Werk

Titel: LIVRE I.

Jahr: 1872

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?129323659_0039|log36

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

LIVRE I.

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE PLANE.

TERMINOLOGIE ET NOTATIONS. Dans un précédent travail (*), nous avons donné le nom d'*Analogie* (dérivé du grec ἀνάλογος) à la relation qui exprime que deux fonctions sont entre elles dans un rapport constant pour toutes les valeurs des variables; nous avons appelé ces deux fonctions *analogiques*, et nous avons employé le signe ÷ pour désigner cette relation.

Ainsi, au lieu d'écrire :

$$F = kf, \quad F' = k'f',$$

relations dans lesquelles les lettres F, *f*, etc., désignent des fonctions de certaines variables; k, k', etc., des constantes, nous écrivons :

$$F \div f, \quad F' \div f',$$

et nous énonçons ces relations en disant que F est *analogique* à *f*, ou que F et *f* sont *analogiques*.

Le peu d'intérêt qu'offre la connaissance des rapports k, k' en géométrie supérieure, nous a décidé à les supprimer dans la notation comme dans le discours; et le rôle essentiel que l'*analogie* joue dans tout notre travail nous fait espérer qu'on voudra bien excuser ce néologisme.

Nous appellerons *polygones conjugués de* n *côtés inscrits à une courbe du* n^{me} *ordre*, deux polygones tels que chaque côté de l'un passe par l'un des points d'intersection de chaque côté de l'autre avec la courbe. Fig. I et III.

(*) *Bulletins de l'Académie*, 2me sér., t. XXVIII, n° 7.

De même nous appellerons *polygones conjugués de* n + 1 *côtés inscrits à une courbe du* n^me *ordre*, deux polygones tels que chaque côté de l'un passe par l'un des points d'intersection de chaque côté de l'autre, un seul excepté, avec la courbe; les *côtés opposés* dans ces deux polygones seront ceux qui n'auront pas de point commun sur la courbe.

Fig. II et V.

Ainsi, deux triangles conjugués inscrits à une conique sont, par exemple, deux triangles de côtés respectifs A, B, C, et a, b, c, tels que A passe par l'un des deux points d'intersection de b et c avec la conique; B par l'intersection de c et par l'une de celles de a; et enfin C par l'autre intersection de a et de b; et les côtés opposés dans ces deux triangles sont A et a, B et b, C et c, parce qu'ils ne se coupent pas deux à deux sur la courbe.

Pour tracer ces deux triangles, on commencera par former le premier au moyen de trois côtés A, B, C qui coupent chacun la courbe en deux points; le second se formera en joignant ces points deux à deux par des droites distinctes de A, B, C, ce qui pourra se faire de huit manières différentes.

Les deux triangles A, B, C; a, b, c forment évidemment un hexagone inscrit, mais on verra que la dénomination de triangles conjugués inscrits se prête immédiatement à une généralisation que ne comporte pas la dénomination d'hexagone inscrit.

Nous appellerons *polygones conjugués de* n *sommets circonscrits à une courbe de la* n^me *classe*, deux polygones circonscrits de n sommets, tels que chaque sommet de l'un soit le point de concours de n côtés de l'autre passant respectivement par les n sommets de celui-ci.

Fig. VI.

De même nous appellerons *polygones conjugués de* n + 1 *sommets circonscrits à une courbe de la* n^me *classe*, deux polygones circonscrits de n + 1 sommets, tels que chaque sommet de l'un soit le point de concours de n côtés passant respectivement par tous les sommets de l'autre, un seul excepté; les *sommets opposés* dans ces deux polygones seront deux sommets par lesquels ne passera pas un même côté.

Fig. VII.

Ainsi, deux triangles conjugués circonscrits à une conique se tracent en menant de chacun des trois points A, B, C deux tangentes à la conique; l'une des tangentes menées par A coupe l'une de celles menées par B en c; l'autre tangente menée par B coupe l'une de celles menées par C en a; enfin les deux

autres tangentes menées par C et A se coupent en *b*. Les sommets opposés sont A et *a*, B et *b*, C et *c*, parce qu'ils ne sont pas situés, deux à deux, sur l'un des côtés.

Ici encore, on voit qu'à un même triangle circonscrit ABC peuvent répondre huit triangles conjugués *abc*.

Les deux triangles ABC et *abc* forment évidemment un hexagone circonscrit; mais le même motif de généralisation que nous avons fait valoir plus haut nous oblige à rejeter cette dernière dénomination.

Nous justifierons les définitions qui précèdent par les théorèmes qui font l'objet de notre travail, et nous renverrons dès à présent le lecteur aux figures I à VII, où il verra des systèmes de triangles conjugués ABC et *abc*, et de quadrilatères conjugués ABCD et *abcd* inscrits à une courbe du troisième ordre (fig. I et II); de quadrilatères conjugués ABCD et *abcd* et de pentagones conjugués ABCDE et *abcde* inscrits à une courbe du quatrième ordre (fig. III et V); des systèmes de triangles (ou plutôt *trigones*) conjugués P, P′, O et I, II, III, et de quadrilatères (ou *tétragones*) conjugués O, I, II, III et O′, I′, II′, III′ circonscrits à une courbe de la troisième classe.

Nous insistons de nouveau sur la nécessité de se représenter ces systèmes de polygones conjugués comme pouvant être imaginaires dans certaines courbes; mais on comprend qu'il ne peut pas entrer dans notre plan de discuter, dans cette étude générale, tous les cas particuliers qui pourront se présenter; un lecteur familier avec la géométrie supérieure s'apercevra immédiatement que nos démonstrations sont applicables et aux cas réels et aux cas imaginaires.

CHAPITRE I.

COORDONNÉES RECTILIGNES PONCTUELLES.

ART. I. — *Théorèmes généraux.*

LEMME FONDAMENTAL. Représentons par δ_n la distance d'un point x, y à une droite $a_n x + b_n y + c_n = 0$; toute courbe du n^{me} ordre pourra se représenter par l'équation :

$$\delta_0 \delta_1 C_{n-2} = k \delta'_0 \delta'_1 \ldots \delta'_{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

dans laquelle les paramètres de δ_0 et de δ_1 sont donnés, tandis que ceux de $\delta'_0 \ldots\ldots \delta'_{n-1}$, et ceux de C_{n-2} qui représente une fonction complète du $(n-2)^{me}$ degré en x et y, sont à déterminer ainsi que k.

En effet, l'équation d'une courbe du n^{me} ordre renferme $\frac{n(n+3)}{2}$ paramètres, ce qui fournira un nombre égal d'équations; C_{n-2} renferme $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ paramètres à déterminer; le second membre de l'équation précédente en renferme $2n+1$; et l'on a identiquement :

$$\frac{n(n+3)}{2} = \frac{(n-2)(n+1)}{2} + 2n + 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

L'équation de la courbe étant vérifiée par chacune des équations $\delta_0 = 0$, $\delta_1 = 0$, $C_{n-2} = 0$, combinée avec l'une quelconque des équations $\delta' = 0$, il en résulte que chacune des lignes du premier système (qui sont deux droites données et une courbe du $(n-2)^{me}$ ordre), coupe chacune des droites $\delta' = 0$ du second système en tous points situés sur la courbe. On peut donc dire que les droites δ' sont des transversales qui unissent deux à deux les intersections des sécantes données δ_0 et δ_1 avec la courbe du n^{me} ordre, et que ces transversales vont recouper la courbe en d'autres points qui sont tous situés sur la ligne C_{n-2} (*).

(*) Nous dirons souvent pour abréger la droite δ ou la courbe C_n, au lieu de la droite $\delta = 0$ ou la courbe $C_n = 0$.

Nous sommes ainsi amené à l'énoncé suivant, qui a été donné d'une manière plus générale par Gergonne (*), sans qu'il indique toutefois la forme de l'équation (1) :

I. THÉORÈME FONDAMENTAL. *Soient données une courbe du* n^{me} *ordre et deux sécantes qui la coupent chacune en* n *points : si l'on joint les points d'intersection de la première à ceux de la seconde par* n *transversales qui ne partent pas deux à deux d'un même point de la courbe (ce qui peut se faire de*

(*) *Annales de mathématiques*, t. XVII. Nous n'insistons pas sur la démonstration précédente, parce que le lecteur pourra recourir, soit à celle de Gergonne, soit à la suivante, que nous devons à une obligeante communication de M. Clebsch, et qui est beaucoup plus générale et plus élégante que ces dernières.

Soit $f = 0$ l'équation d'une courbe du n^{me} ordre; δ_0 et δ_1 deux transversales de cette courbe.

Supposons d'abord qu'elles ne passent pas par un point de f; et soient $\delta'_0 \dots \delta'_{n-1}$ les sécantes qui relient deux à deux leurs points d'intersection avec la courbe.

La courbe $\varphi = f - k\delta'_0 \dots \delta'_{n-1} = 0$ a, avec chacune des droites δ_0 et δ_1, n points communs; mais on peut déterminer k de telle sorte que $\varphi = 0$ passe par le point (δ_0, δ_1) : alors φ a $n + 1$ points communs avec δ_0 et δ_1; donc elle les contient tout entières, et par suite

$$\varphi = \delta_0 \delta_1 C_{n-2},$$

d'où

$$f = \delta_0 \delta_1 C_{n-2} + k\delta'_0 \delta'_1 \dots \delta'_{n-1}.$$

Supposons en second lieu que (δ_0, δ_1) soit sur f, en un point simple, et que ni δ_0 ni δ_1 ne soient tangentes en ce point; alors l'une des sécantes $\delta'_0 \dots$ devra réunir les deux points de δ_0 et de δ_1 qui se sont confondus en ce point unique, sans quoi l'une d'entre elles coïnciderait avec δ_0 ou δ_1.

Soit donc δ_0 la tangente à f, en ce point; nous aurons :

$$\frac{d\delta'_0}{dx} = \mu \frac{df}{dx}; \quad \frac{d\delta'_0}{dy} = \mu \frac{df}{dy}.$$

Par suite, on pourra déterminer k de telle sorte qu'en ce point φ ait un point double; car, pour celui-ci, l'on doit avoir

$$\frac{df}{dx} - k \frac{d\delta'_0}{dx} \delta'_1 \dots \delta'_{n-1} = 0,$$

$$\frac{df}{dy} - k \frac{d\delta'_0}{dy} \delta'_1 \dots \delta'_{n-1} = 0,$$

d'où

$$k = \frac{1}{\mu \delta'_1 \dots \delta'_{n-1}}.$$

k étant ainsi déterminé, φ a de nouveau $n + 1$ points communs avec δ_0 et δ_1; donc, etc.

Le même procédé est applicable aux cas qui sont exclus de la démonstration précédente (1870).

$1.2...(n-1)$..... *manières différentes*), *ces* n *transversales couperont la courbe en* $n(n-2)$ *autres points dont le lieu sera de l'ordre* $n-2$.

Comme nous venons de le dire, il est géométriquement visible que l'équation de la courbe peut se mettre de $1.2.3.....(n-1)$ manières différentes sous la forme (1), puisqu'il existe le même nombre de systèmes de n transversales δ' reliant deux à deux les points d'intersection des sécantes δ_0 et δ_1 avec la courbe.

La démonstration purement analytique de cette propriété est moins aisée. On voit bien qu'en mettant l'équation (1) sous la forme

$$\begin{aligned}&(y+a_0x+b_0)(y+a_1x+b_1)(ky^{n-2}+k\gamma_0x^{n-2}+k\gamma_1y^{n-3}x+...)\\&-(y+\alpha_0x+\beta_0)(y+\alpha_1x+\beta_1)...(y+\alpha_{n-1}x+\beta_{n-1})=0,\end{aligned}$$

et en l'identifiant avec l'équation donnée,

$$y^n+A_0x^n+A_1y^{n-1}x+...=0$$

multipliée par $k-1$, si l'on considère k, $k\gamma_0$, $k\gamma_1$ ... α_0, β_0... comme inconnues, les équations qui les détermineront seront des degrés respectifs $1, 2, ... n$; on pourra donc en conclure que l'équation finale résultante sera en général du degré $1.2...n$, et que l'on aura par suite $1.2...n-1$ systèmes de n transversales δ'; mais il faut bien reconnaître que sans la considération géométrique qui précède, l'exactitude absolue de cette conclusion ne serait pas tout à fait hors de doute, à cause de la difficulté de la détermination du degré de l'équation finale résultant de ce système d'équations incomplètes.

Remarque. Ce lieu des nouvelles intersections des transversales avec la courbe, qui est de l'ordre $n-2$, sera en général une courbe de cet ordre; mais dans des cas particuliers il pourra se réduire à un ou plusieurs systèmes de droites et d'une courbe d'ordre moins élevé, ou à plusieurs courbes moins élevées, ce qui se reconnaîtra aux caractères suivants :

Si, parmi ces $n(n-2)$ points, il y en a $n-1$ distincts qui sont en ligne droite, le lieu se réduira à cette droite et à une courbe de l'ordre $(n-3)$.

Si $2n-3$ points distincts sont sur une conique, le lieu se réduira à cette conique et à une courbe du $(n-4)^{me}$ ordre, etc.

Si deux systèmes, l'un de $n-1$, l'autre de $n-2$ points distincts, sont en ligne droite, le lieu se réduira à ces deux droites et à une courbe de l'ordre $n-4$; et ainsi de suite.

Si $n-3$ systèmes de ces points, le premier de $n-1$, le deuxième de $n-2$, le troisième de $n-3$, etc, le $(n-3)^{me}$ de trois points distincts sont en ligne droite, le lieu se réduira à un système de $n-2$ droites. Or, ces $n-2$ droites, de même que les deux sécantes données, rencontrant les n transversales en tous points situés sur la courbe, nous voyons que nous aurons affaire, dans ce cas particulier très-remarquable, *à un système de deux polygones conjugués de* n *côtés inscrits à une courbe du* n^{me} *ordre,* c'est-à-dire *tels que chaque côté de l'un passe par l'un des points d'intersection de chacun des côtés de l'autre avec la courbe.* Fig. I et III.

Ce cas est possible pour toutes les courbes jusqu'au cinquième ordre inclusivement; au delà, il ne peut se réaliser que pour des courbes particulières.

En effet, il faut, dans ce cas, que l'équation puisse se mettre sous la forme

$$\delta_0\delta_1 \dots \delta_{n-1} = k\delta'_0 \dots \delta'_{n-1} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2),$$

équation qui renferme $4n+1$ paramètres à déterminer. Or, celle de la courbe en renferme $n\frac{(n+3)}{2}$; il faut donc que $4n+1$ soit au moins égal à $n\frac{(n+3)}{2}$, condition qui n'est pas remplie au delà de $n=5$ (*).

Pour les courbes des cinq premiers ordres, qui sont toutes réductibles à cette forme, ainsi que pour les courbes particulières d'ordres supérieurs qui y sont réductibles, nous pourrons énoncer ce théorème :

(*) Nous ferons voir dans l'*Addition* que, pour les courbes du quatrième et du cinquième ordre, qui sont, avec celles du deuxième et du troisième, les seules auxquelles tous les théorèmes de cette Première Partie soient applicables, il est toujours possible de mener deux sécantes telles que leurs transversales déterminent des systèmes multiples de polygones conjugués.

C'est à ces systèmes de polygones conjugués que s'appliquent le corollaire III ainsi que le théorème de Pascal qui en découle.

Nous prouverons au reste directement ce théorème dans l'*Addition*, et nous ferons en outre remarquer, dès à présent, que nous lui donnerons, dans cette même *Addition*, une généralité telle qu'il s'applique à toutes les courbes algébriques (1870).

II. Extension du théorème de Pappus. *Dans un système de deux polygones conjugués de* n *côtés inscrits à une courbe du* n^{me} *ordre, les produits des distances d'un point de la courbe aux côtés de chacun de ces polygones sont analogiques.*

Cas particulier. Un cas particulier du théorème fondamental est celui dans lequel on fait coïncider les deux sécantes primitives : dans ce cas les transversales qui relient les points d'intersection des deux sécantes deviennent des tangentes à la courbe, et l'on est conduit à cette propriété :

Corollaire. *Si, par les* n *points d'intersection d'une sécante avec une courbe du* n^{me} *ordre, on mène à celle-ci* n *tangentes, elles détermineront sur la courbe* $n(n-2)$ *points d'intersection dont le lieu sera de l'ordre* $(n-2)$.

Ce corollaire donne naturellement lieu aux mêmes cas particuliers que le théorème I; et entre autres au cas dans lequel le lieu de l'ordre $n-2$ se réduit à $n-2$ droites. On voit immédiatement que le théorème II s'énoncera, dans ce cas particulier très-remarquable :

Corollaire du théorème de Pappus. *Si les tangentes menées aux* n *points d'intersection d'une sécante avec une courbe du* n^{me} *ordre déterminent par leurs* $n(n-2)$ *intersections avec la courbe un système de* $n-2$ *transversales, le produit du carré de la distance d'un point quelconque de la courbe à cette sécante par ses distances aux transversales, et le produit de ses distances à toutes les tangentes, sont analogiques.*

Nous nous écarterions de notre but si nous déduisions du théorème de Pappus les autres corollaires auxquels il donne lieu, soit par la combinaison des différents systèmes de deux polygones conjugués inscrits de n côtés, qui sont, comme nous l'avons vu, au nombre de $1 . 2 ..... (n-1)$, ayant pour côtés communs les deux sécantes primitives, soit en faisant coïncider deux points d'intersection d'une même sécante, ce qui la transforme en une tangente.

Nous indiquerons plus bas quelques-unes de ces applications à des courbes d'un ordre déterminé; mais il est un point sur lequel nous devons fixer notre attention, parce que nous en partirons pour arriver au théorème de Pascal. C'est celui-ci :

III. Corollaire. *Lorsque, dans une courbe du* n^{me} *ordre, il existe des systèmes de deux polygones conjugués inscrits de* n *côtés, il existera également des systèmes de deux polygones conjugués inscrits de* $(n+1)$ *côtés* (*).

En effet, considérons un système de deux sécantes s et s' qui coupent la courbe en $0, 1, 2 \ldots (n-1)$; $0', 1', 2' \ldots (n'-1')$; et supposons que les transversales $(0, 0'), (1, 1'), (2, 2') \ldots (n-1, n'-1')$, que nous désignerons respectivement par $t_0, t_1, t_2 \ldots t_{n-1}$, déterminent par leurs nouvelles intersections avec la courbe $(n-2)$ systèmes de n points situés en ligne droite : $u_0, u_1, \ldots u_{n-3}$.

