formule (160),

$$(\beta\beta')^3 = \frac{1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \cdots}. \quad (170)$$

2° De même, à cause de la formule (161) :

$$(\beta\beta')^3 = \frac{1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - \cdots}{1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \cdots}. \quad [Ad.] \ (171)$$

3° $(\beta\beta')^3 = \frac{\alpha'^3}{(\alpha\alpha')^3}$. Mais

$$\alpha'^3 = 1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + 9q^{20} - \cdots; \quad (24)$$

et, par le changement de q^2 en q :

$$(\alpha\alpha')^3 = 1 - 3q + 5q^3 - 7q^6 + 9q^{10} - \cdots; \quad (172)$$

donc

$$(\beta\beta')^3 = \frac{1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + \cdots}{1 - 3q + 5q^3 - 7q^6 + \cdots}. \quad (173)$$

(*) Conséquemment, G_n est *impair* dans le premier cas, *pair* dans le second.

80. *Nouvelle identité.* La comparaison des formules (170), (173) prouve que

$$\left.\begin{aligned}&(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots)(1-3q+5q^3-7q^6+\cdots)\\&=(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)(1-3q^2+5q^6-7q^{12}+\cdots).\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(174)\,(*)$$

81. *Développement de* $(\beta\beta')^3$. Si

$$(\beta\beta')^3=1+H_1q+H_2q^2+\cdots+H_nq^n+\cdots,$$

les nombres entiers H_n sont, évidemment, définis par chacune des propriétés suivantes :

1° *La fonction*

$$H_n-2H_{n-1}+2H_{n-4}-2H_{n-9}+\cdots$$

égale 1 *ou zéro, suivant que* n *est ou n'est pas triangulaire;*

2° *La fonction*

$$H_n-3H_{n-1}+5H_{n-3}-7H_{n-6}+9H_{n-10}-\cdots,$$

nulle si n *n'est pas le double d'un nombre triangulaire, se réduit à* $(2l+1)(-1)^l$ *dans le cas contraire*, c'est-à-dire quand $n=l(l+1)$.

82. *Relation entre les nombres* φ, H_n. Il est visible que

$$H_n=\sum\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c),\quad\ldots\quad(175)$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$x+y+z=n.\quad\ldots\quad(176)$$

83. *Remarques.* I. A cause de $\alpha\beta\beta'=1$, les propriétés démontrées dans les numéros (74) et suivants, comprennent celles qui se rapportent aux développements de $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha^2},\frac{1}{\alpha^3},\alpha,\alpha^2,\alpha^3$. Par exemple :

$$\alpha=\frac{1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots}{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots}=\frac{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}{1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots}=\frac{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots}{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots},\quad(177)$$

$$\alpha^2=\frac{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots}{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots}=\frac{1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots}{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots},\quad\ldots\quad(178)$$

$$\alpha^3=\frac{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots}{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots}=\frac{1-3q+5q^3-7q^6+\cdots}{1-3q^2+5q^6-7q^{12}+\cdots}\quad\ldots\quad(179)$$

(*) La valeur commune des deux produits est $\frac{\alpha'}{\alpha}(\alpha\alpha')^3=\alpha^2\alpha'^4$.

II. Si l'on change q en $-q$, β se transforme en α (8); donc, par les formules (160), (161), ...

$$\left.\begin{aligned}\alpha\beta' = \frac{1}{\beta} &= \left[\frac{1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}\right]^{\frac{1}{3}} = \frac{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-q^{24}-\cdots}{1+q-q^2-q^3-q^7-q^{12}+\cdots}\\ &= \frac{1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots}{1-q^2-q^4+q^{11}+q^{14}-\cdots} = \frac{1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}\end{aligned}\right\} \quad (180)$$

$$\left.\begin{aligned}(\alpha\beta')^2 = \frac{1}{\beta^2} &= \frac{1-q-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots} = \frac{1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots}{1+q-q^2-q^5-q^7-\cdots}\\ &= 1-G_1q+G_2q^2-\cdots\pm G_nq^n\mp\cdots,\end{aligned}\right\} \quad (181)$$

$$\left.\begin{aligned}(\alpha\beta')^3 = \frac{1}{\beta^3} &= \frac{1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots} = \frac{1-3q^2+5q^6-7q^{12}+\cdots}{1+3q-5q^5-7q^6+\cdots}\\ &= 1-H_1q+H_2q^2-\cdots\pm H_nq^n\mp\cdots;\end{aligned}\right\} \quad (182)$$

etc.

