

Artikel

Mathematische Existenz : Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene

Becker, Oskar

in: Jahrbuch für Philosophie und
phänomenologische Forschung | Jahrbuch für
Philosophie und phänomen...

330 Seite(n) (439 - 768)

Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:

Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: info@digizeitschriften.de

Mathematische Existenz.

**Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer
Phänomene.**

Von Oskar Becker (Freiburg i. B.).

Vorbemerkung.

Der Ausdruck »Mathematische Existenz« entstammt der mathematischen Fachsprache und diese Arbeit geht auch von diesem Wortgebrauch innerhalb der positiven Wissenschaft aus. Aber ihre Absicht ist nichtsdestoweniger eine philosophische; sie ist nämlich auf die Ergründung des Seinsfinns der mathematischen Phänomene gerichtet. Sie umfaßt nicht nur logische, sondern gerade in den Teilen, auf die ich am meisten Gewicht legen möchte, ontologische Untersuchungen. Der Ausdruck »ontologisch« ist nicht gemeint im Sinne des Rationalismus des 17. und 18. Jahrhunderts, auch nicht im Sinne einer Wesensbetrachtung, die sich konstitutiv-phänomenologischer Untersuchung noch enthält, sondern er soll gerade die konstitutive Fragestellung selbst und in gewissem Sinne sogar noch mehr oder wenigstens eine besonders konkrete Form konstitutiven Fragens bezeichnen. Es wird in dieser Arbeit weitgehend außer den natürlich gerade bei mathematischen Gegenständlichkeiten zunächst grundlegenden Methoden der formalen, transzendental-konstitutiven Phänomenologie (so, wie in Husserls »Logischen Untersuchungen« und »Ideen zu einer reinen Phänomenologie« ihren heute bereits klassisch gewordenen Ausdruck gefunden hat) die von Heidegger begründete Forschungsweise der hermeneutischen Phänomenologie verwandt. (Vergl. dessen Abhandlung »Sein und Zeit« in diesem Jahrbuchband). Heidegger bezeichnet mit »Ontologie« die »Hermeneutik der Faktizität«, die Auslegung menschlichen Daseins. Und so ist auch in der gegenwärtigen Untersuchung immer wieder versucht worden, die »mathematische Existenz« in den Zusammenhang menschlichen Daseins hineinzustellen, der als der allenthalben grundlegende Interpretationszusammenhang überhaupt anzusehen ist. Freilich ist damit von vornherein die Frage nach dem Seinsinn des $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$, des »Mathematischen« im allgemeinsten Sinn, hingedrängt auf den Ansatz des $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ als $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\sigma\iota\varsigma$ als »Mathematifizierendes Dasein«. Das »Mathematifizieren« ($\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{\epsilon}\nu\epsilon\sigma\theta\alpha\iota$) analog dem Philosophieren selbst oder etwa auch dem Musizieren, als eine Weise des lebendigen Daseins des Menschen, ist das Thema phänomenologischer Interpretation

und kann allein nur Thema einer wirklichen Interpretation sein. Die Mathematik erscheint als der Niederschlag »mathematisierenden« Lebens, so wie die Kunst Niederschlag des künstlerisch schaffenden Lebens ist.

Aber, so sehr sie das ist, ist die Mathematik sonst nichts? Geht sie nicht gerade am ehesten von allen menschlichen Betätigungen auf Gegenständliches, Ob-jektives, An-sich-ewig-Seiendes? Es läßt sich nicht leugnen, daß »μάθημα« (trotz aller seiner Gebundenheit an verbale *μανθάνειν*, die es zum *νόημα* stempelt) auch diesen rein gegenständlichen Sinn hat. Es ist die Frage nicht abzuweisen, was es denn befehle, daß die »äußere Welt« doch offenbar von mathematischer Harmonie in ungeahntem, sich mit jedem neuen Fortschritt der Wissenschaft für uns ins Unermeßliche steigenden Maße durchherrscht und durchleuchtet ist. Dieses große Problem der Existenz des Mathematischen in der Natur, das durch die schon seit Jahrhunderten andauernden, gar nicht selbstverständlichen Erfolge der theoretischen Physik gestellt wird, bleibt als ungelöstes Rest unserer konstitutiven und hermeneutischen Untersuchungen bestehen. Prinzipiell in ganz ähnlicher Weise folgt auch in der Kantischen Philosophie die Kritik der teleologischen Urteilskraft noch auf die Kritik der reinen Vernunft (die im Grunde die [kantischen] Konstitutionsprobleme alle schon erledigt hat). Für dieses Restproblem ist weder die konstitutive noch die hermeneutische Analyse eine zureichende Methode; es verdient den Namen einer im eigentlichen Sinn metaphysischen Fragestellung, der man sich – vielleicht – auf dem Wege der Natur-Deutung, eines Verfahrens, das nicht mit irgend einer Art von Auslegung zusammenfällt, nähern kann. In der gegenwärtigen Schrift bezeichnet dieses Problem nur die Grenze, die von der Untersuchung nicht überschritten wird. –