Nous aurons ainsi le système de polygones conjugués inscrits de n côtés

$$s, s', u_0 \ldots u_{n-3}; \quad t_0, t_1 \ldots t_{n-1}.$$

Si nous joignons actuellement les points $0 \ldots 0' \ldots$ par les $n-3$ transversales $t_0 \ldots t_{n-4}$, qui sont les mêmes que celles du système précédent, puis par $(n-3, n'-2')$, $(n-2, n'-1')$, $(n-1, n'-3')$, que nous appellerons T_{n-3}, T_{n-2}, T_{n-1}, ce nouveau système de transversales déterminera, par ses intersections avec la courbe, $n-2$ nouveaux systèmes de n points situés en ligne droite U_0, $U_1 \ldots U_{n-3}$, ainsi qu'il résulte de la remarque que nous avons faite au sujet de l'équation (2); de sorte que nous obtenons par ce moyen un nouveau système de polygones conjugués inscrits de n côtés

$$s, s', U_0, \ldots U_{n-3}; \quad t_0, \ldots t_{n-4}, T_{n-3}, T_{n-2}, T_{n-1}.$$

Ces deux systèmes de deux polygones conjugués inscrits de n côtés ont $n-1$ côtés communs, s, s', $t_0 \ldots t_{n-4}$; si nous ne tenons pas compte de ces côtés, les $2\{2n-(n-1)\}$ ou les $2(n+1)$ côtés restants formeront un système de deux polygones conjugués inscrits de $n+1$ côtés, *c.q.f.d.*

Mettons l'équation (2) sous la forme :

$$(y - a_0x - b_0) \ldots (y - a_{n-1}x - b_{n-1}) = k'(y - a'_0x - b'_0) \ldots (y - a'_{n-1}x - b'_{n-1});$$

et menons aux différentes droites $y - a_0 x - b_0 = 0$, etc., par un point

(*) Comme nous l'avons dit plus haut, nous prouverons dans l'*Addition* la possibilité de l'existence des polygones conjugués que nous considérons ici (1870).

x, y de la courbe, des parallèles qui coupent l'axe des Y à des distances représentées par les lettres γ_0 ....; ces parallèles auront des équations de la forme $y = a_0 x + \gamma_0$, etc.; d'où $y - a_0 x = \gamma_0$, et, par suite, l'équation précédente pourra s'écrire :

$$(\gamma_0 - b_0) \dots (\gamma_{n-1} - b_{n-1}) = k' (\gamma'_0 - b'_0) \dots (\gamma'_{n-1} - b'_{n-1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Remarquons maintenant que si, par le même point x, y de la courbe, nous menons une transversale D qui coupe les côtés $\delta_0 \dots \delta_{n-1}$, $\delta'_0 \dots \delta'_{n-1}$ des deux polygones conjugués inscrits en $O \dots O_{n-1}$, $O' \dots O'_{n-1}$ et la courbe en $M \dots M_{n-1}$, nous aurons des relations de la forme

$$\gamma_0 - b_0 = OM \cdot \frac{\sin(D, \delta_0)}{\sin(Y, \delta_0)}; \quad \gamma_1 - b_1 = O_1M \frac{\sin(D, \delta_1)}{\sin(Y, \delta_1)}, \text{ etc.;}$$

et par suite l'équation (3) s'écrira :

$$OM \dots O_{n-1}M \frac{\sin(D, \delta_0) \dots \sin(D, \delta_{n-1})}{\sin(Y, \delta_0) \dots \sin(Y, \delta_{n-1})} = k' \cdot O'M \dots O'_{n-1}M \frac{\sin(D, \delta'_0) \dots \sin(D, \delta'_{n-1})}{\sin(Y, \delta'_0) \dots \sin(Y, \delta'_{n-1})}.$$

Mais pour les autres points d'intersection $M_1 \dots M_{n-1}$ de la transversale avec la courbe, nous n'aurons qu'à changer dans cette relation M en $M_1 \dots M_{n-1}$; nous obtiendrons ainsi n relations de la même forme, d'où nous déduirons :

$$\frac{OM \cdot O_1M \dots O_{n-1}M}{O'M \cdot O'_1M \dots O'_{n-1}M} = \frac{OM_1 \cdot O_1M_1 \dots O_{n-1}M_1}{O'M_1 \cdot O'_1M_1 \dots O'_{n-1}M_1} = \dots = \frac{OM_{n-1} \cdot O_1M_{n-1} \dots O_{n-1}M_{n-1}}{O'M_{n-1} \cdot O'_1M_{n-1} \dots O'_{n-1}M_{n-1}} \quad (4).$$

Nous arrivons ainsi à une relation excessivement remarquable entre les $3n$ points d'intersection d'une transversale avec une courbe du n^{me} ordre et avec les $2n$ côtés d'un système de deux polygones conjugués inscrits.

Quand cette relation existe pour six points d'une droite, on dit que ces six points sont en involution. Nous sommes donc amené tout naturellement à étendre la même notion aux $3n$ points déterminés sur la transversale, et à dire que ces $3n$ points, qui satisfont à la relation (4), sont en involution.

Cette relation à n membres caractérise l'involution de $3n$ points, absolument comme la relation à deux membres

$$\frac{OM \cdot O_1M}{O'M \cdot O'_1M} = \frac{OM_1 \cdot O_1M_1}{O'M_1 \cdot O'_1M_1}$$

caractérise l'involution de $3 \times 2 = 6$ points.

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

IV. Extension du théorème de Desargues. *Lorsque l'on a un système de deux polygones conjugués de* n *côtés inscrits à une courbe du* n^{me} *ordre, une transversale quelconque rencontre les* 2n *côtés de ces polygones et la courbe en* 3n *points qui sont en involution* (*).

On voit clairement par là pourquoi l'involution de six points, la seule connue jusqu'à ce jour, est particulièrement, nous pourrions même dire exclusivement propre aux coniques, de même qu'elle l'est, comme nous le verrons, aux surfaces du second degré, et pourquoi elle doit être à peu près impuissante dans l'étude des courbes et des surfaces d'un degré supérieur.

On pourrait mettre la relation (4), comme celle de l'involution de six points, sous différentes formes; nous ne nous y arrêterons pas, et nous passerons immédiatement à l'extension du fameux théorème de Pascal sur les coniques aux courbes des troisième, quatrième et cinquième ordres.

Cette extension se fonde sur le lemme suivant :

Lemme algébrique. *Si l'on a une relation à* n + 1 *membres de la forme*

$$\frac{xx_1 \dots x_{n-1}}{x'x'_1 \dots x'_{n-1}} = \frac{(x+a)(x_1+a)\dots(x_{n-1}+a)}{(x'+a)(x'_1+a)\dots(x'_{n-1}+a)} = \dots = \frac{(x+a_{n-1})(x_1+a_{n-1})\dots(x_{n-1}+a_{n-1})}{(x'+a_{n-1})(x'_1+a_{n-1})\dots(x'_{n-1}+a_{n-1})}$$

dans laquelle a .... a_{n-1} *sont des constantes, chacun des termes des numérateurs sera respectivement égal à l'un des termes des dénominateurs.*

En effet, il est évident d'abord que si cette égalité existe, la relation sera satisfaite; d'autre part, que cette égalité peut donner lieu à $1.2\dots n$ solu-

(*) On trouvera dans l'*Addition* une généralisation beaucoup plus considérable encore de ce théorème (1870).

tions différentes : car on peut faire x égal à l'une des n valeurs x' ou x'_1 ..... ou x'_{n-1} ; puis x_1 à l'une quelconque de ces valeurs, sauf celle qu'on a prise pour x, ce qui en donne $n-1$; puis x_2 à l'une quelconque de ces mêmes valeurs, sauf les deux précédentes, ce qui en donne $n-2$, et ainsi de suite; ce qui fait qu'on aura en tout $n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$ solutions.

Si l'on démontre maintenant que la relation donnée n'en admet pas davantage, le lemme sera établi.

Or, cette relation peut se décomposer dans les équations suivantes, au nombre de n :

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x_1}\right)\cdots\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x_{n-1}}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x'}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x'_1}\right)\cdots\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x'_{n-1}}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{x_1}\right)\cdots\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{x_{n-1}}\right)=\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{x'}\right)\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{x'_1}\right)\cdots\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{x'_{n-1}}\right).$$

Nous les écrirons, en posant $\frac{1}{a}=\alpha$, $\frac{1}{x}=\xi$, etc. :

$$(\alpha+\xi)(\alpha+\xi_1)\ldots(\alpha+\xi_{n-1})=(\alpha+\xi')(\alpha+\xi'_1)\ldots(\alpha+\xi'_{n-1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\alpha_{n-1}+\xi)(\alpha_{n-1}+\xi')\ldots(\alpha_{n-1}+\xi_{n-1})=(\alpha_{n-1}+\xi')(\alpha_{n-1}+\xi'_1)\ldots(\alpha_{n-1}+\xi'_{n-1}).$$

On voit aisément que ce système de n équations du n^{me} degré peut se réduire à l'une d'entre elles et à $n-1$ équations du $(n-1)^{me}$ degré de la forme :

$$(\alpha-\alpha_1)\Sigma\xi_1\ldots\xi_{n-1}+(\alpha^2-\alpha_1^2)\Sigma\xi_2\ldots\xi_{n-2}+\ldots+(\alpha^{n-1}-\alpha_{n-1}^{n-1})\Sigma\xi=\text{etc.}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\alpha-\alpha_{n-1})\Sigma\,.\,\xi_1\ldots\xi_{n-1}+(\alpha^2-\alpha_{n-1}^2)\Sigma\xi_2\ldots\xi_{n-2}+\ldots+(\alpha^{n-1}-\alpha_{n-1}^{n-1})\Sigma\xi=\text{etc.}$$

Celles-ci à leur tour se réduiront à un système formé de l'une d'entre elles et de $n-2$ équations du $(n-2)^{me}$ degré, et ainsi de suite; de sorte que le système primitif se réduira à n équations, la première du n^{me} degré, la deuxième du $(n-1)^{me}$ degré, etc., la n^{me} du premier; et l'on voit que,

sons cette forme, elles ne peuvent admettre au plus que $1.2\ldots n$ solutions, *c.q.f.d.* (*).

V. Corollaire du théorème de Desargues. *Si deux systèmes de deux polygones conjugués de* n *côtés inscrits à une courbe du* n^{me} *ordre sont situés de telle manière que* $(n+1)$ *couples de côtés se coupent sur une même droite, les* $(n-1)$ *autres couples de côtés se couperont sur cette même droite* (**).

En effet, si nous désignons, comme plus haut, par $O\ldots O_{n-1}$; $O'\ldots O'_{n-1}$ les points d'intersection d'une transversale avec le premier système de polygones conjugués inscrits; de même par $P\ldots P_{n-1}$; $P'\ldots P'_{n-1}$ ceux de la même transversale avec le second système; par $M\ldots M_{n-1}$ ses points d'intersection avec la courbe, la relation (4), appliquée aux deux systèmes de polygones, s'écrira :

$$\frac{OM\ldots O_{n-1}M}{O'M\ldots O'_{n-1}M}=\cdots=\frac{OM_{n-1}\ldots O_{n-1}M_{n-1}}{O'M_{n-1}\ldots O'_{n-1}M_{n-1}};\quad\text{et}\quad\frac{PM\ldots P_{n-1}M}{P'M\ldots P'_{n-1}M}=\cdots=\frac{PM_{n-1}\ldots P_{n-1}M_{n-1}}{P'M_{n-1}\ldots P'_{n-1}M_{n-1}}.$$

Mais par hypothèse P, $P_1\ldots P_{n-1}$, P' coïncident respectivement avec

(*) A cette démonstration, qui n'est peut-être pas entièrement rigoureuse, on préférera certainement la suivante, que nous devons à une obligeante communication de M. Gilbert. Reprenons les équations qui expriment l'involution de $3n$ points, et considérons les deux fonctions de degré n en z :

$$\frac{(x+z)(x_1+z)\ldots(x_{n-1}+z)}{xx_1\ldots x_{n-1}}\quad\text{et}\quad\frac{(x'+z)(x'_1+z)\ldots(x'_{n-1}+z)}{x'x'_1\ldots x'_{n-1}}.$$

Elles sont égales pour $z=0$; elles sont en outre égales, en vertu des relations qui expriment l'involution, pour n autres valeurs $z=a$, $z=a_1$, $\ldots z=a_{n-1}$; or, on sait que deux fonctions entières de degré n qui sont égales pour $n+1$ valeurs de la variable sont identiques; donc nos deux fonctions le sont; et, par suite, les coefficients de z^n étant égaux, les dénominateurs le sont.

Quel que soit z, on a donc identiquement :

$$(x+z)(x_1+z)\ldots(x_{n-1}+z)=(x'+z)(x'_1+z)\ldots(x'_{n-1}+z).$$

Ces deux polygones identiques, égalés à zéro, donnent les mêmes racines pour z. Celles du premier sont

$$-x,\quad -x_1\ldots,\quad -x_n;$$

celles du second

$$-x',\quad -x'_1\ldots,\quad -x'_n;$$

le théorème est donc démontré (1870).

(**) Ce corollaire recevra, dans l'*Addition*, la même généralisation que le théorème (1870).

$O, O_1 \dots O_{n-1}, O'$; de sorte que les deux relations précédentes pourront s'écrire, en réunissant en un seul tous les facteurs communs :

$$\frac{C}{O'_1M \dots O'_{n-1}M} = \frac{C_1}{O'_1M_1 \dots O'_{n-1}M_1} = \dots = \frac{C_{n-1}}{O'_1M_{n-1} \dots O'_{n-1}M_{n-1}};$$

et

$$\frac{C}{P'_1M \dots P'_{n-1}M} = \frac{C_1}{P'_1M_1 \dots P'_{n-1}M_1} = \dots = \frac{C_{n-1}}{P'_1M_{n-1} \dots P'_{n-1}M_{n-1}};$$

d'où l'on tire :

$$\frac{O'_1M \dots O'_{n-1}M}{P'_1M \dots P'_{n-1}M} = \dots = \frac{O'_1M_{n-1} \dots O'_{n-1}M_{n-1}}{P'_1M_{n-1} \dots P'_{n-1}M_{n-1}}.$$

Si nous posons actuellement

$$O'_1M = x; \quad O'_2M = x_1 \dots O'_{n-1}M = x_{n-2}; \quad O'_1M = x + a \dots O'_{n-1}M = x + a_{n-2}, \text{ etc.};$$

et si nous employons les mêmes lettres, affectées d'accents, pour désigner les distances $P'M$....., ces relations deviendront :

$$\frac{xx_1 \dots x_{n-2}}{x'x'_1 \dots x'_{n-2}} = \frac{(x+a)(x_1+a)\dots(x_{n-2}+a)}{(x'+a)(x'_1+a)\dots(x'_{n-2}+a)} = \dots = \frac{(x+a_{n-2})(x_1+a_{n-2})\dots(x_{n-2}+a_{n-2})}{(x'+a_{n-2})(x'_1+a_{n-2})\dots(x'_{n-2}+a_{n-2})};$$

et l'on en conclura, en vertu du *lemme algébrique* qui précède, que chacun des x est respectivement égal à l'un des x' ; ou que chacun des points $P'_1 \dots P'_{n-1}$ coïncide respectivement avec l'un des points $O'_1 \dots O'_{n-1}$, *c. q. f. d.*

Remarque. Il est à remarquer que la démonstration suppose qu'aucun des points O ou P de la transversale ne coïncide avec l'un des points M où elle coupe la courbe, puisque le premier membre, dans ce cas, serait indéterminé.

Ce corollaire, combiné avec celui du théorème de Pappus (III), conduit de la manière la plus immédiate à l'extension du théorème de Pascal, que nous énoncerons sous cette forme :

VI. Extension du théorème de Pascal. *Dans un système de deux polygones conjugués de* n + 1 *côté sinscrits à une courbe du* n^me^ *ordre, les côtés opposés se coupent en* n + 1 points situés en ligne droite (*).

Fig. II et V.

(*) Ce théorème, comme celui de Desargues, sera généralisé beaucoup plus encore dans l'*Addition* (1870).

En effet, nous avons vu (II) qu'un système de deux polygones conjugés inscrits de $n+1$ côtés peut se décomposer en deux systèmes de deux polygones conjugués inscrits de n côtés ayant $n-1$ côtés communs. Or, si nous considérons la droite qui unit les points d'intersection de deux côtés du premier système avec les côtés opposés du second, cette droite coupera les $n-1$ côtés communs aux deux systèmes en $n-1$ points, lesquels, joints aux deux points d'intersection précédents, forment un système de $n+1$ points en ligne droite; nous pouvons donc dire que nous avons affaire à deux systèmes de polygones conjugués inscrits de n côtés, situés de telle manière que $n+1$ couples de côtés se coupent sur une même droite; il en résulte donc que les $n-1$ autres couples de côtés se couperont sur cette droite, *c. q. f. d.*

La remarque faite à la fin du corollaire précédent prouve que ce sont les points d'intersection de deux couples de côtés opposés qu'on doit unir par une droite pour pouvoir appliquer ce corollaire; pour la même raison, ce seront encore les autres couples de côtés *opposés seulement* qui se couperont sur cette droite, parce que les couples de côtés non opposés des deux polygones se coupent sur la courbe et que le corollaire n'est pas applicable à ce cas.

Tels sont les principaux théorèmes qui servent de fondement à la géométrie supérieure, si l'on y joint le théorème de Carnot, qui a déjà été démontrée analytiquement de la manière la plus générale (*). Avant d'en établir les corrélatifs, nous nous arrêterons quelques instants à l'application de ces théorèmes aux courbes des cinq premiers ordres, pour lesquelles seules elle est toujours possible, en nous bornant toutefois à ceux que nous croyons nouveaux.

Art. II. — *Coniques.*

Tous les théorèmes précédents sont connus pour ces courbes; toutefois celui de Pappus n'avait été donné que pour les deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit; il résulte immédiatement de notre énoncé général que ce théorème s'applique également aux deux diagonales, ou, en d'autres termes, à un quadrilatère complet.

(*) Nous nous occuperons, dans un autre chapitre, de la généralisation du théorème de Newton.

Cet énoncé devient en effet, pour les coniques, le suivant :

THÉORÈME DE PAPPUS GÉNÉRALISÉ. *Dans un système de deux polygones conjugués de deux côtés inscrits à une conique, les produits des distances d'un point de la courbe aux côtés des deux polygones sont analogiques.*

Si donc nous prenons sur une conique quatre points 0, 1, 2, 3, et que nous considérions comme côtés de nos deux polygones (0, 1) et (2, 3) pour le premier (0, 2) et (1, 3) pour le second, nous aurons, en appelant δ_0, δ_2, δ'_0, δ'_1 les distances d'un point de la conique à ces côtés :

$$\delta_0 \cdot \delta_2 \div \delta'_0 \cdot \delta'_1 .$$

Mais en considérant comme premier polygone (1, 2) et (3, 0); comme second (0, 2) et (1, 3), nous aurons de même :

$$\delta_1 \cdot \delta_3 \div \delta'_0 \cdot \delta'_1 ;$$

de ces deux analogies résulte :

$$\delta_0 \cdot \delta_2 \div \delta_1 \cdot \delta_3 \div \delta'_0 \cdot \delta'_1 ,$$

ce qui démontre le théorème.

Dans un précédent travail (*), nous avons déduit cette généralisation d'un corollaire du théorème particulier de Pappus, donné par M. Chasles dans son *Traité des coniques*, et nous en avons tiré quelques théorèmes très-généraux relatifs à des polygones inscrits à ces courbes; nous n'y reviendrons pas.

ART. III. — *Courbes du troisième ordre.*

Le théorème fondamental I, appliqué aux courbes du troisième ordre, s'énoncera :

THÉORÈME FONDAMENTAL. *Étant données deux sécantes qui coupent chacune en trois points une courbe du troisième ordre, si l'on joint les points*
Fig. I. *d'intersection de la première à ceux de la seconde par trois transversales qui ne partent pas d'un même point de la courbe, ces transversales couperont la courbe en trois points qui seront en ligne droite.*

(*) *Bulletins de l'Académie*, 2e sér., t. XXVIII, n° 7.

On peut faire coïncider les deux sécantes, auquel cas les droites qui unissent leurs points d'intersection deux à deux deviendront des tangentes, et l'on arrive à cette propriété connue :

PREMIER CAS PARTICULIER. *Si, aux trois points d'intersection d'une sécante avec une courbe du troisième ordre, on mène à celle-ci des tangentes, ces dernières couperont la courbe en trois points situés en ligne droite.*

Si les deux sécantes partent d'un même point de la courbe, on arrivera de même à cette autre propriété :

DEUXIÈME CAS PARTICULIER. *Si, par un point d'une courbe du troisième ordre, on lui mène une tangente et deux sécantes, la tangente et chaque système de transversales reliant entre eux les deux autres points d'intersection des deux sécantes, couperont la courbe en trois points qui seront en ligne droite.*

Le théorème II, appliqué aux courbes du troisième ordre, s'énoncera :

EXTENSION DU THÉORÈME DE PAPPUS. *Dans un système de deux triangles conjugués inscrits à une courbe du troisième ordre, les produits des distances d'un point quelconque de la courbe aux côtés de chacun de ces triangles sont analogiques.*

Ainsi, en désignant par δ_0, δ_1, δ_2 et δ'_0, δ'_1, δ'_2 les trois côtés des deux triangles conjugués qui forment un hexagone complet inscrit (*), c'est-à-dire dont les neuf sommets sont sur la courbe, nous aurons : Fig. I.

$$\delta_0 . \delta_1 . \delta_2 \doteq \delta'_0 . \delta'_1 . \delta'_2 .$$

Le lecteur appliquera aisément ce théorème aux deux cas particuliers mentionnés plus haut.