84. *Formes diverses de* α'^3. 1° Reprenons les égalités

$$\alpha\alpha'\beta = 1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots, \quad (82)$$

$$\alpha'\beta\beta' = 1+q+q^3+q^6+\cdots, \quad (92)$$

$$\alpha\alpha'\beta' = 1-q-q^3+q^6+q^{10}+\cdots \quad (91)$$

Comme $(\alpha\beta\beta')^2 = 1$, le produit des premiers membres est α'^3; ainsi

$$\alpha'^3 = (1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots)(1+q+q^3+q^6+\cdots)(1-q-q^3+q^6+\cdots). \quad (183)$$

2° A cause de l'identité (146), cette formule équivaut à

$$\alpha'^3 = (1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots)^2(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots); \quad (184)$$

ou encore, à

$$\alpha'^3 = (1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots)(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)(1-q^4-q^8+q^{20}+q^{28}+\cdots); \quad (185)$$

en vertu de la relation (147).

3° On a trouvé

$$(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\cdots)^2 = (1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots); \quad (142)$$

donc la formule (184) devient

$$\alpha'^3 = (1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots). \quad (186)$$

4° Par les formules (12) et (20) :

$$\alpha'^5 = (1 + q + q^3 + q^6 + \cdots)^2 (1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (187)$$

5° De même, par les égalités (14) et (21) :

$$\alpha'^5 = (1 - q - q^3 + q^6 + \cdots)^2 (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (188)$$

6° On tire, des formules (15), (15) :

$$(1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + \cdots)(1 - q^2 - q^6 + q^{12} + q^{20} - \cdots) = \alpha'^2 (1 + q^2)(1 + q^4)(1 + q^6) \cdots ;$$

ou plutôt

$$\alpha'^2 \beta' = (1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + \cdots)(1 - q^2 - q^6 + q^{12} + q^{20} - \cdots) \quad . \quad . \quad . \quad (189)$$

Mais

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = 1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

donc

$$\alpha'^5 = (1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + \cdots)(1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \cdots)(1 - q^2 - q^6 + q^{12} + q^{20} - \cdots). \quad (190)$$

7° Nous avons trouvé

$$\alpha\alpha' = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - \cdots , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

$$\beta\alpha' = 1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + \cdots , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

$$\alpha'\beta' = 1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - q^{48} - \cdots ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

donc

$$\alpha'^3 = (1 - q - q^2 + q^5 + \cdots)(1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - \cdots)(1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots). \quad (191)\ (*)$$

8° Comme (75)

$$\alpha'^2 \beta = (1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + \cdots)(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots),$$

et que

$$\frac{\alpha'}{\beta} = 1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - \cdots , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

il s'ensuit

$$\alpha'^3 = (1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + \cdots)(1 - q^3 - q^4 + q^{10} + \cdots)(1 - q - q^3 + q^6 + \cdots) \quad . \quad . \quad (192)$$

$$= (1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - \cdots)(1 - q^3 - q^4 + q^{10} + \cdots)(1 + q + q^3 + q^6 + \cdots). \quad [Ad.]\ (193)$$

(*) Cette égalité (191) ne diffère pas de la relation (64). [*Ad.*]

9° D'ailleurs

$$\alpha'^3 = 1 - 5q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + 9q^{20} - \cdots \quad (24)$$

10° Enfin

$$\alpha'^3 = (1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots)^3. \quad (54)$$

85. *Remarque.* Il résulte, des *douze* expressions précédentes de α'^3, que *la série* (24) *est décomposable :*

1° *De sept manières différentes, en trois facteurs inégaux ;*

2° *De trois manières différentes, en deux facteurs égaux et en un facteur différent des deux premiers ;*

3° *En trois facteurs égaux.*

Ce résultat paraît assez curieux, surtout si on le rapproche de ce qui a lieu pour les polynômes (*).