Wenn auch das eigentliche Thema der Abhandlung, wie angedeutet, ein philosophisch-prinzipielles ist, so geht die Betrachtung doch aus von der aktuellen und bis zu einem gewissen Grade natürlich zufälligen Problemlage der gegenwärtigen mathematischen Grundlagenforschung. Der Streit zwischen dem »Intuitionismus« (Brouwer) und dem »Formalismus« (Hilbert) dient als Anknüpfungspunkt der Untersuchung. Das Ergebnis entscheidet für den Intuitionismus und seine »sachliche« Mathematik, die allein wirkliche Phänomene entdeckt, die originärer und adäquater Anschauung zugänglich und existenzialer Auslegung fähig sind. Insbesondere erweist sich das Unendliche in der Form des Prozesses, und zwar nicht bloß des indefiniten sondern auch des transfiniten, als ein echtes

Phänomen des reinen formalen Bewußtseins und auch sogar des konkreten historischen Daseins; es ist sowohl der konstitutiven Analyse wie der ontologischen Interpretation erreichbar. Aber es ist freilich nicht zu verkennen, daß diese Entscheidung von den Schranken, die sich die Untersuchung selbst auferlegt, bedingt ist. Es ist keineswegs gesagt, daß die »Sachlichkeit« für das »metaphysische« Problem der Natur-Deutung, das im vorigen berührt wurde, noch dieselbe entscheidende Rolle spielt wie für die Interpretation im Zusammenhang historischen Daseins. Es muß insbesondere späterer Forschung vorbehalten bleiben, die Rolle zu klären, die der neuerdings von H. Weyl auf Grund der Hilbertschen Forschungen vertretenen Idee einer rein symbolischen Mathematik im Zusammenhang mit der Frage deutenden Naturerkennens zukommt. Die zum Teil scharfe Kritik, die an Hilberts Philosophie der Mathematik in dieser Arbeit geübt wird, läßt also nicht nur (was eigentlich selbstverständlich ist) die hohe Bedeutung der tiefen mathematischen Gedanken Hilberts unangetastet (sie gibt ihnen nur eine von der eigenen Auffassung Hilberts vielfach abweichende Deutung, die aber zeigt, in wie erstaunlichem Maße gerade die »formalistischen« Forschungen Hilberts zum Kontinuumproblem von sachlicher Bedeutung sind), sondern sie hält auch die Möglichkeit einer »metaphysischen« Bedeutung der Hilbertschen transfiniten Mathematik offen. Nur darf man die »Seinsart« der »transzendenten« metaphysischen Gegenständlichkeiten, die jenseits der phänomenologisch ausweisbaren »immanenten« Sachlichkeit liegen, nicht mit eben jener uns aus den bisher angestellten konstitutiven und hermeneutischen Untersuchungen vertrauten phänomenologischen Sachlichkeitverwechseln.

Es handelt sich da um »Gegenstände«, die in gewissem Sinne nach Platons Worten *ἐπέκεινα τῆς οὐσίας*, »jenseits des Seinsfinns« — sind, so paradox dies auch klingt; Dinge die eine von der bisher betrachteten radikal verschiedenen transphänomenale, wenn auch vielleicht nicht metaphänomenologische »neue Sachlichkeit« an sich tragen.

Und so ist es ein Hauptziel dieser Arbeit, ein unbefonnenes Hineingleiten in eine methodisch unklare »Metaphysik« zu verhindern, das Einschneidende der Grenze, die vor jenem »Jenseits« liegt, zu betonen und die Geschlossenheit, die auch hier den konstitutiv-hermeneutischen Problemkreis auszeichnet, zur Geltung zu bringen. Der Weg über jene Grenze hinaus, den die Forschung vielleicht schon bald zu beschreiten genötigt sein wird, soll und wird dadurch nicht versperrt werden.