Il est à remarquer que deux sécantes quelconques δ_0 et δ_1, qui ne se coupent pas sur la courbe, donnent lieu à six systèmes distincts de triangles conjugués inscrits, puisqu'on peut joindre l'un des points d'intersection de

(*) Il vaudrait mieux dire avec Steiner un *sélatère* (Sechsseit), c'est-à-dire une figure formée de *six côtés*, en réservant le nom d'*hexagone* à une figure de *six sommets*. Nous attendrons que ces dénominations nouvelles soient consacrées par une autorité.

[Le lecteur voudra bien se rappeler que ce travail a été écrit avant la publication de la remarquable *Géométrie de direction* de M. P. Serret, qui emploie une autre terminologie, 1871].

la première à l'un quelconque des trois points de la seconde, puis le second point de la première à l'un quelconque des deux autres de la seconde; et enfin les deux troisièmes entre eux.

On voit par là qu'on pourra déduire différents corollaires des deux théorèmes précédents; en outre, on pourra les appliquer à des systèmes de polygones conjugués d'un nombre de côtés plus considérable.

Nous verrons un exemple remarquable de ces polygones conjugués inscrits dans le corollaire suivant; nous laisserons au lecteur le soin d'y appliquer le théorème de Pappus.

COROLLAIRE. *Dans une courbe du troisième ordre on peut inscrire un système de deux quadrilatères conjugués.*

Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de ce corollaire, qui n'est, du reste, autre chose que le corollaire plus général qui précède (IV), parce que nous aurons l'occasion d'y revenir dans le théorème de Pascal.

EXTENSION DU THÉORÈME DE DESARGUES. *Lorsque l'on a un système de deux triangles conjugués inscrits à une courbe du troisième ordre, une transversale quelconque rencontre les côtés de ces deux triangles et la courbe en trois séries de trois points qui sont en involution.*

Ce théorème n'est qu'un cas particulier de celui que nous avons donné sous le numéro III.

Nous pourrons faire sur ce théorème la même remarque que sur le précédent relativement aux corollaires qu'on en peut déduire; nous ne mentionnerons que les suivants :

COROLLAIRE. *Si deux systèmes de triangles conjugués inscrits à une courbe du troisième ordre sont tels que quatre couples de leurs côtés se coupent en quatre points situés en ligne droite, les deux autres couples de côtés se couperont sur cette droite.*

Ce corollaire résulte immédiatement de celui que nous avons donné sous le numéro IV, et l'on en déduit aisément le théorème de Pascal pour les courbes du troisième ordre :

EXTENSION DU THÉORÈME DE PASCAL. *Dans un système de deux quadrilatères conjugués inscrits à une courbe du troisième ordre, les côtés opposés se coupent en quatre points situés en ligne droite.*

Appelons A, B, C, D les quatre côtés du premier quadrilatère; a, b, c, d ceux du second, chaque côté du premier, tel que A, coupant les trois côtés non opposés du second b, c, d en trois points situés sur la courbe. Fig. II.

Nous pouvons décomposer la figure en deux systèmes de triangles conjugués inscrits, satisfaisant à la condition énoncée dans le corollaire précédent. En effet, si l'on joint le point d'intersection de B et c à celui de b et c par une droite auxiliaire e, les trois transversales a, d, e, qui s'appuient sur les deux sécantes B et C, rencontreront la courbe, en vertu du théorème fondamental, en trois points situés en ligne droite, et qui détermineront une nouvelle auxiliaire f. Actuellement, considérons les deux systèmes de triangles conjugués inscrits BCf et a, d, e; b, c, f et ADe; la droite qui unit les points d'intersection de A et a, B et b, coupe les côtés e et f communs aux deux systèmes de triangles conjugués; nous pourrons donc dire que quatre couples de côtés A et a, B et b, e et e, f et f se coupent sur cette droite; les deux autres couples C et c, D et d se coupent donc sur la même droite, $c.q.f.d.$ Dans la figure, ces quatre points sont désignés par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Art. IV. — *Courbes du quatrième ordre.*

Le théorème fondamental I, appliqué à ces courbes, s'énoncera :

Théorème fondamental. *Étant données deux sécantes qui coupent chacune en quatre points une courbe du quatrième ordre, si l'on joint les points d'intersection de la première à ceux de la seconde par quatre transversales qui ne partent pas deux à deux d'un même point de la courbe (ce qui peut se faire de* 1.2.3.4 *manières différentes), ces quatre transversales détermineront sur la courbe huit autres points qui seront situés sur une conique.*

Remarque. Si trois de ces nouveaux points sont en ligne droite, il est clair que la conique se réduira à un système de deux droites; or, il est aisé d'obtenir ce résultat (*). A cet effet, après avoir mené une sécante quelconque d, par deux de ses points d'intersection avec la courbe, on mènera deux Fig. III.

(*) Nous ne donnons que sous réserves cette construction, dont la généralité n'est pas suffisamment établie (1870).

transversales A et f se coupant en un point p de la courbe; la seconde sécante c unira deux des autres points d'intersection q et r de ces transversales; mais si l'on considère que p est un point double d'intersection de deux transversales avec la courbe, en le joignant à l'un des points d'intersection d'une autre transversale, on pourra dire qu'on a trois points d'intersection de trois transversales situés en ligne droite; et par conséquent, les quatre transversales A, B, C, D qui relient deux à deux les points d'intersection des sécantes, sans partir d'un même point de la courbe, détermineront sur celle-ci deux systèmes de quatre points en ligne droite; appelons ces deux droites a et b. Nous voyons que nous obtenons ainsi un système de deux quadrilatères conjugués inscrits *abcd* et ABCD; c'est-à-dire tels que chaque côté du premier passe par l'un des points d'intersection des quatre côtés de l'autre avec la courbe. Donc :

THÉORÈME. *Dans une courbe du quatrième ordre, il est toujours possible d'inscrire un système de deux quadrilatères conjugués (réels ou imaginaires)* (*).

CAS PARTICULIER. Si l'on fait coïncider les deux sécantes $\delta_0\,\delta_1$, l'un des systèmes de transversales se réduira à un système de tangentes, et le théorème fondamental s'énoncera :

THÉORÈME. *Étant donnée une sécante qui coupe une courbe du quatrième ordre en quatre points, si par ces points on mène à la courbe des tangentes, elles détermineront par leurs nouvelles intersections huit points qui seront en général situés sur une conique.*

Fig. IV. Pour des positions particulières de la sécante, cette conique pourra se réduire à un système de deux droites.

Si nous appliquons aux deux quadrilatères conjugués ABCD et *abcd*, le théorème de Pappus (II), en désignant par δ_0, δ_1, δ_2, δ_3 les distances d'un point quelconque de la courbe aux côtés du premier quadrilatère, et par les mêmes lettres affectées d'un accent, les distances de ce même point aux côtés du second, le théorème II nous donnera la relation :

$$\delta_0\delta_1\delta_2\delta_3 \doteq \delta'_0\delta'_1\delta'_2\delta'_3,$$

que l'on peut énoncer :

(*) Voir l'*Addition*.

THÉORÈME DE PAPPUS. *Si l'on inscrit à une courbe du quatrième ordre un système de deux quadrilatères conjugués, les produits des distances d'un point quelconque de la courbe aux quatre côtés de ces deux quadrilatères sont analogiques.*

CAS PARTICULIER DU THÉORÈME DE PAPPUS. Pour appliquer au cas particulier dont nous venons de parler le théorème de Pappus, il suffit, dans la relation qui précède, de regarder les δ comme les distances d'un point aux trois sécantes, et les δ' comme ses distances aux quatre tangentes, et de faire $\delta_0 = \delta_1$, puisque les deux premières coïncident; cette relation deviendra donc : Fig. IV.

$$\delta_0^2 \delta_2 \delta_3 \div \delta'_0 \delta'_1 \delta'_2 \delta'_3.$$

On pourrait déduire du théorème fondamental sur les quadrilatères conjugués et du théorème de Pappus une foule de corollaires, en combinant entre eux différents systèmes de ces quadrilatères; l'une des combinaisons les plus remarquables est celle qui conduit au théorème de Pascal, et qui se fonde sur le corollaire suivant, auquel le lecteur appliquera aisément le théorème de Pappus.

COROLLAIRE. *Dans une courbe du quatrième ordre, on peut inscrire un système de deux pentagones conjugués.*

Soient en effet deux sécantes g et k qui coupent la courbe en 0, 1, 2, 3 et en 0′, 1′, 2′, 3′ ; et dont les transversales déterminent des systèmes multiples de quadrilatères conjugués (*). Supposons que les droites 00′, 11′, 22′, 33′ que nous désignerons par f, A, B, C coupent la courbe en deux séries de quatre points situés en ligne droite ; appelons ces droites d et e. Fig. V.

On pourra unir 00′, 12′, 23′, 31′; et ces droites que nous appellerons f, c, a, b, détermineront également, par leurs intersections, deux droites D et E. On formera ainsi deux systèmes de deux quadrilatères conjugués :

1° *degk* et ABC*f*;

2° DE*gk* et *abcf*.

(*) Voir l'*Addition*.

En supprimant les côtés f, g, k communs à ces deux systèmes, on voit que ceux-ci se réduiront à

abcde et ABCDE,

ou à un système de deux pentagones conjugués inscrits, c'est-à-dire tels que chaque côté a du premier passe par l'un des points d'intersection des côtés non opposés B, C, D, E de l'autre avec la courbe.

Le théorème de Desargues, pour les courbes du quatrième ordre, s'énoncera :

EXTENSION DU THÉORÈME DE DESARGUES. *Lorsque l'on a un système de deux quadrilatères conjugués inscrits à une courbe du quatrième ordre, une transversale quelconque rencontre les huit côtés de ces quadrilatères et la courbe en douze points qui sont en involution* (*).

Parmi les nombreux corollaires de ce théorème, nous ne citerons que le suivant :

COROLLAIRE. *Si deux systèmes de deux quadrilatères conjugués inscrits à une courbe du quatrième ordre sont situés de telle manière que cinq couples de côtés se coupent sur une même droite, les trois autres couples de côtés se couperont deux à deux sur cette même droite.*

Les démonstrations générales que nous avons données de ces deux propositions nous dispensent d'y revenir; c'est sur le dernier corollaire et sur celui qui le précède que se fonde le théorème de Pascal :

EXTENSION DU THÉORÈME DE PASCAL. *Dans un système de deux pentagones conjugués inscrits à une courbe du quatrième ordre, les côtés opposés se coupent en cinq points situés en ligne droite.*

Fig. V. Nous avons vu, en effet, que les deux pentagones conjugués *abcde* et ABCDE peuvent se décomposer en deux systèmes de quadrilatères conjugués :

degk et ABC*f*,

DE*gk* et *abcf*

ayant trois côtés communs f, g, k.

Or, si nous joignons entre eux par une droite les points d'intersection α de

(*) Ce théorème et le suivant seront généralisés dans l'*Addition* (1870).

A et α, β de B et b, nous pourrons dire que cinq couples de côtés A et a, B et b, f et f, g et g, k et k se coupent en cinq points situés en ligne droite; les trois autres couples de côtés C et c, D et d, E et e se couperont donc en γ, δ, ε sur cette même droite.

Nous avons fait voir, dans la démonstration générale, que la proposition n'est applicable qu'aux intersections des côtés opposés.

Art. V. — *Courbes du cinquième ordre.*

Les développements dans lesquels nous sommes entré au sujet des courbes du troisième et du quatrième ordre, et qui sont déjà peut-être un peu longs, nous font croire que le lecteur, familiarisé maintenant avec l'application des théorèmes généraux, éprouverait quelque répugnance à nous suivre, si nous répétions ces mêmes développements pour les courbes du cinquième ordre.

Nous nous bornerons donc, en général, à l'énoncé des théorèmes fondamentaux, à part quelques éclaircissements que nous donnerons dans les propositions un peu difficiles.

Théorème fondamental. *Soit donnée une courbe du cinquième ordre, et deux sécantes qui la coupent chacune en cinq points; si l'on joint les points d'intersection de la première à ceux de la seconde par cinq transversales qui ne partent pas deux à deux d'un même point de la courbe (ce qui peut se faire de* 1 . 2 ... 5 *manières différentes), ces cinq transversales couperont la courbe en quinze autres points dont le lieu sera en général une courbe du troisième ordre.*

Le cas particulier le plus remarquable qu'offre ce théorème général se déduit de cette considération que si, parmi ces quinze points, il y en a deux systèmes, l'un de quatre, l'autre de trois points en ligne droite, le lieu des quinze points se réduira à un système de trois droites, et l'on pourra énoncer cette proposition :

Théorème. *Dans une courbe du cinquième ordre, on peut inscrire un système de deux pentagones conjugués (réels ou imaginaires)* (*).

(*) Voir l'*Addition*.

En faisant coïncider les deux sécantes primitives, nous arriverons à ce théorème :

THÉORÈME. *Si par les cinq points d'intersection d'une sécante avec une courbe du cinquième ordre, on mène à celle-ci des tangentes, elles couperont la courbe en quinze points qui seront situés en général sur une courbe du troisième ordre.*

Pour des positions particulières de la sécante, cette courbe du troisième ordre pourra se réduire à un système de trois droites.

Nous nous bornerons à l'énoncé analytique du théorème de Pappus pour les deux cas mentionnés dans les théorèmes précédents; en employant des notations analogues à celles dont nous avons fait usage plus haut, nous aurons, pour ces deux cas, les relations :

EXTENSION DU THÉORÈME DE PAPPUS :

$$\partial_0\partial_1\partial_2\partial_3\partial_4 \doteq \partial'_0\partial'_1\partial'_2\partial'_3\partial'_4.$$

CAS PARTICULIER :

$$\partial_0^2 \cdot \partial_2\partial_3\partial_4 \doteq \partial'_0\partial'_1\partial'_2\partial'_3\partial'_4.$$

Le théorème de Desargues que nous avons démontré d'une manière tout à fait générale, s'énoncera :

EXTENSION DU THÉORÈME DE DESARGUES. *Lorsqu'on a un système de deux pentagones conjugués inscrits à une courbe du cinquième ordre, une transversale quelconque rencontre les dix côtés de ces pentagones et la courbe en quinze points qui sont en involution* (*).

L'un des corollaires les plus importants de cette proposition capitale est le suivant, dont nous pouvons également omettre la démonstration :

COROLLAIRE. *Si deux systèmes de deux pentagones conjugués inscrits à une courbe du cinquième ordre, sont situés de telle manière que six couples de côtés se coupent sur une même droite, les quatre autres couples de côtés se couperont sur la même droite.*

Enfin ce corollaire, combiné avec le suivant, fournit la démonstration directe du théorème de Pascal pour les courbes du cinquième ordre :

(*) Ce théorème, de même que celui de Pascal, sera généralisé dans l'*Addition* (1870).

Soit un système de deux sécantes k et i rencontrant la courbe en 0, 1, 2, 3, 4, et en 0′, 1′, 2′, 3′, 4′ ; et supposons que les transversales

$$\begin{matrix} 00', & 11', & 22', & 33', & 44' \\ g, & h, & \text{A}, & \text{B}, & \text{C} \end{matrix}$$

que nous appellerons

coupent la courbe en trois séries d, e, f de cinq points situés en ligne droite.

Supposons de même que les transversales

$$\begin{matrix} 00', & 11', & 23', & 34', & 42', \\ g, & h, & c, & a, & b \end{matrix}$$

que nous appellerons

déterminent également sur la courbe trois séries D, E, F de cinq points situés en ligne droite (*).

Nous aurons ainsi deux systèmes de pentagones conjugués :

$$\begin{matrix} 1^{\circ}\ ghABC \text{ et } kidef; \\ 2^{\circ}\ ghabc \text{ et } ki\text{DEF}; \end{matrix}$$

et si nous supprimons les côtés g, h, k, i communs à ces deux systèmes, ceux-ci se réduiront à

$$abcdef \text{ et } \text{ABCDEF}$$

ou à *un système de deux hexagones conjugués inscrits*, c'est-à-dire *tels que chaque côté de l'un*, a, *passe par l'un des points d'intersection de chacun des côtés* B, C, D, E, F *de l'autre avec la courbe, un seul* A *excepté;* A et a *s'appellent pour cette raison côtés opposés.*

Ce système d'hexagones jouit de la propriété suivante :

Extension du théorème de Pascal. *Dans un système de deux hexagones conjugués inscrits à une courbe du cinquième ordre, les côtés opposés se coupent en six points situés en ligne droite.*

En effet, nous venons de voir que nos deux hexagones conjugués *abcdef*

(*) Voir l'*Addition*.

et ABCDEF se décomposent en deux systèmes de pentagones conjugués :

1° *ki*ABC et *ghdef*;

2° *kiabc* et *gh*DEF.

Or, ces deux systèmes sont situés de telle manière que la droite qui unit les points d'intersection α, β des côtés opposés A et a, B et b, coupe six couples de côtés opposés :

A et a, B et b, g et g, h et h, k et k, i et i,

en six points situés évidemment sur cette droite; donc, en vertu du corollaire précédent, les quatre autres couples de côtés opposés C et c, D et d, E et e, F et f se couperont également sur cette droite.

La démonstration générale que nous avons donnée de ce corollaire montre pourquoi les côtés opposés seuls jouissent de cette propriété.

Nous venons de déduire de la forme générale sous laquelle nous avons mis l'équation des courbes du n^{me} ordre l'extension des théorèmes de Pappus, de Desargues et de Pascal aux courbes algébriques jusqu'au cinquième ordre, et la discussion dans laquelle nous sommes entré au sujet des systèmes de polygones conjugués de l'ordre de la courbe a fait voir que, pour le troisième ordre, à deux sécantes arbitraires, correspondent 1 . 2 . 3 systèmes de triangles conjugués; que, pour le quatrième ordre, à une sécante arbitraire, correspondent 1 . 2 . 3 . 4 systèmes de quadrilatères conjugués; que pour le cinquième ordre enfin, il n'y a plus d'arbitraire, dans une sécante, que sa direction ou l'un de ses points.

Si nous voulions étendre les applications de nos théorèmes généraux au delà du cinquième ordre, elles seraient limitées, d'abord à des courbes tout à fait particulières et à un système unique de polygones conjugués du même ordre; ensuite, aux théorèmes de Pappus et de Desargues seulement; parce que, du moment où il n'existe qu'un seul système de polygones conjugués du n^{me} ordre, il ne peut pas en exister de l'ordre $n + 1$, ce qui est indispensable à l'application du théorème de Pascal.

C'est ainsi, par exemple, que pour les courbes du sixième ordre de la forme

$$\delta_0 \dots \delta_5 = k\delta'_0 \dots \delta'_5$$

il existe un système unique d'hexagones conjugués inscrits, auquel on peut appliquer les théorèmes de Desargues et de Pascal; mais, par cela même que ce système est unique, il n'existera pas de système d'eptagones conjugués inscrits.

Il n'y a en effet rien d'arbitraire dans l'équation précédente, qui est celle d'une courbe toute particulière, et l'équation générale des courbes du sixième ordre ne peut évidemment pas se mettre sous cette forme, puisqu'elle renferme vingt-sept paramètres, et qu'il n'y en a que vingt-cinq dans l'équation précédente.

A plus forte raison en est-il de même pour les courbes d'un ordre supérieur.

Nous ne pouvons donc pas mettre les équations générales des courbes d'un ordre supérieur au cinquième sous cette forme, qui nous a conduit à appliquer l'extension que nous avons donnée à l'idée de l'involution.

Par quoi faudra-t-il remplacer l'involution dans ces courbes? C'est là un problème qui mérite certainement de faire l'objet des efforts des géomètres, et sur lequel nous appelons leur attention (*).

Dans le chapitre suivant, nous rechercherons les théorèmes corrélatifs de ceux que nous venons d'établir.

(*) On verra dans l'*Addition* que nous avons réussi à appliquer l'involution, et par suite les théorèmes de Desargues et de Pascal, à toutes les courbes algébriques (1870).

CHAPITRE II.

COORDONNÉES RECTILIGNES TANGENTIELLES.