86. *Formes diverses de* $(\alpha\alpha')^3$. Elles résultent des formules précédentes, dans lesquelles q^2 est remplacé par q ; savoir :

$$\left.\begin{aligned}(\alpha\alpha')^3 &= (1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)^2\,(1+q+q^3+q^6+\cdots)\\ &= (1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots)\,(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)\,(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)\\ &= (1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots)\,(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)\,(1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots)\\ &= 1-5q+5q^3-7q^6+9q^{10}-\cdots\\ &= (1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots)^3.\end{aligned}\right\} \quad (194)$$

87. *Formes diverses de* $(\beta\alpha')^3$. Le changement de q en $-q$ donne

$$\left.\begin{aligned}(\beta\alpha')^3 &= (1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)^2\,(1-q-q^3+q^6+\cdots)\\ &= (1+q-q^2-q^5-q^7+\cdots)\,(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)\,(1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\cdots)\\ &= (1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\cdots)\,(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)\,(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots)\\ &= 1+5q-5q^3-7q^6+9q^{10}+\cdots\\ &= (1+q-q^2-q^5-q^7-\cdots)^3.\end{aligned}\right\} \quad (195)$$

88. *Développement de* α'^2. 1° Pour essayer de le former, rappelons-nous qu'un terme quelconque de α' a la forme $(-1)^l q^{3l^2 \mp l}$ (50).

(*) Il est bien vrai qu'à une *série dividende* et à une *série diviseur* données, correspond toujours une *série quotient*. Mais, quand les deux premières séries, même supposées très-simples, sont prises arbitrairement, la troisième, si tant est qu'on en puisse assigner le terme général, est, presque toujours, fort compliquée. Ici, au contraire, chacun des facteurs est aussi simple que le produit.

D'après cela, si l'on suppose

$$\alpha'^2 = 1 + L_1 q^2 + L_2 q^4 + \cdots + L_n q^{2n} + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (196)$$

$$2n = (3l^2 \mp l) + (3l'^2 \mp l'), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (197)$$

on a

$$L_n = \sum (-1)^{l+l'}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (198)$$

le signe $\sum$ s'étendant à *toutes les solutions, en nombres entiers,* de l'équation (197)

On peut l'écrire ainsi

$$24n + 2 = (6l \mp 1)^2 + (6l' \mp 1)^2 : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (199)$$

il s'agira, dans chaque cas particulier, de décomposer $24n + 2$ en deux carrés (*). Cela posé, suivant que l et l' sont de même parité ou de parités contraires, $(-1)^{l+l'} = \pm 1$. Donc enfin

Le coefficient L_n *est égal à l'excès* ε *du nombre des solutions de l'équation* (199), *dans lesquelles* l *et* l' *sont de même parité, sur le nombre des solutions dans lesquelles ces inconnues sont de parités contraires.*

89. *Application.* Soit $2n = 80$, $12n + 1 = 481 = 13 \cdot 37$. Les méthodes connues (**) donnent :

$$481 = 16^2 + 15^2 = 20^2 + 9^2,$$

$$2.481 = 962 = 31^2 + 1^2 = 29^2 + 11^2;$$

puis

$$l = 5,\ l' = 0; \quad l = 0,\ l' = 5; \quad l = 5,\ l' = 2; \quad l = 2,\ l' = 5.$$

Dans chacune de ces quatre solutions, l et l' sont de parités différentes ; donc $L_{40} = -4$: le terme cherché est $-4q^{80}$.

En effet, si l'on multiplie par elle-même la série

$$1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - q^{30} + q^{44} + q^{52} - q^{70} - q^{80} + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

on trouve, comme seuls produits partiels contenant q^{80} :

$$1 \times -q^{80}, \quad q^{10} \times -q^{70}, \quad -q^{70} \times q^{10}, \quad -q^{80} \times 1.$$

(*) Il est facile de voir que si $a^2 + b^2 = 24n + 2$, les nombres entiers a, b ont nécessairement la forme $6\mu \pm 1$.

(**) Voir, par exemple, un remarquable travail de M. Genocchi (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIII).