Wie jede phänomenologische Arbeit, ist auch die vorliegende methodisch und inhaltlich in so weitem Umfang grundlegenden Forschungen Hufferls (die leider nur zum kleinsten Teil veröffentlicht sind) in erster Linie verpflichtet. Dies gilt von fast allen Teilen der Abhandlung; besonders hervorgehoben sei die Urteilstheorie (§ 4 a), die Unterscheidung von »Wahrheit« und »Konsequenz« (§ 4 b) und der Begriff der »Stufencharakteristik« (bei der phänomenologischen Analyse des transfiniten Prozesses in § 5 a).

Für die hermeneutischen, d. h. die wesentlich ontologischen Teile (insbesondere § 6 a, b und teilweise auch § 5 a und 6 c) gebührt mein Dank den bahnbrechenden Untersuchungen Heideggers. Sie konnten im allgemeinen noch nicht in der jetzt vorliegenden, abschließenden Fassung, wie sie in »Sein und Zeit« sich darstellt, benutzt werden, sondern gehen auf Vorlesungen und Übungen vor allem seiner Freiburger Lehrtätigkeit 1919 – 1923 zurück. Trotzdem habe ich nachträglich einige wenige Einzelhinweise auf »Sein und Zeit« zur Erleichterung des Verständnisses für den Leser hinzugefügt. Die hermeneutische Analyse der Zeitlichkeit ist nach einem im Juli 1924 in Marburg gehaltenen Vortrag dargestellt. Es sei noch bemerkt, daß aus verschiedenen Gründen meine Terminologie nicht überall den oft subtilen Unterscheidungen Heideggers genau folgt; so z. B. unterscheide ich nicht »ontologisch« und »ontisch« und gebrauche die Termini »Dasein«, »Existenz« u. ä. nicht in der scharfen Begrenzung wie er.

Was am Schlusse der Arbeit (im § 6 c IV, am Ende) über die Idee einer symbolischen, Natur deutenden Mathematik gesagt wird, verdankt entscheidende Anregungen der neuesten philosophischen Schrift H. Weyls¹ und außerdem mir liebenswürdiger Weise zuteil gewordenen brieflichen Äußerungen. Für wertvollste Hilfe zum Verständnis Leibnizens (vgl. § 6 c III E) bin ich endlich D. Mahnes bekannten Arbeiten, die ihr Verfasser durch einige für mich sehr lehrreiche briefliche Mitteilungen freundlicherweise ergänzte, zu großem Danke verpflichtet.

1) »Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft« (Handbuch der Philosophie, her. v. H. Bäumler u. M. Schröter, München u. Berlin 1926, Abt. II, Beitrag A.); die Schrift erschien leider zu spät, um außer in § 6 c IV noch systematisch benutzt werden zu können. – Ebenso konnte die wichtige Abhandlung J. v. Neumanns »Zur Hilbertschen Beweistheorie« (Math. Zeitsch. Bd. 26, S. 1 ff. [1927], die gerade in einem für mich bedeutsamen Punkte den Hilbert-Bernayschen Standpunkt modifiziert, nur noch im »Mathematischen Anhang« am Schluß der Arbeit berücksichtigt werden.

§ 1.

Der gegenwärtige Streit um die Grundlegung der Mathematik.

Der Begriff der mathematischen Existenz ist derjenige unter allen mathematischen Begriffen, der am deutlichsten verrät, wo die philosophischen Fragwürdigkeiten in der mathematischen, scheinbar so fest gegründeten Wissenschaft beginnen. Er gewährt daher am ehesten die Möglichkeit, zu untersuchen, welches die philosophischen Wurzeln der mathematischen Theorienbildungen sind, d. h. was den Sinn des Seins mathematischer Gegenständlichkeit und mathematischer Fragestellung ausmacht.