—

Quoique ce système de coordonnées ait été assez fréquemment mis en usage, nous croyons devoir en fixer le sens d'une manière précise, parce que nos idées sur ce sujet nous semblent différer, sous quelques rapports, de celles de certains auteurs modernes.

Soit $\Delta = LX + MY + N = 0$ l'équation d'une droite en coordonnées rectilignes x, y; L, M, N étant des fonctions linéaires de ces coordonnées de la forme $ax + by + c$, etc.; a, b, c représentant des constantes.

Pour que cette droite soit déterminée, il faut que X et Y le soient.

Or, la distance d'un point x, y à cette droite est $\delta = k(LX + MY + N)$, où k est une fonction connue de X et de Y. Si l'on se donne une relation $\delta_1 = \lambda \delta_2$, on saura seulement que le rapport des distances des points $Q_1(x_1, y_1)$ et $Q_2(x_2, y_2)$ à la droite Δ est égal à λ, ce qui a lieu pour toute droite Δ passant par un point P de la droite Q_1Q_2 tel que $\frac{PQ_1}{PQ_2} = \lambda$.

De même, si l'on se donne une relation $\delta_3 = \lambda' \delta_4$, on saura seulement que le rapport des distances des points $Q_3(x_3, y_3)$ et $Q_4(x_4, y_4)$ à la droite Δ est égal à λ', ce qui a lieu pour toute droite Δ passant par un point P′ de la droite Q_3Q_4 tel que $\frac{P'Q_3}{P'Q_4} = \lambda'$.

Mais si l'on se donne les deux relations simultanées

$$\delta_1 = \lambda \delta_2, \quad \delta_3 = \lambda' \delta_4,$$

puisque la première convient à toutes les droites qui passent par P, la seconde à toutes celles qui passent par P′, il est évident que ces deux relations simultanées détermineront la droite PP′; et en effet elles peuvent être regardées comme deux équations à deux inconnues X et Y, et suffisent par conséquent pour déterminer celles-ci.

Nous pourrons appeler ces dernières les *coordonnées tangentielles* de la

droite Δ, quoiqu'il fût plus exact d'employer une autre dénomination, telle que celle de *déterminantes tangentielles*, puisque, à proprement parler, X et Y ne sont pas des coordonnées. Nous dirons aussi que $\Delta = 0$ est l'équation de la droite Δ en coordonnées tangentielles, les valeurs de ces coordonnées X et Y étant supposées connues.

Actuellement, si nous ne donnons entre X et Y qu'une seule relation, $F(X, Y) = 0$, il est clair que la droite Δ pourra occuper une infinité de positions différentes ; l'enveloppe de toutes ces positions sera une courbe dont il nous sera permis de regarder $F(X, Y) = 0$ comme l'équation en coordonnées tangentielles, et dont on trouvera l'équation en coordonnées rectilignes par la méthode connue des enveloppes.

Mais, sans qu'il soit nécessaire de rechercher cette équation, on peut affirmer que si $F(X, Y)$ est du n^{me} degré en X et Y, la courbe sera de la n^{me} classe, c'est-à-dire que, par un point, on pourra en général lui mener n tangentes.

En effet, nous savons que $\Delta = 0$ est l'équation d'une tangente déterminée par un système de valeurs de X et Y satisfaisant à $F(X, Y) = 0$. Pour que cette tangente passe pour un point x', y' il faudra que la relation $\Delta' = 0$ soit satisfaite, Δ' étant ce que devient Δ si l'on y change x *et* y en x' *et* y'.

Or, de ces deux relations $\Delta' = 0$ et $F(X, Y) = 0$, la première est du premier degré, la seconde du n^{me} en X et Y ; elles donneront par conséquent en général n systèmes de valeurs pour ces inconnues, et par suite n tangentes passant par x', y', *c. q. f. d.*

Art. I. — *Théorèmes généraux.*

Cette nouvelle forme $F(X, Y) = 0$ de l'équation des courbes planes va nous permettre d'établir, parallèlement aux théorèmes que nous avons démontrés pour les courbes du n^{me} ordre, les théorèmes corrélatifs pour celles de la n^{me} classe.

Lemme fondamental. *Représentons par* Δ_n *une fonction de la forme*

$$(ax_n + by_n + c)X + (a'x_n + b'y_n + c')Y + a''x_n + b''y_n + c''$$

dans laquelle a, b, c, etc., *sont des constantes*; x_n, y_n *les coordonnées rectilignes d'un point* P_n; X, Y, *des coordonnées tangentielles; toute courbe de la* n^{me} *classe pourra se représenter par l'équation*

$$\Delta_0\Delta_1 C_{n-2} = k\Delta'_0\Delta'_1 \ldots \Delta'_{n-1},$$

dans laquelle les paramètres x_0, y_0, x_1, y_1 *de* Δ_0 *et* Δ_1 *sont donnés, tandis que* x'_0, y'_0, etc., *sont à déterminer, ainsi que* k *et les* $(n-2)(n+1)$ *paramètres de la fonction* C_{n-2} *qui est du* $(n-2)^{me}$ *degré en* X *et* Y.

En effet, l'équation d'une courbe de la n^{me} classe, étant du n^{me} degré en X et Y, renferme $n\frac{(n+3)}{2}$ paramètres, ce qui fournira un nombre égal d'équations; et l'équation précédente renferme

$$\frac{(n-2)(n+1)}{2} + 2n + 1 = \frac{n(n+3)}{2}$$

paramètres à déterminer, *c. q. f. d.*

L'équation de la courbe étant satisfaite par chacune des équations $\Delta_0 = 0$, $\Delta_1 = 0$, $C_{n-2} = 0$ combinée avec l'une quelconque des équations $\Delta' = 0$, il en résulte :

1° Que chacune des droites $P_0P'_0$, $P_0P'_1$...., $P_1P'_0$, $P_1P'_1$ .... déterminées par les équations simultanées $\Delta_0 = 0$ et $\Delta'_0 = 0$; $\Delta_0 = 0$ et $\Delta'_1 = 0$, etc.; $\Delta_1 = 0$ et $\Delta'_0 = 0$; $\Delta_1 = 0$ et $\Delta'_1 = 0$, etc., sont des tangentes à cette courbe;

2° Que les tangentes menées par P'_0 .... P'_{n-1} à la courbe $Cn - 2 = 0$ sont en même temps tangentes à la courbe donnée; et, en effet, les deux équations simultanées $\Delta'_0 = 0$ et $C_{n-2} = 0$ déterminent les tangentes menées par P'_0 à la courbe $C_{n-2} = 0$; et ces deux équations satisfont identiquement à celle de la courbe donnée. Il revient au même de dire que les tangentes menées par P'_0 .... P'_{n-1} à la courbe donnée, sont également tangentes à la courbe $C_{n-2} = 0$.

Or, si nous observons que ces dernières tangentes passent par les points d'intersection P'_0 .... P'_{n-1} des premières tangentes $P_0P'_0$ et $P_1P'_0$, etc., deux à deux, et que celles-ci sont menées, les unes par le point P_0, les autres par

le point P_1, nous pourrons déduire du lemme fondamental l'énoncé suivant :

I'. Théorème fondamental. *Si de chacun de deux points on mène les* n *tangentes à une courbe de la* n^{me} *classe, et que par chacun des* n *points d'intersection d'une tangente du premier système avec une tangente du second (ce qui peut présenter* 1.2.... n *combinaisons différentes), on mène les* $n-2$ *autres tangentes à la courbe, ces* $n(n-2)$ *tangentes envelopperont une courbe de la* $(n-2)^{me}$ *classe.*

Remarque. Dans des cas particuliers, cette courbe pourra se réduire à un ou plusieurs systèmes de points et d'une courbe de classe moins élevée, ou à plusieurs courbes moins élevées; nous n'examinerons, parmi ces cas, que le plus intéressant, celui dans lequel cette courbe se réduit à un système de $n-2$ points, c'est-à-dire le cas où les $n(n-2)$ tangentes se groupent en $n-2$ systèmes de n tangentes concourant en un même point; et il suffit pour cela que $n-3$ systèmes, le premier de $n-1$ tangentes, le second de $n-2$, etc., le $(n-3)^{me}$ de 3 tangentes, concourent respectivement en $n-3$ points.

Dans ce cas, par chacun de ces $n-2$ points, comme par chacun des deux points donnés, passent n tangentes à la courbe; or, ces tangentes qui concourent, par hypothèse, au nombre de n, en $n-2$ points, ont été menées par les n points d'intersection, deux à deux, des tangentes des deux premiers systèmes, et il va de soi que ces deux premiers systèmes passent aussi par ces n points; de sorte que nous avons deux systèmes de n points tels, que chaque droite qui relie un point du premier système à un point du second est tangente à la courbe, ou bien *un système de deux polygones conjugués de* n *sommets circonscrits à la courbe.* Fig. VI.

Ce cas est possible pour toutes les courbes jusqu'à la cinquième classe inclusivement; au delà il ne peut se réaliser que pour des courbes particulières. Nous croyons inutile de répéter la démonstration que nous avons donnée de la propriété similaire pour les courbes du n^{me} ordre, et à laquelle il n'y a pas un mot à changer pour l'appliquer ici (*).

(*) Après avoir établi, dans l'*Addition*, l'existence des polygones conjugués dans les courbes des cinq premiers ordres, nous ne reviendrons pas sur les propriétés corrélatives des courbes des cinq premières classes, propriétés qui résultent à l'évidence du principe de dualité (1870).

L'équation d'une courbe de la n^{me} classe pourra se réduire, dans ce cas, à la forme :

$$\Delta_0 \dots \Delta_{n-1} = k\Delta'_0 \dots \Delta'_{n-1};$$

et nous pourrons, en vertu de la remarque précédente, l'énoncer de cette manière :

II'. Extension du théorème corrélatif de celui de Pappus. *Dans un système de deux polygones conjugués de* n *sommets circonscrits à une courbe de la* n^{me} *classe, les produits des distances d'une tangente quelconque aux sommets de ces deux polygones sont analogiques.*

Cas particulier. Si nous appliquons le théorème fondamental I' au cas particulier où les deux points primitifs coïncident, il est clair qu'alors les points d'intersection des couples de tangentes vont se confondre avec les points de contact de celles-ci; car à mesure que les deux points se rapprochent, les points de contact des deux tangentes menées de ces points à la même branche de la courbe, vont se rapprocher également, et entre eux, et du point d'intersection de ces tangentes; de sorte qu'à la limite, ces trois points coïncideront dans le point unique de contact. Ceci admis, le théorème fondamental aura pour corollaire :

Corollaire. *Si d'un point on mène les* n *tangentes à une courbe de la* n^{me} *classe, et par les points de contact de chacune de celles-ci les* $n-2$ *autres tangentes à la courbe, ces* $n(n-2)$ *nouvelles tangentes envelopperont une courbe de la* $(n-2)^{me}$ *classe.*

Cette courbe pourra se réduire à un système de points et d'une courbe de classe moindre; le cas le plus remarquable est celui où elle se réduit à un système de $(n-2)$ points; alors on peut appliquer le théorème II' qui s'énoncera :

Corollaire. *Si d'un point on mène* n *tangentes à une courbe de la* n^{me} *classe, et que les* $n-2$ *autres tangentes menées par les points de contact de chacune de celles-ci concourent,* n *à* n, *en* $n-2$ *points, le produit du carré de la distance d'une tangente quelconque au point donné par ses distances à ces* $n-2$ *points, et le produit de ses distances aux* n *points de contact, sont analogiques.*

Parmi les nombreux corollaires que l'on peut encore déduire des deux théorèmes précédents, nous n'examinerons que le plus essentiel, celui qui doit nous conduire à l'extension du théorème de Brianchon.

III'. Corollaire. *Lorsque, dans une courbe de la* n^{me} *classe, il existe des systèmes multiples de deux polygones conjugués circonscrits de* n *sommets, il existera également des systèmes de deux polygones conjugués circonscrits de* n + 1 *sommets.*

En effet, par chacun des deux points P et P' soient menées n tangentes à la courbe; désignons ces tangentes par $0, 1, \ldots (n-1); 0', 1', \ldots (n-1)'$; et supposons que les $n-2$ nouvelles tangentes menées par chacun des points d'intersection $(0, 0') = i_0, (1, 1') = i_1, \ldots (n-1, n'-1') = i_{n-1}$ se groupent en $n-2$ systèmes de n tangentes concourant en $n-2$ points $q_0, q_1 \cdots q_{n-3}$.

Si, actuellement, nous menons les $n-2$ nouvelles tangentes par chacun des $n-3$ points $i_0 \ldots i_{n-4}$ précédents, et en outre par les trois points $(n-3, n'-2')$, $(n-2, n'-1')$, $(n-1, n'-3')$ que nous appellerons I_{n-3}, I_{n-2}, et I_{n-1}; toutes ces tangentes vont, en vertu de la remarque précédente, se grouper également en $n-2$ systèmes de n tangentes concourant en $n-2$ points $Q_0, Q_1 \ldots Q_{n-3}$; nous aurons ainsi les deux systèmes de deux polygones conjugués circonscrits de n sommets

$$P, P', i_0 \ldots i_{n-4}, i_{n-3}, i_{n-2}, i_{n-1}; \quad q_0, q_1 \cdots q_{n-3},$$

ce qui donne en tout $2n$ sommets; et

$$P, P', i_0 \ldots i_{n-4}, I_{n-3}, I_{n-2}, I_{n-1}; \quad Q_0, Q_1 \ldots Q_{n-3},$$

ce qui donne également $2n$ sommets.

Ces deux systèmes de deux polygones conjugués circonscrits de n sommets ont les $n-1$ premiers sommets communs P, P', $i_0 \ldots i_{n-4}$; et si nous ne tenons pas compte de ces sommets, les $2\{2n-(n-1)\}$ ou les $2(n+1)$ sommets restants formeront un système de deux polygones conjugués circonscrits de $n+1$ sommets, c'est-à-dire de deux polygones de $n+1$ sommets, tels que chaque sommet de l'un soit le point de concours de n tan-

gentes menées par chacun des sommets de l'autre, un seul excepté ; *c. q. f. d.*

Le théorème II′ peut se mettre sous une autre forme qui rendra manifeste l'extension du théorème corrélatif de celui de Desargues.

Soit donné un système de deux polygones conjugués de n sommets circonscrits à une courbe de la n^{me} classe; désignons par $0, 1, \ldots . n-1$ et par $0', 1' \ldots . n'-1'$ les sommets de ces deux polygones.

D'un point S menons à la courbe n tangentes $t, t', \ldots . t^{(n-1)}$; appelons

$\Delta_0 \ldots \Delta_{n-1}$ les distances des sommets $0 \ldots n-1$ à t; etc.,
$\Delta_0^{(n-1)} \ldots \Delta_{n-1}^{(n-1)}$ les distances de ces sommets à t_{n-1};
$s_0 \ldots s_{n-1}$ les distances de ces sommets au point S;

employons les mêmes notations, en affectant les indices d'accents, pour désigner les mêmes distances comptées dans le second polygone $0' \ldots n'-1'$; enfin représentons par (t, s_0), etc., l'angle de la tangente t avec la droite s_0 qui unit le point S au sommet 0, etc.

Il est évident que nous aurons :

$$\Delta_0 = s_0 \sin(t, s_0) \ldots \Delta_0^{(n-1)} = s_0 \sin(t^{(n-1)}, s_0)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta_{n-1} = s_{n-1} \sin(t, s_{n-1}) \ldots \Delta_{n-1}^{(n-1)} = s_{n-1} \sin(t^{(n-1)}, s_{n-1});$$

et que les mêmes relations existent pour le second polygone, et s'écriraient en accentuant les indices.

Or, en vertu du théorème II′, l'équation de la courbe peut s'écrire :

$$\Delta_0 \ldots \Delta_{n-1} = k \Delta_{0'} \ldots \Delta_{n'-1'},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta_0^{(n-1)} \Delta_{n-1}^{(n-1)} = k \Delta_{0'}^{(n-1)} \Delta_{n'-1'}^{(n-1)}.$$

Si, dans ces n relations, nous substituons aux Δ leurs valeurs précédentes, et que nous égalions entre elles les n valeurs que ces relations donnent pour k, les facteurs s disparaîtront au numérateur et au dénominateur, et nous aurons :

$$\frac{\sin(t, s_0) \ldots \sin(t, s_{n-1})}{\sin(t, s_{0'}) \ldots \sin(t, s_{n'-1'})} = \ldots\ldots = \frac{\sin(t^{(n-1)}, s_0) \ldots \sin(t^{(n-1)}, s^{n-1})}{\sin(t^{n-1}, s_{0'}) \ldots \sin(t^{n-1}, s^{n'-1'})} \quad \ldots \quad (4').$$

Nous avons trouvé dans le chapitre des coordonnées rectilignes une rela-

tion de la même forme relative à $3n$ points, et nous avons été amené, par une généralisation toute naturelle, à donner à cette propriété le nom d'involution.

De même, nous dirons que la relation précédente, à n membres, caractérise l'involution de $3n$ droites, et que ces $3n$ droites sont en involution.

Nous pourrons donc énoncer ce théorème :

IV'. Extension du théorème corrélatif de celui de Desargues. *Lorsque l'on a un système de deux polygones conjugués de* n *sommets circonscrits à une courbe de la* n^{me} *classe, si d'un point on mène à cette courbe* n *tangentes et les* 2n *droites qui aboutissent aux sommets de ces deux polygones, ces* 3n *droites seront en involution* (*).

Ce théorème montre pourquoi l'involution de six droites, de même que celle de six points, ne peut avoir de puissance que dans la théorie des coniques, tandis que pour les autres courbes, il était nécessaire de donner à cette notion de l'involution l'extension à laquelle nous sommes arrivé dans les théorèmes IV et IV'.

Nous ne nous arrêterons pas aux différentes formes sous lesquelles on peut mettre la relation $(4')$ qui exprime l'involution de $3n$ droites, et nous passerons immédiatement à l'extension du théorème de Brianchon aux courbes de la n^{me} classe, extension qui se fonde sur le corollaire suivant :

V'. Corollaire du théorème corrélatif de celui de Desargues. *Si deux systèmes de deux polygones conjugués de* n *sommets circonscrits à une courbe du* n^{e} *ordre, sont situés de telle manière que les droites qui relient* $(n+1)$ *couples de sommets concourent en un même point, les droites qui relieront les* $(n-1)$ *autres couples de sommets concourront en ce même point.*

Désignons par $0 \dots n-1$, $0' \dots n'-1'$; $0 \dots N-1$, $0' \dots N'-1'$, les sommets des deux systèmes de polygones conjugués circonscrits; supposons que les droites 00, $11 \dots (n-1, N-1)$ et $0'0'$ concourent en un point S.

De ce point menons n tangentes à la courbe, et $2n$ droites

$$s_0 \dots s_{n-1},\ s_{0'} \dots s_{n'-1'};\ S_0 \dots S_{n-1},\ S_{0'} \dots S_{n'-1'}$$

aboutissant aux $2n$ sommets des deux polygones.

(*) Nous énoncerons ce théorème sous une forme plus générale encore dans l'*Addition* (1870).

Par hypothèse $s_0 \ldots s_{n-1}$ et $s_{0'}$ coïncident respectivement avec $S_0 \ldots S_{n-1}$ et $S_{0'}$. Il en résulte que si nous appliquons le théorème IV′ à nos deux systèmes de polygones conjugués, et que nous divisions membre à membre les deux relations à n membres fournies par ce théorème, nous obtiendrons les relations plus simples :

$$\frac{\sin(t, s_{1'}) \ldots \sin(t, s_{n'-1'})}{\sin(t, S_{1'}) \ldots \sin(t, S_{n'-1'})} = \ldots = \frac{\sin(t^{(n-1)}, s_{1'}) \ldots \sin(t^{(n-1)}, s_{n'-1'})}{\sin(t^{(n-1)}, S_{1'}) \ldots \sin(t^{(n-1)}, S_{n'-1'})}.$$

Il est aisé de conclure de là, en vertu d'un lemme algébrique analogue à à celui que nous avons démontré plus haut, que chacun des s doit se confondre respectivement avec l'un des S; ainsi, par exemple, que $s_{1'}$ coïncide avec $S_{1'}$; autrement dit les droites qui unissent le point S aux sommets $1'$ et $1'$ des deux polygones se confondent, ou bien la droite $1'1'$ passe par S; et de même des autres, *c. q. f. d.*

Remarque. Il est à remarquer que la démonstration suppose qu'aucune des tangentes menées par S à la courbe, ne se confond avec l'une des droites qui unissent ce point S aux sommets des deux polygones, puisque, dans ce cas, le premier membre des relations précédentes deviendrait indéterminé.