90. *Relation entre les coefficients* L_n. Des formules

$$\alpha' = 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

$$\alpha'^3 = 1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + 9q^{20} - \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

jointes au développement de α'^2 (196), on conclut le théorème suivant :

La fonction

$$L_n - L_{n-1} - L_{n-2} + L_{n-5} + L_{n-7} - \cdots,$$

nulle si n *n'est pas triangulaire, égale* $(2\lambda + 1)(-1)^\lambda$ *dans le cas contraire,* c'est-à-dire quand $n = \frac{1}{2}\lambda(\lambda + 1)$ (*).

91. *Relation entre les coefficients* L_n *et les nombres* ψ. A cause de $\alpha'^2 = \alpha'^3 \times \frac{1}{\alpha'}$,

$$1 + L_1 q^2 + L_2 q^4 + \cdots + L_n q^{2n} + \cdots = [1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + \cdots][1 + \psi(1) q^2 + \psi(2) q^4 + \cdots]; \quad (200)$$

et, par conséquent,

$$L_n = \psi(n) - 3\psi(n-1) + 5\psi(n-3) - 7\psi(n-6) + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (201)$$

Au moyen de cette formule et de la Table III, on trouve

$$L_1 = -2,\ L_2 = -1,\ L_3 = 2,\ L_4 = 1,\ L_5 = 2,\ L_6 = -2,\ L_7 = 0,$$
$$L_8 = -2,\ L_9 = -2,\ L_{10} = 1, \ldots$$

92. *Autres expressions de* α'^2. 1° De

$$\alpha\alpha' = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

on déduit

$$\alpha'^2 = (1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \cdots)(1 + q + q^3 + q^6 + \cdots). \quad . \quad . \quad . \quad (202)$$

2° Semblablement, si l'on part des formules

$$\alpha'\beta' = 1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - q^{48} - q^{60} + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = 1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

(*) On a ainsi une relation entre les nombres de solutions de l'équation (199), relatifs aux valeurs successives de n; ce qui est assez remarquable.

on trouve

$$\alpha'^2 = (1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - q^{48} - \cdots)(1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \cdots] \quad . \quad (203)\ (*)$$

93. *Autres théorèmes sur les coefficients* L_n. 1° Dans le second membre de l'égalité (202), un produit partiel quelconque a la forme

$$(-1)^{\lambda} q^{\frac{3\lambda^2 \mp \lambda}{2}} q^{\frac{\lambda'(\lambda'+1)}{2}};$$

donc

$$4n = (3\lambda^2 \mp \lambda) + \lambda'(\lambda' + 1),$$

ou

$$48n + 4 = (6\lambda \mp 1)^2 + 3(2\lambda' + 1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (204)$$

Par suite :

Le coefficient L_n *égale l'excès du nombre des valeurs paires sur le nombre des valeurs impaires de* λ, *satisfaisant à l'équation* (204).

2° La formule (205) donne, avec la même facilité, le théorème suivant :

Le coefficient L_n *égale deux fois l'excès* ε' *du nombre des solutions de l'équation*

$$12n + 1 = (6x \mp 1)^2 + 3(2y)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (205)$$

dans lesquelles x *et* y *sont de même parité, sur le nombre des solutions dans lesquelles ces inconnues sont de parités contraires* (**).

94. *Remarques.* I. Ainsi qu'on a déjà pu l'observer ci-dessus (91), les valeurs de L_n croissent très-lentement. Cette conclusion résulte surtout du développement de α'^2, prolongé, par exemple, jusqu'au terme q^{200}. On trouve :

$$\begin{aligned}
\alpha'^2 = 1 &- 2q^2 - q^4 + 2q^6 + q^8 + 2q^{10} - 2q^{12} - 2q^{16} - 2q^{18} + q^{20} + 2q^{26} + 3q^{28} - 2q^{30} + 2q^{32} \\
&- 2q^{38} - 2q^{40} - 2q^{46} - q^{48} + 2q^{52} + 2q^{54} - 2q^{56} + 2q^{58} + q^{60} + 2q^{62} + 2q^{66} - 2q^{68} - 2q^{70} \\
&+ 2q^{72} - 2q^{76} - 4q^{80} + q^{88} - 2q^{90} + 2q^{96} + 2q^{100} + 2q^{102} + q^{104} - 2q^{106} + 2q^{110} + 2q^{112} - 2q^{118} \\
&- 2q^{122} - 2q^{126} + 2q^{128} - 4q^{132} - 2q^{138} - q^{140} + 2q^{142} + 2q^{146} - 2q^{154} + 2q^{156} + 4q^{158} + q^{160} + 2q^{166} \\
&- 2q^{168} + 2q^{170} - 2q^{172} + 2q^{178} - 2q^{182} - 2q^{136} - 2q^{188} - 2q^{192} + 2q^{200} + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (206)
\end{aligned}$$

(*) Ces deux expressions de α'^2 s'accordent avec l'identité (122).