Man darf nicht hoffen, diesen Grundbegriff in den programmatischen Erklärungen philosophischer Färbung, welche die um die Grundlagen ihrer Wissenschaft bekümmerten Mathematiker ihren Darlegungen zuweilen vorausszuschicken pflegen, voll zu erfassen. Er wird nur da klar ans Licht treten, wo er in der ihm eigentümlichen Leistung für das Entstehen der Theorie beobachtet werden kann. Deshalb ist es erforderlich, eine Schilderung und Würdigung der tatsächlichen Leistungen der gegenwärtigen mathematischen Grundlagenforschung den weiteren Darlegungen vorausszuschicken. Im Verlaufe dieser kritischen Bemühungen zeigt sich dann, daß die leitenden Gesichtspunkte für die Forschungen der gegenwärtigen Mathematiker nicht etwa unserer heutigen Zeit eigentümlich sind, sondern aus historischen Wurzeln entspringen, die bis in die griechische Philosophie und Mathematik hinabreichen. Sofern eine echte philosophische Klärung ohne richtig verstandene historische Befinnung niemals wird geleistet werden können, erweist sich damit eine Untersuchung der antiken Anschauungen über mathematische Existenz als unentbehrlich. Erst nach diesen Voruntersuchungen wird man genügend vorbereitet sein, um an die eigentlichen philosophischen Fragen herantreten zu können.

Die gegenwärtige geistesgeschichtliche Lage der Philosophie der Mathematik ist nun am schärfsten gekennzeichnet durch eine gewisse Streitfrage, die um das Prinzip der Grundlegung der mathematischen Wissenschaften entstanden ist. Es erscheint daher geboten, mit einer Darstellung dieses fundamentalen Streitpunktes zu beginnen, den man durch die Doppelfrage kennzeichnen kann: »Soll die Mathematik intuitiv oder formal-axiomatisch begründet werden?«

Nachdem es in den 70er Jahren des 19. Jahrhunderts anscheinend gelungen war, die höhere Analysis nach langen vergeblichen Versuchen mit derselben Strenge zu begründen wie die elementare Mathematik (G. Cantor, Dedekind, Meray, Weierstraß), schritt man zu dem Unternehmen fort, die Lehre von den natürlichen Zahlen im Zusammenhang mit der von Cantor mit erstaunlicher Kühnheit geschaffenen Lehre von den unendlichen Mengen ihrerseits auf eine angemessen erweiterte formale Logik zu begründen (G. Frege, B. Russell). Dies mißlang jedoch, indem sich innerhalb der anscheinend ungebührlich ausgedehnten formalen Logik selbst unlösbare Widersprüche ergaben, die sogenannten »Antinomien der Mengenlehre« (Burali-Forti, Russell usw.). Trotz mannigfacher, mehr oder weniger geglückter Versuche von seiten der formalen Logiker, diese Widersprüche aus der Welt zu schaffen (Frege, Russell, J. König u. a.), wurde dadurch das Vertrauen in die Möglichkeit einer rein logischen Begründung der gesamten Mathematik stark erschüttert. Man suchte einen Ausweg teils in Begründungen nach axiomatischer Methode (Zermelo für die Mengenlehre, Hilbert für die Arithmetik), teils brach sich die Überzeugung Bahn, daß Logik und Arithmetik eine unlösbare Einheit bilden und daher nur gemeinsam begründet werden können (H. Poincaré, Hilbert, Brouwer, Weyl), eine Ansicht, die schon immer in den Kreisen der schöpferischen, der Grundlagenforschung ferner stehenden Mathematiker verbreitet war. Hier ist nun der gemeinsame Ausgangspunkt der verschiedenen Richtungen der gegenwärtigen Grundlagenforschung erreicht, die nun in ihrer Gegenfälligkeit zu schildern und zu würdigen sind. Es handelt sich hierbei um zwei einander gegenüberstehende Grundauffassungen der Aufgaben und Lösungsmethoden des Grundlegungsproblems der Mathematik, die man mit den Namen des »Intuitionismus« und des »(axiomatisierenden) Formalismus« zu bezeichnen pflegt.¹ Diese sind nun der Reihe nach zu erörtern.

a) Der Intuitionismus.

Wie ihr Name sagt, legt diese Auffassung entscheidendes Gewicht auf die *Anschauung* (intuitio), die allerdings nicht als »finnliche« oder »empirische« Anschauung verstanden wird, sondern die Weise der unmittelbaren Gewißheit bezeichnet, in der uns die logischen,

1) Wohl im Anschluß an den Titel von Brouwers Antrittsrede »Intuitionisme en formalisme« Amsterdam 1912. (Engl. Übers.: Bull. of the Am. Math. Soc. 20, S. 81–96, [1913].)

arithmetischen und kombinatorischen Grundtatsachen¹ gegeben sind; wie sie etwa in den üblichen Darstellungen der Zahlentheorie zu Anfang mehr festgestellt als begründet oder gar bewiesen zu werden pflegen. Es ist für die intuitionistische Anschauung des mathematischen Grundlegungsproblems wesentlich, daß man jene logisch-arithmetischen Grundtatsachen wirklich als solche auffaßt, nicht etwa als zweckmäßige oder gar willkürliche an die Spitze der Erörterung gestellte Annahmen.