En combinant les deux corollaires III′ et V′ on arrive immédiatement à l'extension du théorème de Brianchon, que nous énoncerons sous cette forme :

VI′. Extension du théorème de Brianchon. *Dans un système de deux polygones conjugués de* $n+1$ *sommets circonscrits à une courbe de la* n^{me} *classe, les droites qui relient les sommets opposés concourent en un même point* (*).

Fig. VII.

En effet, en vertu du théorème II′, un système de deux polygones conjugués circonscrits de $n+1$ sommets peut se décomposer en deux systèmes de deux polygones conjugués circonscrits de n sommets, ayant $n-1$ sommets communs. Or, si nous considérons les droites qui relient respectivement deux sommets du premier de ces polygones aux sommets opposés du

(*) Ce théorème recevra, dans l'*Addition*, la même généralisation que le précédent.

second, ces deux droites se couperont en un point par lequel nous pouvons faire passer les droites qui unissent entre eux les $n-1$ sommets communs aux deux polygones, puisque, ces sommets coïncidant, la droite qui les unit est entièrement indéterminée. Nous pouvons donc dire que les droites qui unissent $n+1$ couples de sommets opposés (les deux premiers et les $n-1$ sommets coïncidants) concourent en un même point; et par le corollaire V′ on voit que les droites qui unissent les $n-1$ autres couples de sommets opposés, concourront en ce même point, *c.q.f.d.*

En vertu de la remarque que nous avons faite plus haut, ce sont les droites unissant les sommets opposés seulement qui concourent en un même point; car celles qui uniraient deux sommets non opposés seraient tangentes à la courbe, et, dans ce cas, le corollaire V′ ne serait pas applicable.

Les théorèmes que nous venons de démontrer sont tous des corrélatifs de ceux que nous avons établis dans le chapitre des coordonnées rectilignes, et ils forment avec ceux-ci et les théorèmes de Carnot et de Newton (*), la base de la géométrie supérieure. Nous aurions pu déduire ces théorèmes corrélatifs du principe de dualité; nous avons préféré les démontrer directement, afin de donner pour base commune à tous nos théorèmes les principes élémentaires de la géométrie analytique.

Nous allons, en quelques mots, reprendre ces derniers théorèmes pour les courbes des cinq premières classes, auxquelles, comme nous le savons, ils sont toujours applicables.

Art. II. — *Coniques.*

Tous ces théorèmes sont connus pour les coniques; toutefois, le corrélatif de celui de Pappus n'avait été donné que pour les deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit; l'énoncé du théorème II′ montre immédiatement que la même propriété existe relativement au troisième couple de sommets opposés du quadrilatère complet. Nous ne nous arrête-

(*) Nous avons dit plus haut pourquoi nous avons cru inutile de démontrer le théorème de Carnot; la même raison nous fait omettre son corrélatif; quant au théorème de Newton, nous le démontrerons plus loin, en faisant usage d'un autre système de coordonnées.

rons pas davantage sur ce sujet, qui a déjà donné lieu, comme nous l'avons dit à propos du théorème de Pappus, à un travail antérieur de notre part.

Le théorème de Brianchon, pour pouvoir se généraliser aisément, doit s'énoncer comme l'indique le théorème VI′ :

Théorème de Brianchon. *Dans un système de deux triangles conjugués circonscrits à une conique, les droites qui unissent les sommets opposés concourent en un même point.*

Art. III. — *Courbes de la troisième classe.*

Le théorème I′ s'énoncera, pour ces courbes :

Théorème fondamental. *Si de deux points on mène deux systèmes de*
Fig. VI. *trois tangentes à une courbe de la troisième classe, et que par chacun des points d'intersection d'une tangente du premier système avec une tangente du second, on mène à la courbe une nouvelle tangente, les trois nouvelles tangentes concourront en un même point.*

On voit que nous obtenons ainsi un système de deux triangles conjugués de sommets P, P′, O et I, II, III, tels que les trois tangentes menées par l'un des sommets du premier passent respectivement par les trois sommets du second.

De plus, on peut arriver de six manières différentes à deux systèmes semblables, en partant des deux mêmes points P et P′. Car, au lieu de prendre les intersections des tangentes 1 et 1′, 2 et 2′, 3 et 3′ pour sommets du triangle conjugué, on peut combiner chacune des tangentes 1, 2 ou 3 avec chacune des tangentes 1′, 2′ ou 3′, ce qui peut se faire de six manières.

Il est aisé de déduire de ce théorème le cas particulier pour lequel les deux points P′ et P coïncident.

Le théorème corrélatif de celui de Pappus s'énoncera :

Extension du théorème corrélatif de celui de Pappus. *Dans un système de deux triangles conjugués circonscrits à une courbe de la troisième classe, les produits des distances d'une tangente quelconque aux sommets de chacun de ces triangles sont analogiques.*

L'expression analytique de ce théorème sera, en désignant par $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$

les distances d'une tangente aux trois sommets du premier triangle, et par Δ'_0, Δ'_1, Δ'_2 ses distances aux sommets du second :

$$\Delta_0 . \Delta_1 . \Delta_2 \doteq \Delta'_0 . \Delta'_1 . \Delta'_2 .$$

Dans le cas particulier mentionné plus haut, elle devient :

$$\Delta_0^2 . \Delta_3 \doteq \Delta'_1 . \Delta'_2 . \Delta'_3 .$$

En combinant deux systèmes différents de triangles conjugués ayant pour sommets communs P et P′ et pour autres sommets 0, I, II, III, et 0′, I′, II′, III′, et supprimant les sommets communs, nous aurons un système de deux quadrilatères conjugués circonscrits, c'est-à-dire tels que chaque sommet de l'un, 0, soit le point de concours de trois tangentes menées respectivement par chacun des sommets I′, II′, III′ de l'autre, un seul 0′ excepté.

Celui-ci est dit, pour cette raison, opposé au premier 0. Donc :

THÉORÈME. *Dans une courbe de la troisième classe, on peut circonscrire un système de deux quadrilatères conjugués.* Fig. VII.

Il est facile d'appliquer à ce cas le théorème corrélatif de celui de Pappus.

Le théorème corrélatif de celui de Desargues s'énoncera :

EXTENSION DU THÉORÈME CORRÉLATIF DE CELUI DE DESARGUES. *Lorsqu'on a un système de deux triangles conjugués circonscrits à une courbe de la troisième classe, si par un point quelconque on mène à cette courbe trois tangentes et les six droites qui aboutissent aux sommets de ces triangles, ces neuf droites seront en involution.*

On voit par là que l'involution de six droites doit être à peu près impuissante dans l'étude des courbes de la troisième classe, et qu'il était nécessaire d'étendre cette idée de l'involution à un système de $3n$ droites pour en tirer tout le parti possible.

De ce théorème on peut déduire de nombreux corollaires, dont l'un des plus importants est celui-ci :

COROLLAIRE. *Si deux systèmes de triangles conjugués circonscrits à une courbe de la troisième classe sont situés de telle manière que les droites qui relient quatre couples de sommets concourent en un même point, les droites*

qui relient les deux autres couples de sommets concourront en ce même point.

La démonstration générale que nous avons donnée du corollaire V′, dont celui-ci n'est qu'un cas particulier, nous dispense d'y revenir.

Au moyen de ce corollaire, nous pouvons immédiatement démontrer le théorème de Brianchon par les courbes de la troisième classe :

Fig. VII.

EXTENSION DU THÉORÈME DE BRIANCHON. *Dans un système de deux quadrilatères conjugués circonscrits à une courbe de la troisième classe, les droites qui relient les quatre couples de sommets opposés concourent en un même point.*

Nous avons vu, en effet, qu'un système de deux quadrilatères conjugués circonscrits peut se décomposer en deux systèmes de triangles conjugués circonscrits ayant deux sommets communs.

Soient 0, I, II, III et 0′, I′, II′, III′, les sommets de nos deux quadrilatères, et P, P′ deux nouveaux sommets communs à deux systèmes de triangles conjugués circonscrits dont les sommets de ces quadrilatères font partie. Ces deux systèmes seront :

P, P′, 0 et I, II, III,
P, P′, 0′ et I′, II′, III′.

Or, les quatre droites qui relient respectivement les sommets 0 et 0′, I et I′, P et P, P′ et P′ peuvent être censées concourir au point d'intersection *i* des deux droites 0, 0′ et I, I′ ; donc, en vertu du corollaire précédent, les droites II, II′ et III, III′ concourront en ce même point.

Il résulte de la démonstration générale du corollaire V′, que ce sont les droites qui relient les couples de sommets opposés seulement qui concourent au même point.

ART. IV. — *Courbes de la quatrième classe.*

Le théorème fondamental I′ devient pour ces courbes :

THÉORÈME FONDAMENTAL. *Si de deux points on mène deux systèmes de quatre tangentes à une courbe de la quatrième classe, et que par chacun des points d'intersection d'une des tangentes du premier système avec une de celles du second, on mène à la courbe deux nouvelles tangentes, ces huit tangentes envelopperont en général une conique.*

Si trois de ces tangentes concourent en un même point, la conique se réduira à un système de deux points, c'est-à-dire que les huit tangentes se grouperont en deux systèmes de quatre tangentes concourant en un même point.

En nommant P et P′ les deux premiers points; II, III, IV, V les points d'intersection des systèmes de tangentes; O et I les points de concours des quatre couples de tangentes menées respectivement par ces points, on voit que nous avons affaire à *un système de deux quadrilatères conjugués circonscrits*

P, P′, O, I et II, III, IV, V,

c'est-à-dire *tels que chaque sommet de l'un soit le point de concours des tangentes menées par les quatre sommets de l'autre.*

Comme on peut combiner les quatre premières tangentes deux à deux de $1.2.3.4$ manières différentes, on formera autant de systèmes de deux quadrilatères conjugués circonscrits, tels par exemple que

P, P′, O, I, et II, III, IV, V,
P, P′, O, I′, et II′, III′, IV′, V′ (*).

Si dans ces deux systèmes nous supprimons les sommets communs, nous voyons que nous aurons un système de deux pentagones conjugués circonscrits.

En appliquant à l'un des systèmes de quadrilatères conjugués circonscrits, le théorème corrélatif de celui de Pappus, nous conclurons que :

Extension du théorème corrélatif de celui de Pappus. *Lorsqu'on a un système de deux quadrilatères conjugués circonscrits à une courbe de la quatrième classe, les produits des distances d'une tangente quelconque aux sommets de ces deux quadrilatères, sont analogiques.*

Propriété dont l'expression analytique est :

$$\Delta_0\Delta_1\Delta_2\Delta_3 \doteq \Delta'_0\Delta'_1\Delta'_2\Delta'_3,$$

en faisant usage de notations analogues aux précédentes.

Si nous faisons coïncider les deux points P et P′, il est manifeste que ce

(*) L'existence de ces systèmes multiples de quadrilatères conjugués circonscrits sera établie dans l'*Addition* (1870).

point unique peut être considéré comme point de concours de systèmes de tangentes menées par les points de contact des tangentes primitives passant par P et P′, et par conséquent la courbe enveloppe du deuxième degré, dont il est question dans le théorème général, pourra aussi se réduire à un système de deux points, comme dans le cas particulier. Donc :

COROLLAIRE. *Si d'un point on mène quatre tangentes à une courbe de la quatrième classe, et par les points de contact de chacune de celles-ci les deux autres tangentes à la courbe, ces huit nouvelles tangentes formeront deux systèmes de quatre droites, qui envelopperont une conique, ou qui concourront chacun en un même point.*

Le théorème corrélatif de celui de Pappus, appliqué au cas particulier, s'énoncera :

COROLLAIRE. *Le produit du carré de la distance d'une tangente quelconque au premier point par ses distances aux deux points de concours des nouvelles tangentes, et le produit de ses distances aux points de contact des premières tangentes, sont analogiques;*

Ce qui s'exprime par la relation :

$$\Delta_0^2 \cdot \Delta_2 \cdot \Delta_3 \div \Delta'_0 \cdot \Delta'_1 \cdot \Delta'_2 \cdot \Delta'_3.$$

Le corrélatif du théorème de Desargues, IV′, s'énonce pour les courbes de la quatrième classe :

EXTENSION DU THÉORÈME CORRÉLATIF DE CELUI DE DESARGUES. *Lorsque l'on a un système de deux quadrilatères conjugués circonscrits à une courbe de la quatrième classe, si d'un point on mène à cette courbe quatre tangentes et les huit droites qui aboutissent aux sommets de ces quadrilatères, ces douze droites sont en involution* (*).

Nous n'insisterons plus sur l'importance de l'extension que nous avons donnée à l'idée de l'involution, ni sur les corollaires auxquels donne lieu le théorème capital qui précède, et nous en conclurons immédiatement l'extension du théorème de Brianchon au moyen du corollaire suivant :

(*) Nous avons déjà dit plus haut que ce théorème sera généralisé dans l'*Addition*, de même que celui de Brianchon qui en découle (1870).

Corollaire. *Si deux systèmes de deux quadrilatères conjugués circonscrits à une courbe de la quatrième classe sont situés de telle manière, que les droites qui relient cinq couples de sommets concourent en un même point, les droites qui relieront les trois autres couples de sommets concourront en ce même point.*

Pour la démonstration, voir le théorème général V′.

Appliquons ce corollaire aux deux systèmes de quadrilatères conjugués circonscrits mentionnés plus haut :

P, P′, O, I et II, III, IV, V,
P, P′, O, I′ et II′, III′, IV′, V′.

Nous pourrons dire que, dans ces deux systèmes, les droites qui relient I à I′, II à II′, P à P, P′ à P′, O à O concourent au point d'intersection *i* de I, I′ avec II, II′; et par suite les droites III, III′; IV, IV′; V, V′ concourent en ce même point.

Or, comme les sommets I, II, III, IV, V et I′, II′, III′, IV′, V′ sont ceux de deux pentagones conjugués circonscrits, nous pourrons énoncer le théorème :

Extension du théorème de Brianchon. *Dans un système de deux pentagones conjugués circonscrits à une courbe de la quatrième classe, les droites qui relient les sommets opposés concourent en un même point.*

Art. V. — *Courbes de la cinquième classe.*

Pour ces courbes comme pour celles du cinquième ordre, nous nous bornerons à énoncer les théorèmes généraux.

Théorème fondamental. *Si de deux points on mène deux systèmes de cinq tangentes à une courbe de la cinquième classe, et que par les points d'intersection de ces tangentes deux à deux on mène trois autres tangentes à la courbe, ces quinze nouvelles tangentes envelopperont en général une courbe de la troisième classe.*

Si parmi ces nouvelles tangentes deux systèmes, le premier de quatre tangentes, le second de trois, concourent en un même point, ce qui est

toujours possible, les quinze tangentes formeront trois systèmes de cinq droites concourant en un même point.

Nous aurons ainsi *un système de deux pentagones conjugués circonscrits à une courbe de la cinquième classe*, système pour lequel l'application du théorème corrélatif de celui de Pappus donnera la relation

$$\Delta_0 . \Delta_1 . \Delta_2 . \Delta_3 . \Delta_4 \doteq \Delta'_0 . \Delta'_1 . \Delta'_2 . \Delta'_3 . \Delta'_4 .$$

Corollaire. *Si d'un point on mène cinq tangentes à une courbe de la cinquième classe, et que par les points de contact de celles-ci l'on mène les trois autres tangentes à la courbe, ces quinze tangentes formeront trois systèmes de cinq droites qui envelopperont en général une courbe de la troisième classe.*

Ce lieu de la troisième classe pourra, dans des cas particuliers, se réduire à une conique et un point, ou à trois points qui seront chacun le point de concours de cinq de ces tangentes.

Le corrélatif du théorème de Pappus s'exprimera, pour ce dernier cas, par la relation :

$$\Delta_0^2 . \Delta_2 . \Delta_3 . \Delta_4 \doteq \Delta'_0 . \Delta'_1 . \Delta'_2 . \Delta'_3 . \Delta'_4 .$$

Le corrélatif de celui de Desargues s'énoncera :

Théorème. *Lorsque l'on a un système de deux pentagones conjugués circonscrits à une courbe de la cinquième classe, si d'un point on mène à cette courbe cinq tangentes et les dix droites qui aboutissent aux sommets de ces deux pentagones, ces quinze droites seront en involution* (*).

Le corollaire le plus important de ce théorème est celui-ci :

Corollaire. *Si deux systèmes de deux pentagones conjugués circonscrits à une courbe de la troisième classe sont situés de telle manière, que les droites qui unissent six couples de sommets concourent en un même point, les droites qui unissent les quatre autres couples de sommets concourront en ce même point.*

Considérons actuellement un système de deux pentagones conjugués circonscrits formés en menant par les deux points P et P′ deux systèmes de cinq

(*) Ce théorème, ainsi que celui de Brianchon, donné plus bas, seront généralisés dans l'*Addition* (1870).

tangentes : 0, 1, 2, 3, 4, etc.; puis en menant par chacun des points $00'$, $11'$, $22'$, $33'$, $44'$ trois nouvelles tangentes pour former le premier système des pentagones; enfin par chacun des points $00'$, $11'$, $23'$, $34'$, $41'$ trois nouvelles tangentes pour former le second; supposons que ces quinze tangentes concourent cinq à cinq en un même point (*).

Ces deux systèmes de pentagones circonscrits dont nous désignerons les sommets par :

$$P, P', O, O', I \quad \text{et} \quad II, III, IV, V, VI,$$
$$P, P', O, O', I' \quad \text{et} \quad II', III', IV', V', VI',$$

formeront, si nous supprimons les sommets communs, un *système de deux hexagones conjugués circonscrits.*

Or nous pouvons dire que les droites qui unissent les six sommets I et I', II et II', P et P, P' et P', O et O, O' et O' concourent en un même point i, intersection de I, I' avec II, II'; donc les droites qui uniront les trois autres couples de sommets opposés concourront en ce même point; d'où le théorème :

Extension du théorème de Brianchon. *Dans un système de deux hexagones conjugués circonscrits à une courbe de la cinquième classe, les six droites qui unissent les couples de sommets opposés concourent en un même point.*

Le lecteur familier avec la géométrie supérieure aura peut-être trouvé trop de longueurs dans cette exposition. Il eût préféré sans doute nous la voir borner aux théorèmes généraux; mais nous avons craint qu'une aussi grande concision n'entraînât trop d'obscurités. C'est pour rendre plus aisée l'intelligence de ces théorèmes que nous avons cru utile de les appliquer aux quatre premiers genres de courbes algébriques; si nous ne sommes pas parvenu à garder une juste mesure, on voudra bien nous le pardonner en faveur de nos intentions; pour ce qui nous concerne, nous eussions de beaucoup préféré nous borner aux seuls théorèmes généraux (**).

Il nous reste encore à démontrer et à généraliser le fameux théorème de Newton sur les coniques; nous ferons usage, à cet effet, d'un autre système de coordonnées dont nous nous occuperons au chapitre suivant.

(*) L'existence de ces systèmes sera établie dans l'*Addition* (1870).

(**) C'est à ces théorèmes seulement que nous nous attacherons dans l'*Addition*.

ADDITION.

(Décembre 1870.)

Comme nous l'avons annoncé dans la préface de ce travail, le but que nous nous proposons dans cette *Addition* est :

En premier lieu, de reprendre quelques points sur lesquels des analystes distingués ont bien voulu appeler notre attention, et d'élucider ces points de manière à ne laisser subsister aucun doute sur l'existence des figures auxquelles se rapportent nos théorèmes;

En second lieu, de donner une démonstration fort simple du théorème de Pascal tel que nous l'avons énoncé pour les courbes planes jusqu'au cinquième ordre, et de faire servir ce mode même de démonstration à donner à ce théorème une extension telle qu'il s'applique, sous une forme très-générale, à toutes les courbes algébriques;

En troisième lieu enfin, d'étendre à toutes ces courbes le théorème de Desargues.