(**) Cet énoncé suppose y différent de zéro. Dans le cas opposé, c'est-à-dire quand n a la forme $l(3l \mp 1)$, $2\varepsilon'$ doit être augmenté de $(-1)^l$.

II. Dans ce développement, les seuls coefficients *impairs* sont ceux de $q^0, q^1, q^8, q^{20}, q^{28}, q^{44}, \ldots$ A cause de

$$\alpha' = 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - q^{30} + \cdots,$$

ce résultat était nécessaire.

93. *Expressions de* $\alpha'^2\beta'$. Nous avons trouvé (65), (66), (84) :

$$\alpha'^2\beta' = (1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots)(1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - \cdots), \quad . \quad . \quad (207)$$

$$\alpha'^2\beta' = (1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots)(1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{20} - \cdots), \quad . \quad . \quad (208)$$

$$\alpha'^2\beta' = (1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + \cdots)(1 - q^2 - q^6 + q^{12} + q^{20} - \cdots); \quad . \quad . \quad (189)$$

donc, par l'identité (146),

$$\alpha'^2\beta' = (1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots)(1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots). \quad [Ad.] \; (209)$$

96. *Développement de* $\alpha'^2\beta'$. Les manières les plus simples de le former, consistent à partir des formules (207) ou (208). Si l'on suppose

$$\alpha'^2\beta' = 1 + P_1 q^2 + P_2 q^4 + \cdots + P_n q^{2n} + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (210)$$

on aura, soit

$$P_n q^{2n} = \sum (-1)^{l+l'} q^{(3l^2 \mp l) + 2(3l'^2 \mp l')},$$

soit

$$P_n q^{2n} = \sum (-1)^{\frac{\lambda'(\lambda'+1)}{2}} q^{\frac{\lambda(\lambda+1)}{2} + \frac{\lambda'(\lambda'+1)}{2}}.$$

Par conséquent, si l'on considère les équations

$$2n = (3l^2 \mp l) + 2(3l'^2 \mp l'), \quad 2n = \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} + \frac{\lambda'(\lambda'+1)}{2},$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$24n + 5 = (6l \mp 1)^2 + 2(6l'^2 \mp 1)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (211)$$

$$8n + 1 = (\lambda + \lambda' + 1)^2 + (\lambda - \lambda')^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (212)$$

on a les deux propositions suivantes :

1° *Le coefficient* P_n *égale l'excès du nombre des solutions de l'équation* (211), *dans lesquelles* l *et* l' *sont de même parité, sur le nombre des solutions dans lesquelles ces inconnues sont de parités contraires ;*

2° *Le coefficient* P_n *égale l'excès du nombre des valeurs de* λ', *satisfaisant à l'équation* (212), *et ayant les formes* 4μ, $4\mu - 1$, *sur le nombre des autres valeurs de cette inconnue.*

97. APPLICATION. Soit $2n = 130$. Les dernières équations deviennent

$$1\,565 = (6l \mp 1)^2 + 2(6l' \mp 1)^2, \quad 521 = (\lambda + \lambda' + 1)^2 + (\lambda - \lambda')^2.$$

521 est un nombre premier, de la forme $4\mu + 1$. Conséquemment, ce nombre est décomposable, d'une seule manière, en une somme de deux carrés. On trouve

$$\lambda + \lambda' + 1 = 20, \qquad \lambda - \lambda' = \pm 11;$$

puis ces deux systèmes de valeurs :

$$\lambda = 15,\ \lambda' = 4; \qquad \lambda = 4,\ \lambda' = 15.$$

D'après le second théorème, on a $P_{65} = 2$. En effet, dans le produit des séries

$$1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \cdots + q^{120} + q^{136} + \cdots,$$
$$1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - \cdots + q^{120} + q^{136} - \cdots,$$

le terme $P_{65}q^{130} = q^{10} \times q^{120} + q^{120} \times q^{10}$.