Die eben bezeichnete Grundauffassung kann eine sachliche² genannt werden, denn sie bestrebt sich, die »Sachen selbst« vor Augen zu haben und nicht bloße Voraussetzungen, die erst von der heutigen Wissenschaft her ihre nachträgliche Rechtfertigung erhalten. Es ergibt sich aus dieser Anschauung gewissermaßen von selbst der ungefähre Inhalt des allem Weiteren zugrundeliegenden Urgebiets: die Lehre von den arithmetischen und kombinatorischen Eigenschaften der endlichen und endlosen (daher notwendig diskreten) Mannigfaltigkeiten, zusammen mit dem, was an formaler Logik zu ihrer geordneten Darstellung unumgänglich ist.

Das Endlose³ ergibt sich von selbst mit der unbeschränkt fortsetzbaren Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... in inf., die als der Gegenstand einer »arithmetischen Urintuition« (Weyl) angesehen wird. Die merkwürdigen Eigenschaften von derartigen endlosen Folgen stehen im Mittelpunkt der intuitionistischen Lehre und bedingen ihren eigentümlichen Inhalt. Sie sind der eigentliche Grund ihres Gegensatzes zur hergebrachten Mathematik, während das Endliche, sobald man sich einmal zur Anerkennung arithmetischer Ur-tatsachen entschlossen hat, keine grundsätzlichen Schwierigkeiten mehr bereitet.

Im elementaren Sinn anschaulich vorliegen können nur endliche diskrete Gesamtheiten. Das Unendliche ist nach der intuitionistischen

1) Der Ausdruck »Tatsache« soll demgemäß durchaus nicht im Sinne eines philosophischen Empirismus verstanden werden, sondern als gleichbedeutend mit »Tatbestand«, »Sachverhalt«, »Wesensverhalt« u. dgl. ganz farblos gebraucht werden. — In phänomenologischer Redeweise handelt es sich offenbar um Wesensverhalte.

2) Damit ist nicht das, was Hufferl als »sachhaltig« bezeichnet, sondern nur ein gewisser Gegensatz zum »Formalen«, so wie es der »Formalismus« auffaßt, gemeint.

3) Diese Bezeichnung für die unbeschränkt fortsetzbare »offen unendliche«, im Sinne Cantors »abzählbar unendliche« Mannigfaltigkeit ist Frege nachgebildet, der die »Anzahl« der natürlichen Zahlen (Cantors \aleph_0) die »Anzahl Endlos« nennt.

Auffassung nur in der Form der Folge zugänglich, die nicht ist, sondern wird. Die einzig als rechtmäßig zugelassene Art des Unendlichen ist also das Endlose (potentiell Unendliche). Das maßgebende Vorbild ist die Reihe der natürlichen Zahlen; alle anderen endlosen Gebilde sind von hier aus zu verstehen.

Indessen ist hierbei noch ein entscheidender Punkt zu beachten: die Folge der natürlichen Zahlen ist eine gesetzmäßige. Es ist genau bestimmt, welche Zahl auf jede vorgegebene unmittelbar folgt. Mit der Zahl n ist auch $n' = n + 1$ bestimmt. Das Gesetz des »Immer noch eins«, das aus n das n' erzeugt, ist das Urbild einer jeden gesetzmäßigen Folge, die durch ein allgemeines Glied gekennzeichnet werden kann, das dann seinerseits die allgemeine Zahl n enthält.

Als Beispiele können etwa die Reihe der Quadratzahlen (n^2), der Partialsummen irgendeiner unendlichen Reihe (geometrische Reihe, Potenzreihe) usw. dienen. Ein Gesetz kann auch rekurrent sein, d. h. angeben, wie man das $(n + 1)^{\text{te}}$ Glied aus dem n^{ten} Glied erhält.