Nous nous bornerons, dans cette *Addition*, au cas des coordonnées rectilignes ponctuelles, en faisant remarquer que toutes nos démonstrations pourront, par le moyen des coordonnées tangentielles, s'appliquer aux figures corrélatives, de sorte que nous nous dispenserons même d'énoncer les théorèmes qui se rapportent à ces figures, et qui ne sont, au reste, que la généralisation de ceux que nous avons donnés dans le chapitre précédent.

§ I. Existence des systèmes multiples de polygones conjugués inscrits dans les courbes du quatrième et du cinquième ordre.

Le point essentiel que nous avons à élucider est l'existence de systèmes multiples de polygones conjugués du n^{me} ordre, inscrits à une courbe du même ordre, et ayant deux sécantes communes, pour $n = 4$ et $n = 5$, existence sur laquelle nous avons fondé l'extension du théorème de Pascal à ces courbes.

Nous commencerons par faire remarquer, comme on le verra plus bas,

que ce théorème peut s'établir indépendamment de cette existence, et d'une manière très-simple; que, pour les courbes du quatrième ordre, il existe des systèmes de polygones conjugués du quatrième et du cinquième ordre en nombre triplement indéfini, c'est-à-dire dans lesquels trois paramètres sont arbitraires; que, pour le cinquième ordre, il existe des systèmes de polygones conjugués du sixième ordre en nombre défini, tandis que ceux du cinquième sont en nombre simplement indéfini (*).

Il semble résulter de là que, parmi ces systèmes en nombre indéfini de polygones conjugués du quatrième ou du cinquième ordre inscrits à une courbe de même ordre, il existera des systèmes multiples de polygones conjugués ayant deux sécantes communes, et qui donneront naissance, ainsi qu'on l'a vu dans la première partie, à des systèmes de polygones conjugués de l'ordre immédiatement supérieur.

Ceci toutefois n'est qu'une induction qui a besoin d'être confirmée : pour le quatrième ordre, cette confirmation est très-aisée; pour le cinquième, elle présente plus de difficultés.

Mettons l'équation des courbes du quatrième ordre sous la forme

$$C_4 = \alpha\beta\gamma\delta + k\alpha'\beta'\gamma'\delta' = 0,$$

$\alpha\ldots$ désignant des fonctions linéaires de la forme $y - ax - b$.

Le second membre renfermant dix-sept paramètres, il en est trois que nous pouvons nous donner arbitrairement, par exemple k et les deux paramètres de α; il est clair que les quatorze autres paramètres, ceux de $\beta\ldots\ldots\delta'$, seront

(*) On a déjà vu dans la première partie que les équations de ces courbes peuvent se mettre sous la forme :

$$\delta_1\ldots\delta_4 - k\delta'_1\ldots\delta'_4 = C_4 = 0,$$
$$\delta_1\ldots\delta_5 - k\delta'_1\ldots\delta'_5 = C_5 = 0;$$

mais on peut aussi les mettre sous la forme suivante

$$\delta_1\ldots\delta_5 - k\delta'_1\ldots\delta'_5 = \Delta\,.\,C_4 = 0,$$
$$\delta_1\ldots\delta_6 - k\delta'_1\ldots\delta'_6 = \Delta\,.\,C_5 = 0;$$

tous les δ, δ' et Δ représentant des fonctions linéaires dans lesquelles il y a deux paramètres à déterminer.

Ces formes d'équations rendent manifestes l'existence et le nombre des polygones conjugués.

déterminés en fonction de ces trois paramètres arbitraires au moyen de quatorze équations de condition.

Si nous faisons voir que l'équation de cette courbe peut aussi se mettre sous la forme

$$C_4 = \alpha\beta\Gamma\Delta + k'\alpha'\beta'\Gamma'\Delta' = 0,$$

il sera prouvé que l'on peut construire, sur les sécantes α et β, des systèmes multiples de quadrilatères conjugués inscrits à C_4.

Or, si nous nommons Γ', Δ' les diagonales du quadrilatère dont les couples de côtés opposés sont γ', δ' et α, β, l'ensemble de ces diagonales pourra se représenter par une équation de la forme

$$(1 + m)\,\Gamma'\Delta' = \gamma'\delta' + m\alpha\beta,$$

dans laquelle m sera une fonction déterminée des paramètres de α, β, γ', δ', et, par suite, une fonction déterminée des trois paramètres arbitraires.

De même l'ensemble des diagonales Γ, Δ du quadrilatère dont les couples de côtés opposés sont γ, δ et α', β' sera représenté par

$$(1 + m')\,\Gamma\Delta = \gamma\delta + m'\alpha'\beta',$$

m' étant, comme m, une fonction déterminée des trois paramètres arbitraires.

Remplaçons, dans l'équation $C_4 = 0$, $\gamma\delta$ et $\gamma'\delta'$ par leurs valeurs tirées des deux précédentes, nous aurons :

$$C_4 = \alpha\beta\left[(1 + m')\,\Gamma\Delta - m'\alpha'\beta'\right] + k\alpha'\beta'\left[(1 + m)\,\Gamma'\Delta' - m\alpha\beta\right] = 0;$$

et comme m et m' sont des fonctions déterminées de trois paramètres arbitraires, k et les deux paramètres de α, si nous posons $m' + km = 0$, cette relation déterminera k en fonction des deux paramètres de α qui restent encore arbitraires, et l'équation de C_4 deviendra

$$C_4 = (1 + m')\,\alpha\beta\Gamma\Delta + k\,(1 + m)\,\alpha'\beta'\Gamma'\Delta' = 0,$$

ou plus simplement :

$$C_4 = \alpha\beta\Gamma\Delta + k'\alpha'\beta'\Gamma'\Delta' = 0,$$

équation dans laquelle tous les paramètres sont déterminés en fonction de ceux de α, restés arbitraires; d'où il résulte que, sur une sécante donnée α, on peut construire des systèmes multiples de quadrilatères conjugués.

Ces systèmes multiples sont donc en nombre indéfini.

L'existence de systèmes multiples de quadrilatères conjugués ayant deux sécantes communes est ainsi établie de la manière la plus générale pour les courbes du quatrième ordre.

Pour celles du cinquième, le même mode de transformation de leur équation ne nous a pas semblé généralement praticable : nous indiquerons toutefois le résultat auquel il nous a conduit, et qui mettra peut-être sur la voie d'une plus grande généralisation.

Soit l'équation d'une courbe du cinquième ordre mise sous la forme

$$C_5 = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon + k\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon' = 0,$$

ce qui est toujours possible, puisqu'on a vingt paramètres à déterminer au moyen de vingt équations, k étant arbitrairement donné.

Considérons les transversales $\Gamma'\Delta'E'$ qui relient, d'une autre manière que les transversales $\gamma'\delta'\varepsilon'$, les intersections de ces dernières avec α et β; nous aurons :

$$\gamma'\delta'\varepsilon' + m'\Gamma'\Delta'E' = (1 + m')\alpha\beta D,$$

m' étant, par un raisonnement analogue au précédent, une fonction déterminée de k. Car les six droites du premier membre peuvent être regardées comme les côtés de deux triangles conjugués au lieu du second ordre $\alpha\beta = 0$, et par suite les côtés opposés de ces triangles doivent se couper sur une droite $D = 0$.

De même, en désignant par Γ, Δ, E trois transversales qui relient, d'une autre manière que γ, δ, ε, les intersections de celles-ci avec α' et β', nous aurons :

$$\gamma\delta\varepsilon + m\Gamma\Delta E = (1 + m)\alpha'\beta' D'.$$

Si nous remplaçons, dans l'équation $C_5 = 0$, $\gamma\delta\varepsilon$ et $\gamma'\delta'\varepsilon'$ par leurs valeurs tirées des deux précédentes, elle prendra la forme :

$$C_5 = \alpha\beta\left[(1 + m)\alpha'\beta' D' - m\Gamma\Delta E\right] + k\alpha'\beta'\left[(1 + m')\alpha\beta D - m'\Gamma'\Delta'E'\right] = 0;$$

et elle se réduira à

$$C_8 = \alpha\beta\Gamma\Delta E + k'\alpha'\beta'\Gamma'\Delta'E' = 0,$$

si l'on pose $1 + m = k(1 + m')$, ce qui détermine k, et si, de plus, la droite D coïncide avec D'.

Dans ce cas la multiplicité des polygones conjugués construits sur α et β est encore démontrée.

Cette condition limite-t-elle l'existence de la propriété à des genres particuliers de courbes, ou limite-t-elle simplement le nombre des systèmes multiples de polygones conjugués, c'est là une question assez délicate que nous ne sommes pas en mesure de trancher.

Quoi qu'il en soit, l'on voit que toutes les courbes du quatrième ordre renferment des systèmes multiples de quadrilatères conjugués formés sur les mêmes sécantes, et que, pour les courbes du cinquième ordre, la multiplicité des systèmes de pentagones conjugués formés sur les mêmes sécantes est également établie, au moins pour certains genres de ces courbes.

Dans le paragraphe suivant on démontrera, au reste, que cette multiplicité n'est pas nécessaire le moins du monde à l'existence du théorème de Pascal, quoique ce soit par elle que nous soyons arrivé d'abord à l'expression particulière de ce théorème qui est relative aux polygones conjugués du $(n + 1)^{me}$ ordre; et ce mode de démonstration permettra d'étendre le théorème, même en le généralisant, à toutes les courbes algébriques.

§ II. Généralisation du théorème de Pascal.

Dans ce second paragraphe, nous commencerons d'abord par établir d'une manière directe le théorème de Pascal pour les courbes algébriques jusqu'au cinquième ordre inclusivement, et par l'étendre à des systèmes de polygones conjugués d'un ordre supérieur à ceux de Pascal pour les courbes des quatre premiers ordres. Nous indiquerons ensuite une généralisation de ce théorème qui le rendra applicable, non-seulement à des systèmes de figures conjuguées moins particulières que les polygones conjugués inscriptibles aux courbes des cinq premiers ordres, mais par cela même à ces systèmes de figures conjuguées dans toutes les courbes algébriques.

L'extension que nous avons donnée au théorème de Pascal pour les cinq premiers ordres peut se fonder très-simplement sur cette considération que l'équation $C_n = 0$ de ces courbes peut toujours se mettre sous la forme :

$$\delta_1 \dots \delta_{n+1} - k\delta'_1 \dots \delta'_{n+1} = \Delta C_n = 0,$$

où Δ et les δ sont des fonctions linéaires.

En effet, si l'on considère, d'une part, le nombre total des paramètres, ceux de C_n excepté, d'autre part, le nombre d'équations à satisfaire, on trouvera, pour le premier, $4n + 7$, et pour le second, $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$: or ce dernier est toujours égal ou inférieur au précédent pour $n \leqq 5$, *c. q. f. d.*

Cette forme d'équation est évidemment l'expression analytique du théorème de Pascal : car les côtés δ coupant les côtés δ' en des points tous situés sur le lieu $\Delta C_n = 0$, ceux de ces côtés qui ne se couperont pas sur $C_n = 0$, c'est-à-dire les côtés opposés, se couperont sur la droite $\Delta = 0$.

Les polygones conjugués inscrits que nous venons de considérer étaient du $(n + 1)^{me}$ ordre : nous allons voir que les polygones conjugués d'un ordre supérieur existent pour les courbes des quatres premiers ordres, et donnent lieu au théorème suivant, dont quelques cas particuliers sont connus :

SECONDE EXTENSION DU THÉORÈME DE PASCAL. *Dans un système de deux polygones conjugués du* $(n + p)^{me}$ *ordre inscrits à une courbe du* n^{me} *ordre, les côtés non adjacents se coupent sur un lieu du* p^{me} *ordre.*

Nous entendons par côtés non adjacents ceux qui ne se rencontrent pas sur la courbe.

En effet, l'équation $C_n = 0$ peut s'écrire, jusqu'au quatrième ordre inclusivement, en supposant $p > 1$:

$$\delta_1 \dots \delta_{n+p} - k\delta'_1 \dots \delta'_{n+p} = C_n \cdot C'_p = 0 \ (^*).$$

Car le nombre total des paramètres, ceux de C_n exceptés, est

$$4(n + p) + 1 + \frac{p(p+3)}{2};$$

(*) Cette équation pourrait même prendre la forme plus particulière :

$$\delta_1 \dots \delta_{n+p} - k\delta'_1 \dots \delta'_{n+p} = C_n \Delta_1 \dots \Delta_p = 0,$$

pour quelques valeurs de p que le lecteur déterminera aisément.

celui des équations à satisfaire : $\frac{(n+p)(n+p+3)}{2}$. La différence entre ces deux nombres est

$$4(n+p)+1-n\left(\frac{n+3}{2}+p\right);$$

et elle sera positive pour $n < 5$, *c. q. f. d.*

On établirait du reste, comme précédemment, que cette forme d'équation est l'expression analytique du théorème énoncé.

On remarquera que, pour $n = 2$, la différence entre le nombre des paramètres et celui des équations est $2(n+p)$; c'est-à-dire qu'on peut se donner arbitrairement tous les sommets des deux polygones conjugués d'ordre $(n+p)$ inscrits à une conique;

Que, pour $n = 3$, cette différence est $n+p+1$; c'est-à-dire qu'on peut se donner les sommets de l'un des polygones, ainsi qu'un sommet du polygone conjugué, dans les courbes du troisième ordre;

Enfin que pour $n = 4$, cette différence est constamment égale à 3; c'est-à-dire qu'il n'y a plus trois sommets arbitraires, quel que soit l'ordre des polygones, quand la courbe est du quatrième ordre.

Il est aisé d'étendre ces théorèmes à toutes les courbes algébriques, pourvu qu'au lieu de systèmes de polygones conjugués, qui n'existent plus au delà du cinquième ordre, on envisage les systèmes plus généraux que nous allons définir.

Nous appellerons *figures conjuguées du* n^me^ *ordre inscrites à une courbe du même ordre* celles qui sont formées, d'une part, des n transversales qui réunissent deux à deux les n points d'intersection de deux sécantes avec la courbe; d'autre part, de ces deux sécantes et du lieu, d'ordre $n-2$, des nouvelles intersections des transversales avec la courbe.

Par *systèmes de figures conjuguées* nous entendons les différentes figures conjuguées que l'on peut former en réunissant deux à deux, dans un ordre quelconque, les n points d'intersection de deux mêmes sécantes.

Pour ces figures conjuguées, nous établirons d'abord un théorème en un certain sens plus particulier que celui de Pascal, quoiqu'il s'applique à toutes les courbes algébriques; puis le théorème de Pascal proprement dit pour ces

courbes ; enfin la généralisation complète de ce théorème, dans laquelle les deux précédents rentreront naturellement comme cas particuliers.

THÉORÈME. *Si* n — 2 *transversales sont communes à deux systèmes de figures conjuguées du* n^me *ordre inscrites à une courbe du même ordre, ces deux systèmes se couperont en tous-points situés sur cette courbe.*

L'équation de la courbe pourra en effet, en vertu de l'hypothèse renfermée dans l'énoncé même, s'écrire sous les deux formes :

$$\delta_1\delta_2 C_{n-2} - k\,\delta'_1 \dots \delta'_{n-2}\delta'_{n-1}\delta'_n = C_n = 0,$$
$$\delta_1\delta_2 C'_{n-2} - k'\delta'_1 \dots \delta'_{n-2}\beta'_{n-1}\beta'_n = C_n = 0.$$

D'où l'on déduit par multiplication :

$$\beta'_{n-1}\beta'_n C_{n-2} - k_1\delta'_{n-1}\delta'_n C'_{n-2} = C_n = 0,$$

car ce lieu doit renfermer C_n, puisqu'il passe par l'intersection des deux précédents qui sont C_n même ; et il ne peut renfermer davantage, puisqu'il est de l'ordre n.

Cette nouvelle forme d'équation démontre le théorème.

Celui de Pascal s'énoncera, pour toutes les courbes algébriques :

PREMIÈRE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE PASCAL. *Si* n — 3 *transversales sont communes à deux systèmes de figures conjuguées du* n^me *ordre inscrites à une courbe du même ordre, les points d'intersection de ces figures qui n'appartiennent pas à cette courbe seront en ligne droite.*

Par hypothèse, l'équation de la courbe peut s'écrire :

$$\delta_1\delta_2 C_{n-2} - k\,\delta'_1 \dots \delta'_{n-3}\delta'_{n-2}\delta'_{n-1}\delta'_n = C_n = 0,$$

et

$$\delta_1\delta_2 C'_{n-2} - k'\delta'_1 \dots \delta'_{n-3}\beta'_{n-2}\beta'_{n-1}\beta'_n = C_n = 0.$$

D'où, par multiplication, on obtient un lieu :

$$\beta'_{n-2}\beta'_{n-1}\beta'_n C_{n-2} - k_1\delta'_{n-2}\delta'_{n-1}\delta'_n C'_{n-1} = \Delta C_n = 0;$$

car ce lieu doit renfermer C_n, et, comme il est de l'ordre $n + 1$, il doit renfermer en outre une droite $\Delta = 0$.

On se convaincra que cette dernière forme est l'expression du théorème, par un raisonnement identique à celui que nous avons fait pour le cas particulier au commencement de ce second paragraphe.

Voici enfin la généralisation complète du théorème :

SECONDE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE PASCAL. *Si* p *transversales sont communes à deux systèmes de figures conjuguées du* n^me^ *ordre inscrites à une courbe du même ordre, les points d'intersection de ces figures, qui n'appartiennent pas à cette courbe, se trouveront sur un lieu de l'ordre* n — p — 2.

Par hypothèse l'équation de la courbe peut s'écrire :

$$\delta_1\delta_2 C_{n-2} - k\,\delta'_1 \dots \delta'_p\delta'_{p+1} \dots \delta'_n = C_n = 0,$$

et

$$\delta_1\delta_2 C'_{n-2} - k'\delta'_1 \dots \delta'_p\beta'_{p+1} \dots \beta'_n = C_n = 0.$$

D'où, par multiplication, on obtient le lieu

$$\beta'_{p+1} \dots \beta'_n C_{n-2} - k_1\delta'_{p+1} \dots \delta'_n C'_{n-2} = C_n \cdot C''_{n-p-2} = 0.$$

Nous n'insisterons pas davantage sur la démonstration, qui est analogue aux précédentes, et nous ferons seulement observer que les transversales non communes se coupent nécessairement sur le lieu d'ordre $n - p - 2$; car si elles se coupaient sur la courbe donnée, elles auraient avec elle plus de n points communs; et que, quant aux deux courbes d'ordre $n - 2$ qui font partie des systèmes de figures conjuguées, comme elles ont $(n - 2)p$ points communs entre elles et avec la courbe donnée, leurs points d'intersection qui sont situés sur le lieu d'ordre $n - p - 2$ seront au nombre de

$$(n - 2)(n - p - 2).$$

Sans aucun doute, en partant de formes plus générales encore de l'équation des courbes algébriques, et en les combinant entre elles et les interprétant comme nous venons de faire, on arriverait à des théorèmes d'une plus grande généralité encore; de même, il existe d'autres expressions analytiques du théorème de Pascal relatives à des dispositions particulières des systèmes de polygones conjugués. Mais en nous arrêtant à tous ces détails,

nous perdrions de vue l'objet essentiel de ce travail, qui est l'extension des théorèmes fondamentaux de la haute géométrie aux courbes supérieures.

Peut-être le lecteur se dira-t-il que toutes ces généralisations que nous venons de donner du théorème de Pascal ne sont que des cas particuliers de ce théorème de Gergonne :

Si, parmi les m^2 intersections de deux courbes du degré m, il y en a mp sur une courbe du degré p, les $m(m-p)$ autres se trouveront sur une courbe du degré $(m-p)$.