Prenons maintenant l'équation

$$1\,565 = (6l \mp 1)^2 + 2(6l' \mp 1)^2.$$

On y satisfait par

$$l = 5,\ l' = 3; \qquad l = 6,\ l' = 2;\ (*)$$

donc $P_{65} = 2$. D'ailleurs, si l'on fait le produit des séries

$$1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} - q^{30} + q^{44} + q^{52} - q^{70} - q^{80} + q^{102} + q^{114} - \cdots,$$
$$1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - q^{48} - q^{60} + q^{88} + q^{104} - \cdots,$$

on trouve

$$P_{65}q^{130} = (-q^{70} \times -q^{60}) + (+q^{102} \times +q^{28}).$$

(*) $1\,565 = 29^2 + 2 \cdot 19^2 = 37^2 + 2 \cdot 13^2$.

98. *Développement de* $(\alpha'\beta'^2 - \alpha'^2\beta')$. On a

$$1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + \cdots = \alpha'\beta'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

De là résulte que la formule (209) équivaut à

$$\alpha'\beta'^2 - \alpha'^2\beta' = 2\,[1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots]\,[q^2 - q^8 + q^{18} - q^{32} + \cdots] \quad . \quad . \quad (213)$$

Soit

$$Q = (1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots)\,(q^2 - q^8 + q^{18} - q^{32} + \cdots) = q^2 + Q_2 q^4 + \cdots + Q_n q^{2n} + \cdots \quad (214)$$

Un terme quelconque du produit a la forme $q^{x(x+1)} \times (-1)^{y-1} q^{2y^2}$. Par conséquent, si l'on pose

$$2n = x\,(x + 1) + 2y^2,$$

ou

$$8n + 1 = (2x + 1)^2 + 2\,(2y)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (215)$$

on voit que :

Le coefficient Q_n *égale l'excès du nombre des valeurs impaires sur le nombre des valeurs paires de* y, *vérifiant l'équation* (215).

99. *Remarques.* I. D'après l'expression de $\alpha'\beta'^2$:

Si le nombre n *est triangulaire; ou, ce qui est équivalent, si* $8n + 1$ *est carré* (*), $P_n = 1 - 2Q_n$. *Dans le cas contraire,* $P_n = -2Q_n$.

II. On a vu, précédemment, avec quelle lenteur croissent les coefficients des puissances de q, dans le développement de α'^2 (94). Le même fait s'observe dans la série Q. En effet, le calcul direct donne

$$\begin{aligned} Q = {} & q^2 + q^4 - q^{10} + q^{18} + q^{20} + q^{24} - q^{28} + q^{32} - q^{34} - q^{38} + q^{48} + q^{50} + q^{58} + q^{60} - q^{64} \\ & + q^{70} - q^{72} - q^{78} - q^{84} - q^{88} + q^{90} + q^{92} + q^{100} - q^{102} + q^{106} + q^{108} + q^{110} + q^{112} - q^{114} - q^{130} \\ & - q^{142} - q^{144} - q^{148} + q^{150} + q^{154} + q^{160} - q^{164} + q^{168} + 2q^{174} + q^{182} - q^{190} + q^{192} - q^{200} + \cdots \end{aligned}$$

Ainsi, pour toutes les valeurs de n qui ne surpassent pas 100, $Q_n = \pm 1$ ou 0, excepté $Q_{87} = 2$.

100. *Vérifications.* 1° Si $n = 87$, l'équation (215) devient

$$687 = (2x + 1)^2 + 2\,(2y)^2.$$

(*) $n = \frac{n'(n'+1)}{2}$ donne $8n + 1 = (2n' + 1)^2$. Alors l'équation (215) est vérifiée par $x = n'$, $y = 0$. Quant à l'équation (212), on y satisfait par $\lambda = \lambda' = n'$.

On n'y satisfait que par $x=3$, $y=9$; $x=12$, $y=3$ (*). Donc $Q_{87}=2$.