Es gibt aber im Gegensatz zu den gesetzmäßig bestimmten Folgen noch eine davon grundfänglich verschiedene Art: die sogenannten »frei werdenden Wahlfolgen«: Zunächst die völlig freie Wahlfolge, bei der die einzelnen Zahlen ganz beliebig nacheinander gewählt werden, dann Wahlfolgen mit gewissen einschränkenden Bedingungen, endlich solche Folgen, bei denen Schritt für Schritt nach bestimmten Regeln, gemäß anderweitig vollzogener Wahlen, Würfen, Beobachtungen, Rechnungsergebnissen usw. die einzelnen Glieder festgelegt werden.

Beispiele. 1. Die Würfelreihe mit einem Würfel: Man würfelt mit einem gewöhnlichen sechsseitigen Würfel und schreibt die Zahlen, die sich ergeben, nieder. Diese Folge kann offenbar nur die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 enthalten, sie muß mindestens eine dieser Zahlen enthalten, aber nicht notwendig mehr als eine.

2. Die Summenfolge zweier völlig freien Wahlfolgen: Man addiert die beiden ersten, die beiden zweiten etc. Glieder der beiden freien Wahlfolgen, die Summen bilden eine Zahl der gewünschten Folge. — Diese Folge kann offenbar alle möglichen Zahlen enthalten außer 1. Denn selbst wenn beide Summanden 1 wären, so ergäbe sich doch schon 2, andernfalls eine größere Zahl.

Es ist wesentlich für diese Folgen zweiter Art, daß sie niemals als vollendet oder auch nur bis ins Unendliche bestimmt gedacht werden können, sondern als Schritt für Schritt werdende. Die Zukunft dieser Entwicklung ist stets zum mindesten nach gewissen Seiten hin unbestimmt. Es können also nur solche Eigenschaften

sinnvollerweise von einer derartigen Folge ausgelegt werden, für welche die Entscheidung, ob sie der Folge zukommen oder nicht zukommen, schon fällt, wenn die Folge in ihrer Entwicklung bis zu einer gewissen Stelle gekommen ist, ohne daß die Weiterentwicklung über diesen Punkt des Werdens hinaus, wie sie auch ausfallen möge, die Entscheidung wieder umstoßen kann. Mit anderen Worten: man kann wohl über Geschehenes sicher urteilen, nicht aber über die Zukunft. Prophezeien kann man nur insoweit, als Gesetzmäßigkeiten bekannt sind, die den zukünftigen Gang der Ereignisse (das Entstehen der Glieder der Folge) mehr oder weniger bestimmen. (Wahlfolge mit Nebenbedingung, Grenzfall der durchgehenden Bestimmtheit: gesetzmäßige Folge.)

Beispiel: Die augenblicklich vorliegenden Glieder einer Wahlfolge F seien: 1, 6, 28, 3, 9, 11... Man kann im gegenwärtigen Augenblick dieser Folge die Eigenschaft zusprechen: » F enthält die Zahl 9«, nicht aber » F enthält die Zahl 4« noch auch » F enthält die Zahl 4 nicht«. (Denn darüber ist noch keine Entscheidung gefallen.)

Diese Überlegung zeigt, daß die Folgen zweiter Art ohne Zeitlichkeit nicht gedacht werden können. Aussagen über solche Folgen sind auf keine Weise von der augenblicklichen Lage, dem Stande der Entwicklung unabhängig zu machen.

Nun sind die völlig gesetzmäßig (durch ein »allgemeines Glied« u. dgl.) bestimmten Folgen erster Art zwar auch nicht ihrem eigentlichen Seinsinn nach zeitlos oder überzeitlich, aber alle über sie möglichen Aussagen lassen sich unabhängig von irgendeinem Zeitpunkt aussprechen, so daß sie in einem gewissen logischen Sinn in ihrer ganzen unendlichen Erstreckung wirklich gegeben sind. Bei den Folgen zweiter Art sind derartige zeitunabhängige Aussagen lediglich in genau dem Maße möglich, als manche ihrer Eigenschaften (durch Nebenbedingungen oder die Regel ihrer schrittweisen Erzeugung) gesetzmäßig bestimmt sind.

Aus dieser Sachlage ergeben sich einige merkwürdige Folgerungen bezüglich der logischen Eigentümlichkeit von Urteilen über Folgen:

Es scheint nämlich, daß der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, nach dem von zwei kontradiktorisch entgegengesetzten Urteilen eines wahr sein muß und eines falsch, im Gebiete der endlosen Zahlfolgen gewisse Ausnahmen erleidet.