Et en effet, on retrouve ce théorème au fond de tous les précédents. Mais ceux-ci étaient, ce nous semble, des cas particuliers assez remarquables pour faire l'objet d'une mention spéciale. Et que de fois n'arrive-t-il pas que l'on trouve dans une vérité beaucoup plus que n'y avait vu celui qui l'a découverte! Ce n'est souvent que quand ces conséquences nouvelles ont été établies par une autre voie, qu'on les voit ressortir clairement de la vérité dans laquelle elles se trouvaient implicitement renfermées. Peut-être pouvons-nous penser qu'il en est ainsi de nos énoncés, avec d'autant plus de raison qu'ils avaient d'abord soulevé quelques difficultés, pour l'éclaircissement desquelles nous avons écrit cette *Addition*.

§ III. Généralisation du théorème de Desargues.

Le théorème de Pascal pouvant être considéré comme un corollaire de celui de Desargues; on conçoit que l'extension que nous venons de donner au premier de ces théorèmes devait éveiller en nous l'idée que le second était susceptible de la même extension.

Et en effet, en partant d'une notion algébrique que nous ne pouvons développer aujourd'hui, mais sur laquelle nous reviendrons peut-être quelque jour, nous avons cru pouvoir conclure à priori à l'extension du théorème de Desargues à deux figures conjuguées du n^{me} ordre inscrites à une courbe de même ordre; et nous n'avons eu aucune peine à en établir la démonstration, d'une manière indépendante de la notion qui nous avait conduit à étendre le théorème à toutes les courbes algébriques.

Première généralisation du théorème de Desargues. *Dans un système*

de deux figures conjuguées du n^me^ *ordre, inscrites à une courbe de même ordre, une droite quelconque coupe les deux figures conjuguées et la courbe en* 3n *points en involution.*

Soit $$C_n = \delta_1\delta_2 C_{n-2} - k\delta'_1\delta'_2 \dots \delta'_n = 0$$

l'équation d'une courbe du n^{me} ordre rapportée à deux figures conjuguées.

Considérons une droite D qui coupe

C_n aux points $O_1, O_2, \dots O_n$;

δ_1, δ_2 et C_{n-2} aux points M_1, M_2 et $M_3, M_4 \dots M_n$;

et

$\delta'_1, \delta'_2 \dots \delta'_n$ aux points $M'_1, M'_2 \dots M'_n$.

Par le point O_1, dont nous désignerons les coordonnées par x, y, menons à l'axe des y une parallèle qui coupe l'axe des x en P, et δ_1, δ_2 et C_{n-2} en N_1, N_2 et $N_3 \dots N_n$.

Il est clair d'abord que δ_1, qui est une fonction $y - ax - b$, représente O_1N_1 : car $O_1P = y$; $N_1P = ax + b$, puisque N_1 est sur la droite δ_1; donc $O_1N_1 = y - ax - b = \delta_1$.

De même $O_1N_2 = \delta_2$; $O_1N'_1 = \delta'_1$, etc.

Ensuite, on voit que C_{n-2} représente le produit des segments $O_1N_3 . O_1N_4 \dots O_1N_n$: car, en considérant l'abscisse x du point O_1 comme constante, et désignant par $y_3 \dots y_n$ les ordonnées des points d'intersection de la parallèle menée par ce point à l'axe des y avec la courbe C_{n-2}, il est évident que

$$C_{n-2} = (y - y_3) \dots (y - y_n);$$

et comme $y = O_1P$, $y_3 = N_3P \dots y_n = N_nP$, la proposition est démontrée.

L'équation de la courbe C_n nous donne donc :

$$O_1N_1 . O_1N_2 . O_1N_3 \dots O_1N_n = kO_1N'_1 . O_1N'_2 \dots O_1N'_n.$$

Mais dans les triangles $O_1N_1M_1$, $O_1N_2M_2$, $O_1N'_1M'_1 \dots . O_1N'_nM'_n$, on a :

$$O_1N_1 = O_1M_1 \frac{\sin(D\delta_1)}{\sin(Y\delta_1)}, \text{ etc.};$$

et en vertu du théorème de Carnot :

$$O_1N_3 \cdot O_1N_4 \ldots O_1N_n = h \quad O_1M_3 \cdot O_1M_4 \ldots O_1M_n,$$

le rapport h étant constant, quelque soit le point O_1, pour une même direction des sécantes O_1N_n et O_1M_n, c'est-à-dire Y et D.

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, nous aurons :

$$h\frac{\sin(D\delta_1)}{\sin(Y\delta_1)}\cdot\frac{\sin(D\delta_2)}{\sin(Y\delta_2)}\cdot O_1M_1\cdot O_1M_2\cdot O_1M_3\ldots O_1M_n =$$
$$k\frac{\sin(D\delta'_1)}{\sin(Y\delta'_1)}\cdot\frac{\sin(D\delta'_2)}{\sin(Y\delta'_2)}\ldots\frac{\sin(D\delta'_n)}{\sin(Y\delta'_n)}\cdot O_1M'_1\cdot O_1M'_2\ldots O_1M'_n;$$

d'où

$$\frac{O_1M_1\cdot O_1M_2\ldots O_1M_n}{O_1M'_1\cdot O_1M'_2\ldots O_1M'_n} = \frac{k}{h}\frac{\sin(Y\delta_1)}{\sin(D\delta_1)}\frac{\sin(Y\delta_2)}{\sin(D\delta_2)}\frac{\sin(D\delta'_1)}{\sin(Y\delta'_1)}\ldots\frac{\sin(D\delta'_n)}{\sin(Y\delta'_n)}.$$

Et comme pour tous les autres points d'intersection $O_2 \ldots O_n$ de la droite D avec la courbe C_n nous aurons des relations analogues, dans lesquelles le second membre sera constant, il s'ensuivra :

$$\frac{O_1M_1\cdot O_1M_2\ldots O_1M_n}{O_1M'_1\cdot O_1M'_2\ldots O_1M'_n} = \frac{O_2M_1\cdot O_2M_2\ldots O_2M_n}{O_2M'_1\cdot O_2M'_2\ldots O_2M'_n} = \ldots = \frac{O_nM_1\cdot O_nM_2\ldots O_nM_n}{O_nM'_1\cdot O_nM'_2\ldots O_nM'_n};\ c.\,q.\,f.\,d.$$

On déduira de ce théorème la démonstration de celui de Pascal, comme nous l'avons fait dans la première partie.

Enfin on peut étendre le théorème de Desargues à des figures plus générales encore que les précédentes.

Si nous appelons *système de lieux conjugués à un lieu du* n^me^ *ordre* un double système de deux lieux, l'un d'ordre $n-p$, l'autre d'ordre p, tel que toutes les intersections des deux lieux du premier système avec les deux lieux du second soient sur le lieu d'ordre n, l'équation de ce dernier pourra toujours s'écrire, comme on s'en assurera aisément :

$$C_n = C_{n-p}C_p - kC'_{n-p}C'_p = 0;$$

et en appliquant à cette forme d'équation les raisonnements dont nous avons

fait usage dans la démonstration précédente, on en conclura le théorème suivant :

SECONDE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE DESARGUES (*). *Lorsqu'un double système de deux lieux, l'un d'ordre* n — p, *l'autre d'ordre* p, *est conjugué à un lieu du* n^{me} *ordre, une transversale quelconque rencontre la figure en* 3n *points qui sont en involution.*

Cette expression générale du théorème de Desargues renferme, comme cas particuliers, toutes celles que nous en avons données jusqu'à présent, et elle ne peut manquer d'être d'un grand secours dans l'étude des courbes supérieures : le théorème de Desargues, en effet, exprime, si l'on peut ainsi dire, la loi de construction d'un lieu par le moyen de lieux d'un ordre inférieur, et les autres théorèmes fondamentaux de la géométrie supérieure n'en sont, pour la plupart, que des corollaires.

Il est tellement aisé, en suivant la marche indiquée dans le deuxième chapitre, d'appliquer aux courbes des classes supérieures les théorèmes corrélatifs des précédents, que nous croyons pouvoir laisser au lecteur le soin d'en formuler les énoncés.

CHAPITRE III.

COORDONNÉES BIPOLAIRES.

Nous nous contenterons de montrer par un exemple unique le parti que l'on peut tirer de la méthode précédente en faisant usage d'autres coordonnées.

Nous choisissons de préférence le système bipolaire parce qu'il n'altère pas le degré de l'équation de la courbe.

Il serait tout aussi aisé d'appliquer notre méthode à un autre système quelconque de coordonnées.

(*) Comp. Poncelet, *Traité des propriétés projectives*, 2me éd., t. II, p. 246; 1871.

Soient pris comme pôles deux points fixes O et P, et comme coordonnées bipolaires d'un point M les cotangentes des angles φ et ψ que les rayons vecteurs OM et PM font avec l'axe des pôles. Fig. VIII.

Posons OM $= r$, PM $= q$, OP $= p$; et soient x, y les coordonnées du point M par rapport à deux axes rectangulaires d'origine O, OP étant pris pour axe des x.

A l'inspection de la figure on voit immédiatement qu'on a :

$$\frac{x}{p} = \frac{r\cos\varphi}{p} = \frac{\sin\psi\cos\varphi}{\sin(\varphi+\psi)} = \frac{\cot\varphi}{\cot\varphi+\cot\psi}.$$

$$\frac{y}{p} = \frac{1}{\cot\varphi+\cot\psi}.$$

Au moyen de ces formules de transformation, on s'assure aisément que l'équation d'une courbe en coordonnées rectilignes ne change pas de degré, lorsqu'on la transforme en coordonnées bipolaires.

Nous allons en déduire l'équation générale de la droite dans ce nouveau système.

Faisons pour abréger $\cot\varphi = \beta$; $\cot\psi = \gamma$, de sorte que β et γ seront les coordonnées courantes d'un point.

Si nous déterminons une droite au moyen des segments x_0 et y_0 qu'elle intercepte sur les deux axes, son équation sera :

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1;$$

ou bien, en remplaçant

$$x \text{ par } \frac{p\beta}{\beta+\gamma} \text{ et } y \text{ par } \frac{p}{\beta+\gamma} :$$

$$\frac{p\beta}{x_0} + \frac{p}{y_0} = \beta+\gamma;$$

et enfin, si nous posons :

$$1 - \frac{p}{x_0} = k \text{ et } \frac{p}{y_0} = f$$

l'équation de la droite, en coordonnées bipolaires, deviendra :

$$\gamma + k\beta = f.$$

Il est à remarquer que si k est constant, toutes les droites représentées par cette équation passeront par un même point situé sur l'axe des pôles; que si, au contraire, f l'est, elles passeront par un point situé sur une perpendiculaire élevée en O à cet axe. En outre, on trouve facilement que si Δ représente la distance de l'origine O à la droite, la distance d'un point quelconque à cette même droite sera donnée par

$$\delta = \Delta \cdot \frac{\gamma + k\beta - f}{\beta + \gamma}.$$

Enfin, si l'on voulait passer de coordonnées obliques à des coordonnées bipolaires, en désignant par a la cotangente de l'angle que l'axe des y mené en O fait avec l'axe des x, qui est toujours l'axe des pôles OP, et faisant $a' = \sqrt{1 + a^2}$, on trouverait :

$$\frac{x}{p} = \frac{\beta - a}{\beta + \gamma} \text{ et } \frac{y}{p} = \frac{a'}{\beta + \gamma};$$

de sorte que l'équation

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1$$

deviendrait :

$$\frac{p(\beta - a)}{x_0} + \frac{pa'}{y_0} = \beta + \gamma;$$

et si l'on pose :

$$1 - \frac{p}{x_0} = k \text{ et } p\left(\frac{a'}{y_0} - \frac{a}{x_0}\right) = f,$$

l'équation de la droite prendra de nouveau la forme :

$$\gamma + k\beta = f;$$

ici, comme plus haut, si k est constant, toutes les droites représentées par cette équation passeront par un même point de l'axe des pôles.

Indiquons par quelques exemples l'application de la méthode générale de la génération des lignes à ce nouveau système de coordonnées.

Considérons les deux équations

$$(5) \quad \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \begin{cases} \gamma + k\beta = f, \\ \gamma + k'\beta = f', \end{cases}$$

dans laquelle k et k' sont supposés constants, f et f' variables.

Si, entre ces variables, il existe une relation de la forme

$$f^m f'^n = \text{c}^{\text{te}},$$

m et n étant deux nombres entiers, positifs, et premiers entre eux, on pourra éliminer ces variables entre les équations des deux droites, et l'on obtiendra pour lieu de leurs intersections :

$$(\gamma + k\beta)^m (\gamma + k'\beta)^n = \text{c}^{\text{te}}.$$

Cette génération du lieu nous conduit donc au théorème suivant, si nous nous rappelons la signification des paramètres dans le cas où les axes primitifs sont rectangulaires :

THÉORÈME I. *Étant donnés deux axes rectangulaires, et deux points fixes autres que l'origine sur l'un de ces axes, si de ces deux points on mène respectivement deux faisceaux de droites telles que le produit des puissances* m^{me} *et* n^{me} *des segments qu'elles interceptent sur le second axe soit constant, le lieu des intersections de ces droites deux à deux sera généralement une courbe de l'ordre* $\text{m} + \text{n}$, *qui passera par les pôles, les nombres* m *et* n *étant supposés entiers, positifs et premiers entre eux.*

On obtient une conique, si $m = n = 1$;
» une courbe du troisième ordre, si $m = 2$, $n = 1$;
» » du quatrième ordre, si $m = 3$, $n = 1$, etc.

Si, au lieu de se donner entre f et f' la relation

$$f^m f'^n = \text{c}^{\text{te}},$$

on supposait donnée la relation

$$f^m = f'^n \, \text{c}^{\text{te}},$$

m et n étant encore entiers, positifs et premiers entre eux, l'élimination de f et f' entre les équations des deux droites conduirait à

$$(\gamma + k\beta)^m = (\gamma + k'\beta)^n \cdot \text{c}^{\text{te}},$$

ce qui permet d'énoncer le théorème :

THÉORÈME II. *Étant donnés deux axes rectangulaires, et deux points fixes autres que l'origine sur l'un de ces axes, si de ces deux points on mène res-*

pectivement deux faisceaux de droites telles que le rapport des puissances m^{me} *et* n^{me} *des segments qu'elles interceptent sur le second axe soit constant, le lieu des intersections de ces droites deux à deux sera généralement une courbe de l'ordre* m, *les membres* m *et* n *étant supposés entiers, positifs et premiers entre eux, et* $m > n$.

On obtient une droite, si $m = n = 1$;
» une conique, si $m = 2, n = 1$;
» une courbe du troisième ordre, si $m = 3$, $n = 1$ ou 2 ;
» » du quatrième ordre, si $m = 4$, $n = 1$ ou 3, etc.

Enfin, l'on pourrait se donner entre f et f' une relation

$$\Sigma a_1 f^{m_1} f'^{n_1} = c^{te},$$

a_1 étant un facteur constant, m_1 et n_1 des nombres entiers et positifs, et le signe sommatoire s'étendant à un nombre quelconque de termes de même forme, dans lesquels les indices 1 sont successivement changés en 2, 3, etc.

Dans ce cas le lieu des intersections des droites (3) sera évidemment de la forme

$$\Sigma a_1 (\gamma + k\beta)^{m_1} (\gamma + k'\beta)^{n_1} = c^{te},$$

et sera du degré marqué par la plus grande des sommes $m_1 + n_1$, $m_2 + n_2$, etc.

Nous obtenons ainsi un théorème très-général dont l'énoncé, analogue du reste aux deux précédents, est implicitement renfermé dans la dernière équation.

On pourrait appliquer cette méthode en faisant usage de la transformation des coordonnées obliques en coordonnées bipolaires ; mais les théorèmes auxquels on arriverait ainsi seraient fort laborieux à énoncer, et ne différeraient pas, au fond, des précédents.

Un autre mode de génération des courbes, au moyen des intersections de deux faisceaux de droites, peut se déduire également bien des formules de transformation des coordonnées, soit obliques, soit rectangulaires, en coordonnées bipolaires.

Toutefois, les coordonnées bipolaires ne présentant aucun avantage sur les coordonnées rectilignes pour ce mode de génération, nous l'indiquerons

brièvement au moyen de ces dernières. Nous ne l'avons pas donné au chapitre qui traite de ces coordonnées parce que notre intention était de faire découler d'un principe unique les propriétés fondamentales des courbes de tous les ordres. Quant à ces modes de génération accessoires, leur place se trouve plus naturellement ici; au reste, c'est la simplicité seule des formules qui nous fait préférer les coordonnées rectilignes : on pourrait employer absolument de la même manière les coordonnées bipolaires.

Considérons deux faisceaux de droites, les premières partant d'un point y'_0 sur l'axe des y, les secondes d'un point x''_0 sur l'axe de x.

Les équations de ces droites pourront se mettre sous la forme :

$$1 - \frac{y}{y'_0} = \frac{x}{x'_0},$$
$$1 - \frac{x}{x''_0} = \frac{y}{y''_0}.$$

Si nous considérons x'_0 et y''_0 comme des variables, reliées entre elles par une certaine équation, l'élimination de ces variables entre cette équation et les deux précédentes nous donnera l'équation du lieu des intersections des deux faisceaux.

Parmi les relations au moyen desquelles l'élimination est la plus simple, figure en première ligne l'une des deux suivantes

$$x'^m_0 y''^n_0 = \text{c}^{\text{te}} \quad \text{et} \quad x'^m_0 = c \cdot y''^n_0,$$

m et n étant toujours supposés entiers, positifs et premiers entre eux.

Si la première relation est donnée, on aura pour équation du lieu :

$$c\left(1 - \frac{y}{y'_0}\right)^m \left(1 - \frac{x}{x''_0}\right)^n = x^m y^n.$$

Si c'est, au contraire, la seconde, l'équation du lieu sera :

$$cy^n \left(1 - \frac{y}{y'_0}\right)^m = x^m \left(1 - \frac{x}{x''_0}\right)^n.$$

Dans les deux cas, on peut donc énoncer ce théorème :

THÉORÈME III. *Étant donnés deux points sur deux axes fixes, si l'on mène*

par ces deux points respectivement deux faisceaux de droites qui interceptent, sur l'axe qui ne passe pas par le point de concours, des segments dont les puissances respectives m^{me} *et* n^{me} *forment un produit ou un rapport constant, le lieu de leurs intersections sera généralement une courbe de l'ordre* $m + n$.

Ce théorème n'est qu'une extension d'un mode connu de génération des coniques.

Nous n'insisterons pas davantage sur toutes les manières possibles d'engendrer des courbes au moyen des intersections de faisceaux de droites; les quelques exemples que nous en avons donnés montrent le rôle essentiel que jouent, dans la plupart de ces générations, et l'*analogie*, sur laquelle nous avons cru superflu de revenir encore dans l'énoncé des théorèmes, et la méthode des coefficients indéterminés, ou des paramètres variables, pour nous servir d'une expression dont le sens est moins amphibologique. Ces exemples permettront à un lecteur un peu exercé d'appliquer immédiatement ces deux procédés, dont la réunion constitue surtout notre méthode, à une multitude d'autres cas.

A mesure que nous avançons et que nous pénétrons davantage l'esprit de la méthode, nous voyons que la série des théorèmes auxquels elle peut conduire semble inépuisable; c'est une raison pour nous de nous borner aux plus importants; nous terminerons donc ces applications par l'extension du théorème de Newton, et nous indiquerons ensuite quelle est la voie qui nous semble devoir conduire à l'édification complète d'une géométrie des courbes planes au moyen des seuls principes fort simples dont nous avons fait usage jusqu'à présent.

Fig. IX. Considérons deux rayons vecteurs bipolaires faisant avec l'axe des pôles les angles φ_1 et ψ_1 dont nous désignerons les cotangentes par β_1 et γ_1; et deux autres rayons vecteurs faisant respectivement avec les deux premiers des angles constants A et B, additifs ou soustractifs, dont les cotangentes seront désignées par p et q, et faisant avec l'axe des pôles des angles φ et ψ de cotangentes β et γ; de sorte que

$$\varphi_1 = \varphi + A, \quad \psi_1 = \psi + B;$$

d'où

$$\beta_1 = \frac{\beta p - 1}{\beta + p}, \quad \gamma_1 = \frac{\gamma q - 1}{\gamma + q}.$$

De ces formules résulte immédiatement que, s'il existe entre β_1 et γ_1 une relation du n^{me} degré, entre β et γ il en existera une qui sera généralement, mais au plus, du degré $2n$, et qui pourra se réduire à un degré moindre dans des cas particuliers; d'où le théorème suivant, qui est l'extension de celui de Newton :

THÉORÈME IV. — EXTENSION DU THÉORÈME DE NEWTON. *Si deux angles de grandeur constante tournent autour de leurs sommets de manière que l'intersection de deux de leurs côtés parcoure une courbe du* n^me^ *ordre, les trois autres points d'intersection des quatre côtés parcourront, chacun, une courbe qui sera généralement, mais au plus, de l'ordre* 2n.