2° L'équation (212) est, dans le cas actuel,

$$697=(\lambda+\lambda'+1)^2+(\lambda-\lambda')^2.$$

Le facteur $17=4^2+1^2$; le facteur $41=5^2+4^2$. Pour décomposer 697 en deux carrés u^2, v^2, il suffit de faire (**)

$$u+v\sqrt{-1}=\left(4+\sqrt{-1}\right)^{\theta}\left(4-\sqrt{-1}\right)^{1-\theta}\left(5+4\sqrt{-1}\right)^{\theta'}\left(5-4\sqrt{-1}\right)^{1-\theta'},$$

en attribuant à θ et θ' les valeurs 0, 1. On trouve ainsi

$$u=16,\ v=21;\qquad u=24,\ v=11;$$

puis

$$\lambda=18,\ \lambda'=2;\quad \lambda=2,\ \lambda'=18;\quad \lambda=17,\ \lambda'=6;\quad \lambda=6,\ \lambda'=17.$$

Aucune des valeurs de λ' n'a la forme 4μ ou la forme $4\mu-1$; donc (96) $P_{87}=-4=-2Q_{87}$.

3° L'équation (211) est, pour $n=87$:

$$2\,091=(6l\mp1)^2+2(6l'\mp1)^2.$$

Le premier membre admet *quatre* diviseurs de la forme $8\mu+1$ et *quatre* diviseurs de la forme $8\mu+3$. Conséquemment, le nombre des solutions est $\frac{4}{2}+\frac{4}{2}=4$ (***). En effet :

$$2\,091=45^2+2.11^2=57^2+2.19^2=29^2+2.25^2=13^2+2.31^2;$$

puis

$$l=7,\ l'=2;\quad l=6,\ l'=5;\quad l=5,\ l'=4;\quad l=2,\ l'=5.$$

Dans chacun de ces systèmes, l et l' sont de parités contraires; donc (96) $P_{87}=-4$.

(*) Le nombre $697=17.41$: il a donc quatre diviseurs, tous de la forme $8\mu+1$. D'après un théorème démontré par M. Genocchi (*Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 167), le nombre des solutions de l'équation considérée doit être $\frac{4}{2}$; ce qui est exact.

(**) Voir la Note de M. Genocchi.

(***) *Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 168. Ce nombre de solutions serait réduit, si les valeurs de l, l' n'étaient pas entières; circonstance qui ne se présente pas dans l'exemple considéré.

101. *Autre expression de* $(\alpha'\beta'^2 - \alpha'^2\beta')$. Des formules (56), (50), on conclut, à cause de $\varphi(n) = n_p + n_i$ (13, 2°) :

$$\beta' - \alpha' = 2\sum_0^\infty n_i \cdot q^{2n}.$$

De plus,

$$\alpha'\beta' = 1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - q^{48} - \cdots \quad (54)$$

Donc

$$\alpha'\beta'^2 - \alpha'^2\beta' = 2(1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots)\sum_0^\infty n_i \cdot q^{2n}. \quad [Ad.] \ (216)$$

102. *Remarques.* I. La comparaison avec les séries (213) ou (214) prouve que

$$Q_n = n_i - (n-2)_i - (n-4)_i + (n-10)_i + (n-14)_i - \cdots \quad (217)$$

II. Si l'on connaît le nombre des solutions de l'équation (215), on en pourra déduire, au moyen de la dernière formule, *combien l'inconnue* y *a de valeurs paires et de valeurs impaires* (*). [*Ad.*]

103. *Valeur de* $(\alpha'\beta'^2 + \alpha'^2\beta')$. Il est visible que

$$\alpha'\beta'^2 + \alpha'^2\beta' = 2(1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \cdots)\sum_0^\infty n_p \cdot q^{2n}. \quad [Ad.] \ (218)$$

104. *Vérification.* Soit $n = 72$. La formule (217) donne

$$Q_{72} = 72_i - 70_i - 68_i + 62_i + 58_i - 48_i - 42_i + 28_i + 20_i - 2_i;$$

ou, d'après la Table I :

$$Q_{72} = 18\,176 - 14\,964 - 12\,288 + 6\,697 + 4\,404 - 1\,455 - 713 + 111 + 52 - 1 = -1;$$

valeur déjà trouvée (99, II). [*Ad.*]

(*) Dans le Paragraphe VI, nous reviendrons sur ce sujet.