Die Urteile:

1. Es gibt in der Folge F eine Zahl von der Eigenschaft E ,
 2. Alle Zahlen der Folge F haben die Eigenschaft E ,
- haben nämlich unter Umständen beide kein »eigentliches« kontradiktorisches Gegenteil, d. h. das rein formal gebildete kontradikto-

rische Gegenteil gehorcht nicht dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten, weil es nämlich gar keine sachlich greifbare Bedeutung hat.

In der Tat: Die negativen Urteile:

1. Es gibt in der Folge F keine Zahl von der Eigenschaft E ,
 2. Nicht alle Zahlen der Folge F haben die Eigenschaft E ,
- haben für frei werdende Folgen F im allgemeinen keinen sachlich klaren Sinn. Es läßt sich ja – was das erste Urteil betrifft –, falls nicht eine geeignete einschränkende Gesetzmäßigkeit vorliegt, bei einer frei werdenden Folge nicht sagen, was für Zahlen in ihr noch auftreten werden, und deshalb auch nicht, ob etwa eine Zahl mit der Eigenschaft E nicht doch noch erscheinen wird. Ähnlich ist es beim zweiten Urteil: es besteht unter den gemeinten Umständen stets die Möglichkeit des Erscheinens einer Ausnahme, aber ob diese je zur Wirklichkeit wird, ist offenbar ganz unbestimmt.

Die Disjunktion: »Entweder gibt es in der Folge eine Zahl mit der Eigenschaft E oder nicht« ist also keine echte vollständige Disjunktion bzw., wenn man sie aus formalen Gründen für eine vollständige Disjunktion halten will, erleidet für sie der Satz vom ausgeschlossenen Dritten eine Ausnahme.

Wohlgemerkt, diese Schwierigkeiten treten nur ein bei frei werdenden Folgen, nicht bei gesetzmäßig bestimmten. Bei diesen letzten ermöglicht das Gesetz einen Überblick über sämtliche »unendlich vielen« Glieder.

Das führt dann weiter zu dem eigentümlichen Verhalten der Folgen selbst, wenn man ihnen gegenüber die Frage stellt »Gibt es eine Folge F mit der Eigenschaft E ?«.

Diese Frage kann man dann bejahen, wenn F eine gesetzmäßige, vorliegende Folge ist, oder eine frei werdende Folge mit gewissen gesetzmäßigen Eigenschaften, deren Konstruktion in ganz bestimmter Weise vorgelegt werden kann. Ihre Verneinung hat keinen Sinn, solange man die Folge noch als eine gesetzmäßige auffaßt. Denn ein Überblick über alle »möglichen« Gesetze, die jemals aufgestellt werden können, scheint nicht gewonnen werden zu können.¹ Wendet man aber die negative Antwort auf die in Rede stehende Frage positiv: »Jede Folge hat die Eigenschaft nicht- E «, so hat das nur

1) Die im Text angegebene Meinung wird von intuitionistischer Seite zumeist vertreten. Wir werden indessen später (in § 5b) im Anschluß an die neuesten Forschungen Hilberts zum Kontinuumproblem (»Über das Unendliche«, Math. Ann. Bd. 95) darlegen, daß die geleugnete Möglichkeit einer Übersicht über »alle möglichen« Gesetze für eine endlose Folge im gewissen Sinne doch besteht.

Sinn, wenn man unter Folge eine freie Wahlfolge (mit gewissen Nebenbedingungen) versteht; nicht aber für gesetzmäßige Folgen.

Beispiele: »Jede Würfelreihe (mit einem Würfel) hat die Eigenschaft, die Zahl 21 nicht zu enthalten«. Das gilt natürlich auch für alle gesetzmäßigen Folgen, die innerhalb des »Rahmens« der Würfelreihe betrachtet werden können. (Wenn z. B. an das Auftreten gewisser regelmäßiger Würfelreihen eine gewisse Spielregel geknüpft ist, so liegt das Konstruktionsprinzip einer derartigen Folge »im Rahmen« des Begriffes der Würfelreihe.) – Ein besseres Beispiel bietet das Schachspiel dar. Eine Schachpartie kann als eine frei werdende Folge mit Nebenbedingungen angesehen werden, die u. U. abbricht (wenn einer der Spieler Matt setzt), die aber auch endlos sein kann (bei gewissen Arten von Remis). Unter besonderen Umständen kann sie aber auch, nachdem eine endliche Anzahl von Gliedern vorliegt, in eine gesetzmäßige Folge übergehen (bei gewissen Arten von Zugzwang, wie »ewiges Schach«). In diesem letzten Fall liegt eine gesetzmäßige Folge »im Rahmen« einer frei werdenden Folge mit Nebenbedingungen vor.