CAS PARTICULIER. Si nous nous arrêtons un instant au théorème propre de Newton, qui est relatif au cas où l'intersection des deux côtés parcourt une droite

$$\gamma_1 + k\beta_1 = f,$$

nous verrons aisément que le terme en $\beta\gamma$ de l'équation de la conique a pour facteur $q - kp - f$, de sorte que si ce terme est nul, c'est-à-dire si les angles A et B sont tels que les rayons vecteurs d'un point du lieu cherché se coupent sur la droite donnée, ce lieu se réduira à une droite, comme l'a fait remarquer Newton.

NOUVEAUX CAS PARTICULIERS. Mais l'analyse signale d'autres cas particuliers où le lieu se réduira à une droite et à l'axe des pôles; ce sera quand le terme constant de son équation, qui est $kp + q$, ainsi que le facteur de β, qui est $fq - kpq + 1$, ou celui de γ, qui est $fp + k - pq$, viendront à disparaître ensemble.

Cet exemple fort simple montre combien l'analyse pénètre plus aisément que les autres méthodes jusqu'au cœur de la question; les cas particuliers suivants nous en donneront encore d'autres exemples.

Supposons que la relation donnée entre β_1 et γ_1 soit

$$\beta_1\gamma_1 + m\beta_1 + n\gamma_1 = C,$$

ce qui est l'équation d'une conique passant par les pôles ; entre β et γ nous aurons :

$$\left(\frac{\beta p - 1}{\beta + p}\right)\left(\frac{\gamma q - 1}{\gamma + q}\right) + \text{etc.} = C;$$

d'où l'énoncé suivant, donné par Chasles (*), Steiner (**) et Brasseur (***) :

THÉORÈME V. *Si deux angles de grandeur constante tournent autour de leurs sommets de manière que le point d'intersection de deux de leurs côtés parcoure une section conique passant par leurs sommets, les trois autres points d'intersection des côtés de ces angles décriront chacun en particulier, une section conique passant aussi par les deux sommets.*

Notre démonstration semble au premier abord n'être relative qu'au point d'intersection des seconds côtés des deux angles ; on l'étend aisément aux deux autres points en faisant A ou B égal à zéro, d'où p ou $q = \infty$.

CAS PARTICULIERS. Ici encore l'analyse signale un cas particulier remarquable, celui dans lequel la constante C est égale à pq ; alors le lieu des intersections des seconds côtés des angles est une droite. Le lieu des deux autres points d'intersection sera aussi une droite, pour le premier de ces points déterminé par

$$A = 0, \quad \text{si} \quad C = q;$$

pour le second déterminé par

$$B = 0, \quad \text{si} \quad C = p.$$

Ces cas particuliers constituent la réciproque du théorème de Newton.

Supposons maintenant que les angles φ_1 et ψ_1 forment une somme ou une différence constante ; nous pourrons donc poser

$$\cot(\varphi \pm \psi) = C$$

ou

$$\beta\gamma \mp 1 = C(\beta \pm \gamma),$$

ce qui est l'équation d'une conique. Donc :

THÉORÈME VI. *Si deux angles de grandeur constante tournent autour de*

(*) *Aperçu historique*, p. 337.

(**) *Systematische Entwickelung geometrischer Gestalten*, p. 299, art. 16.

(***) *Sur une nouvelle méthode d'application de la géométrie descriptive à la recherche des propriétés de l'étendue*, art. 250 ; MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, t. XXIX.

leurs sommets de manière que deux de leurs côtés fassent avec la droite qui unit leurs sommets des angles dont la somme ou la différence est constante, les trois autres points d'intersection des côtés de ces angles décriront, chacun en particulier, une section conique.

La démonstration qui précède n'est relative qu'au point d'intersection des seconds côtés des deux angles; on l'étendra aux deux autres points, comme on l'a fait dans le théorème V, en partant de

$$\cot(\varphi_1 \pm \psi_1) = \frac{\beta_1\gamma_1 \mp 1}{\beta_1 \pm \gamma_1} = C,$$

et en substituant à β_1 et γ_1 leurs valeurs

$$\beta_1 = \cot(\varphi + A) = \frac{\beta p - 1}{\beta + p}; \quad \gamma_1 = \cot(\varphi + B) = \frac{\gamma q - 1}{\gamma + q},$$

et faisant enfin p ou $q = \infty$.

Ce théorème a été donné sous une autre forme par M. Chasles (*) pour le premier cas, celui d'une somme constante; pour le cas d'une somme ou d'une différence constante par Steiner (**); l'analyse étend intuitivement le théorème, dans toute sa généralité, aux deux cas; elle signale aussi immédiatement les cas particuliers qui peuvent se présenter, et qui sont trop simples pour que nous nous y arrêtions. Enfin elle permet de donner à tout théorème une forme tellement générale qu'aucune autre méthode, nous semble-t-il, ne pourrait y atteindre.

Ainsi le théorème V est susceptible de la généralisation suivante :

THÉORÈME VII. — EXTENSION DU THÉORÈME V. *Si deux angles de grandeur constante tournent autour de leurs sommets de manière que le point d'intersection de deux de leurs côtés parcoure une courbe du* n^me^ *ordre passant par leurs sommets, les trois autres points d'intersection des côtés de ces angles décriront, chacun en particulier, une courbe du même ordre passant aussi par les deux sommets.*

En effet, en prenant pour pôles les deux sommets fixes, nous aurons pour

(*) *Traité des sections coniques*, art. 91.

(**) Lieu cité, p. 300, art. 18.

une courbe du n^{me} ordre passant par les pôles, une équation que nous pourrons mettre sous la forme :

$$\Sigma a' \beta_1^{m'} \gamma_1^{n'} = C,$$

où le signe sommatoire s'étend à un nombre quelconque de termes de même forme dans lesquels la somme des exposants ne dépasse pas n ; et il est clair qu'en remplaçant

$$\beta_1 \text{ par } \frac{\beta p - 1}{\beta + p}, \quad \gamma_1 \text{ par } \frac{\gamma q - 1}{\gamma + q},$$

la nouvelle équation sera au plus du n^{me} degré.

Le théorème (VI) peut de même se généraliser de la manière suivante :

THÉORÈME VIII. — EXTENSION DU THÉORÈME VI. *Si deux angles de grandeur constante tournent autour de leurs sommets de manière que deux de leurs côtés fassent avec la droite qui unit leurs sommets des angles* φ_1 *et* ψ_1 *dont les multiples* $m\varphi_1$ *et* $n\psi_1$ *forment une somme algébrique constante, les trois autres points d'intersection de ces angles décriront, chacun en particulier, une courbe qui sera généralement, mais au plus, du* $(m + n)^{me}$ *ordre,* m *et* n *étant entiers, positifs et premiers entre eux.*

En effet, puisqu'on a par hypothèse

$$m\varphi \pm n\psi = C',$$

l'on en tirera

$$\cot m\varphi = \frac{a \cot n\psi \mp 1}{a \pm \cot n\psi},$$

pour l'équation du lieu cherché, a désignant la cotangente de l'angle $C' = C - mA \mp nB$. Or si l'on développe $\cot m\varphi$ et $\cot n\psi$ suivant les puissances de $\cot\varphi$ et $\cot\psi$, il est clair que l'équation sera du degré $m + n$, *c. q. f. d.*

CAS PARTICULIER. On voit aisément qu'elle s'abaissera au m^{me} degré (m étant supposé plus grand que n) si $a = \infty$ c'est-à-dire si

$$mA \pm nB = C = m\varphi_1 \pm n\psi_1,$$

ou si la somme algébrique des multiples de φ_1 et ψ_1 est égale à celle des mêmes multiples des angles constants A et B.

Nous proposerons encore au lecteur de démontrer et d'étendre le théorème suivant qui est une autre forme plus générale du théorème de Newton.

THÉORÈME IX. *Si deux angles d'un triangle tournent autour de leurs sommets de manière que deux de leurs côtés se coupent sur une droite passant par le troisième sommet, les droites qui unissent deux à deux les points d'intersection des côtés de ces angles avec les côtés opposés du triangle se couperont sur une conique.*

Ainsi soient un triangle ABC et les deux angles $m_1Am_2 = A$; $m_1Bm_2 = B$ tournant autour de A et B de manière que Am_1 et Bn_1 se coupent sur la droite fixe Cp ; si l'on unit les points m_1, n_1 et m_2, n_2, ou m_1, n_2 et m_2, n_1, par des droites, les points d'intersection des deux premières et des deux secondes décriront chacun une conique. Fig. X.

Enfin, si l'on veut étendre le théorème général déduit par M. Chasles (*) de sa propriété anharmonique des points d'une conique, le système des coordonnées bipolaires conduira aisément à l'énoncé suivant :

THÉORÈME X. *Étant donnés dans un plan deux transversales et deux points fixes quelconques sur chacune d'elles ; si autour de deux pôles fixes on fait tourner deux droites qui déterminent sur les deux transversales respectivement deux segments* s_1 *et* t_1, s_2 *et* t_2 *tels que*

$$\left(\frac{s_1}{t_1}\right)^m + \lambda\left(\frac{s_2}{t_2}\right)^n = \mu,$$

λ *et* μ *étant deux constantes,* m *et* n *deux nombres entiers et positifs ; le point de concours des deux droites mobiles engendrera une courbe de l'ordre* $(m + n)$ *qui passera par les deux pôles.*

Nous n'avons pas fait usage, dans ce système de coordonnées, de la méthode générale que nous avons employée dans celui des coordonnées rectilignes, parce qu'elle ne nous aurait pas conduit à des théorèmes essentiellement différents de ceux que nous avons démontrés. La forme seule de l'expression analytique eût changé, et surtout celle de l'involution de $3n$ points, qui apparaîtrait, dans ce nouveau système de coordonnées, comme une relation angulaire, au lieu d'être une relation de segments. Peut-être cette

(*) *Aperçu historique*, p. 339.

autre manière de l'exprimer conduirait-elle à d'autres conséquences; mais en nous livrant à cette recherche, nous nous écarterions du but de ce travail qui est, non pas la recherche de propriétés nouvelles, mais l'édification d'une méthode destinée à faire découvrir ces propriétés.

La même raison nous engage à supprimer complétement les énoncés et les démonstrations des théorèmes corrélatifs de ceux auxquels nous a conduit l'emploi des coordonnées bipolaires. On a vu, au chapitre des coordonnées tangentielles, la méthode générale qui permet de passer d'un lieu géométrique du n^{me} ordre, défini par un système de points, à un lieu de la n^{me} classe, défini par un système de tangentes.

Cette méthode appliquée au système de coordonnées bipolaires conduirait immédiatement aux théorèmes corrélatifs des précédents.

Avant de terminer l'application de notre méthode à l'étude des courbes planes, nous en indiquerons encore une fois les caractères généraux, qui pourront être saisis plus aisément après les divers exemples que nous en avons donnés.

Une ligne courbe peut être considérée, soit comme le lieu géométrique d'un système de points, soit comme l'enveloppe d'un système de tangentes.

Occupons-nous d'abord de la première génération.

Pour qu'un point engendre une ligne, il faut qu'il varie de position suivant une loi déterminée, et par suite que les éléments qui déterminent la position de ce point soient variables, et qu'il existe entre eux une relation telle qu'en donnant à l'un d'entre eux une valeur arbitraire, les autres soient complétement déterminés.

De ce principe résulte la classification des différents modes de génération d'une courbe au moyen d'un point mobile. Ce point peut en effet :

1° Être déterminé de position par différents éléments;

2° Varier de position en vertu de différentes lois ou relations entre ces éléments.

La combinaison de tous ces modes constitutifs de génération entre eux conduirait évidemment à toutes les courbes possibles; et l'étude de chaque système de courbes sera le plus simple quand on aura trouvé l'expression la plus simple des deux modes constitutifs de sa génération.

Il est clair que chacun des modes de détermination d'un point pourrait se réduire à l'un quelconque d'entre eux; mais si l'on faisait cette réduction, la loi simple qui existait entre les éléments du premier mode affecterait une forme généralement plus compliquée, parce qu'on devrait l'exprimer au moyen des éléments du dernier; c'est ainsi que la loi simple qui relie les coordonnées polaires d'un point d'une spirale deviendrait fort compliquée si l'on exprimait ces coordonnées en fonction de coordonnées rectilignes par exemple. C'est pour cette raison que, loin de vouloir réduire à un seul les modes de détermination du point, l'on doit, au contraire, étudier la génération des courbes dans chacun de ces modes; et si la géométrie analytique a paru, à quelques esprits distingués, moins riche que la géométrie synthétique, c'est qu'ils ont cru, à tort, qu'elle était plus bornée de sa nature dans les modes de détermination du point (*).

Nous devons donc, pour établir dans un système ordonné la génération des courbes planes, commencer par rechercher quels sont tous les modes possibles de détermination du point dans le plan.

Or un point n'est déterminé de position que par rapport à d'autres points

(*) Les lignes qui suivent, extraites du mémoire de Brasseur, tout en confirmant notre opinion, témoignent de la profondeur de vues de ce géomètre éminent que nous sommes heureux d'avoir eu pour maître, et dont nous signalons avec admiration et reconnaissance les travaux à l'attention des amis de la géométrie.

« Les systèmes de lignes mentionnés dans les théorèmes précédents, font en géométrie synthétique, le même office que les systèmes de coordonnées rectilignes en géométrie analytique; et l'on voit que la géométrie synthétique est beaucoup plus riche en systèmes de coordonnées que ne l'est la géométrie analytique.

» En outre, la géométrie synthétique sait tirer un plus grand parti d'un même système de lignes considérées comme ordonnées. C'est ainsi qu'en n'ayant recours qu'à des systèmes de lignes droites, pour définir par des relations descriptives les courbes du second degré, on pourra le faire : 1° par l'intersection de deux systèmes de droites respectivement parallèles à deux droites fixes; 2° par l'intersection de deux systèmes de droites qui concourent respectivement en deux points fixes; 3° par l'intersection d'un système de droites parallèles avec un système de droites qui concourent en un même point; 4° par un seul système de droites tangentes à une même courbe du second degré. A cela nous ajouterons que parmi les divers systèmes de lignes qui, par leurs intersections, produisent un même lieu géométrique, on pourra remarquer que plus le degré de ces lignes (ordonnées) est élevé, et plus est simple l'énoncé des conditions auxquelles doivent satisfaire ces deux systèmes de lignes pour produire ce lieu géométrique. » Brasseur, l. cit., art. 38.

supposés fixes. Mais cette détermination nécessite l'introduction d'un élément autre que le point : c'est la distance, qui, avec l'idée de la droite, donne en même temps celle de la direction.

Le point et la droite, tels sont donc les deux éléments primitifs de la génération des courbes planes.

La position du point pourra se déterminer, au moyen de conventions auxiliaires, par ses distances, soit à deux points, soit à deux droites fixes, soit à un point et à une droite fixes; et en se donnant, entre ces deux distances, certaines relations, on déterminera déjà un nombre illimité de lignes planes.

Ces lignes, prises deux à deux, formeront de nouveaux systèmes au moyen desquels on pourra déterminer la position d'un point; ainsi, pour ne prendre que quelques exemples, on pourra déterminer un point;

1° Par une droite sur laquelle il est situé, et par sa distance à un point de cette droite; et cette droite elle-même, ainsi que l'origine des distances, pourront être déterminées de différentes manières;

2° Par la distance de ce point à un autre point donné, et par l'angle que la direction de cette distance fait avec une direction donnée, le point et la direction donnés pouvant être déterminés de différentes manières.

3° Par l'intersection de deux droites données, ces deux droites pouvant être également déterminées de différentes manières;

4° Par l'intersection de deux quelconques des lieux déterminés précédemment.

En faisant varier suivant une loi déterminée les deux éléments qui fixent la position d'un point, on obtiendra de nouveaux lieux géométriques; et il va de soi que l'on pourrait procéder indéfiniment de cette manière.

La loi qui relie entre eux les deux éléments de la détermination du point est la définition même du lieu géométrique engendré par ce point, et l'expression analytique de cette loi est l'équation du lieu. Les propriétés de celui-ci résulteront de l'étude de son équation au moyen des propriétés précédemment connues des éléments de détermination du point.

Ces propriétés sont de deux natures, les unes descriptives, les autres métriques.

Les premières peuvent toujours se déduire de l'équation même, quels que

soient les éléments de détermination qu'on emploie; quant aux secondes, il importe, pour qu'on puisse les découvrir aisément, que l'expression analytique de ces éléments renferme déjà en elle-même une relation métrique. C'est ainsi que, dans le système des coordonnées rectilignes, où les deux éléments sont des droites, on arrive aisément aux théorèmes de Pappus et de Desargues, à cause des relations métriques qu'il est aisé de découvrir dans l'équation même de la droite.

Si l'on réalisait ce programme, on voit que l'on arriverait à une classification systématique de toutes les courbes engendrées par le mouvement d'un point; mais ce programme est nécessairement illimité, et la géométrie supérieure ne peut donc pas avoir pour objet de le réaliser, mais d'indiquer les méthodes au moyen desquelles on peut arriver aux propriétés de quelque courbe donnée que ce soit.

C'est aussi là l'objet que nous avons eu en vue en traitant les exemples qui précèdent, et la méthode à suivre dans l'étude de la courbe donnée géométriquement peut se résumer dans cette règle :

On commence par chercher, dans la définition même de la courbe, quels sont les éléments qui déterminent de la manière la plus simple la position d'un de ses points, et qui ont en même temps entre eux la relation la plus simple en vertu de la définition donnée; on recherchera quelles sont les relations métriques qui sont implicitement contenues dans l'expression analytique de ces éléments; et l'étude de l'équation de la courbe au moyen des équations de ces éléments et des propriétés descriptives et métriques de ceux-ci, conduira aux propriétés descriptives et métriques de la courbe.

Il nous resterait à développer également la génération d'une courbe considérée comme l'enveloppe d'une droite mobile; mais, comme nous l'avons déjà fait observer, et comme il ressort du reste à l'évidence du principe de dualité, à chaque système d'éléments qui déterminent la position d'un point, correspond un système d'éléments tangentiels; et par suite à toute propriété, soit descriptive, soit métrique, d'une courbe engendrée par le mouvement d'un point, répond une propriété corrélative d'une courbe engendrée par le mouvement d'une droite.

Nous avons, dans le livre qui précède, étendu, au moyen d'une analyse fort simple, les théorèmes fondamentaux de la haute géométrie aux courbes supérieures planes, pour lesquelles la plupart de ces théorèmes n'avaient pas encore été découverts, malgré la profondeur et la pénétration des géomètres qui, depuis le commencement de ce siècle, ont fait faire à la science plus de progrès qu'elle n'en avait réalisés depuis la grande époque de Descartes, Pascal, Desargues et Newton. Il nous a paru superflu de revenir sur les théorèmes qui, comme celui de Carnot et celui de Cotes, s'appliquent de la manière la plus générale à toutes les courbes algébriques planes.

La méthode que nous avons suivie nous a conduit également à d'autres propriétés fort intéressantes et très-générales, que nous publierons prochainement, mais que nous n'avons pas encore classées de manière à les faire rentrer dans le cadre de ce travail. C'est pourquoi nous préférons borner ici notre étude des courbes planes.

Dans le livre suivant, nous étendrons aux surfaces algébriques, pour autant que cette extension leur soit applicable, les théorèmes de Pappus et de Desargues, ainsi que leurs corrélatifs, les théorèmes de Pascal et de Brianchon, et enfin le théorème de Newton.