Die soeben dargestellten Betrachtungen hängen eng zusammen mit der Frage der Entscheidbarkeit eines bestimmten mathematischen Problems. Die Frage ist, ob jedes rein mathematische Theorem, also zunächst schon jeder klar formulierte zahlentheoretische Satz, entweder bewiesen oder widerlegt werden kann.

Beispielsweise kann man fragen: »Gibt es mehr als 5 Primzahlen von der Form $2^n + 1$? (Bekannt sind heute nur 5 Primzahlen dieser Form, nämlich für $n = 1, 2, 4, 8, 16$).¹ Man kann diese Frage nicht mit ja oder nein entscheiden durch Probieren, denn die Anzahl der Zahlen von der Form $2^n + 1$ ist unendlich, und man kann doch immer nur eine nach der andern auf ihre Teilbarkeit hin untersuchen. Die Beziehung zur Lehre von den endlosen Folgen wird klar, wenn man folgende Zuordnung stiftet: Man erzeuge eine werdende Folge nach der Regel: Man probiert die nach der Größe geordneten Zahlen der gesetzmäßigen Folge mit dem allgemeinen Glied $2^n + 1$ auf ihre Teilbarkeit der Reihe nach durch: erweist sich eine der erwähnten Zahlen als teilbar, so wähle man die Zahl 1, wo nicht, die 2; so erhält man eine echte werdende Folge, die nur die Zahlen 1 und 2 enthalten kann, von der man aber nicht weiß, ob sie mehr als 5 oder gar unendlich viele Zweien enthält. Und zwar kann man dies erstere gar nicht wissen, bevor nicht eine sechste Zwei aufgetreten ist (was bisher noch nicht der Fall war), – und ob es in ihr unendlich viele Zweien gibt, könnte man überhaupt nur dann jemals erfahren, wenn die Folge einmal durch ein Gesetz dargestellt würde, also ihren Charakter als »frei werdende« Folge verlöre.

Ein anderes Beispiel ist die bekannte F e r m a t'sche Behauptung, es gäbe für $n > 2$ keine vier ganzen Zahlen n, x, y, z die die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

befriedigen. Ob diese Behauptung richtig oder falsch ist, läßt sich offenbar nicht durch Probieren entscheiden; man kann auch hier den systematisch an-

1) Dies Beispiel nach F r a e n k e l, Einleitung in die Mengenlehre (2. Aufl. Berlin 1923) S. 170.

geordneten Proben (nachdem man alle Zahlenquadrupel (n, x, y, z) , für die $n > 2$ ist, in eine eindimensionale Folge geordnet hat, was bekanntlich stets ausgeführt werden kann,) eine echte werdende Folge der Zahlen 1 und 2 zuzuordnen, indem man bei Befriedigung der Gleichung jeweils die 1, bei Nichtbefriedigung die 2 wählt; es ist dann bisher (für $n > 2!$) noch keinmal die 1 erschienen, ob sie das jemals tun wird und wie oft, ist z. Zt. gänzlich unbekannt.

Der intuitionistische Standpunkt der Entscheidbarkeitsfrage gegenüber ist nun der, daß, sofern eine arithmetische Frage zur Zeit tatsächlich unentschieden ist, sich wissenschaftlich über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit, jemals zu ihrer Entscheidung zu gelangen, gar nichts auslagen läßt.¹

Auf Grund dieser Anschauung verlangt der Intuitionist, daß der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, auf dem das Verfahren des indirekten Beweises beruht, auf unendliche Gesamtheiten, die in der geschilderten Art mit endlosen Wahlfolgen zusammenhängen, nicht angewandt werden dürfe. Dies bringt für die Möglichkeit der Führung mathematischer Beweise und der Definition mathematischer Begriffe und Gegenständlichkeiten empfindliche Einschränkungen gegenüber der bisherigen Übung mit sich.

So sind z. B. Begriffe, wie der der Gesamtheit aller möglichen Zahlfolgen nicht zulässig; womit auch die Möglichkeit wegfällt, etwa die Menge der Dual- oder Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 zu bilden oder die Menge der transszendenten Zahlen zwischen 0 und 1 und überhaupt die meisten nicht abzählbaren Mengen. Der Begriff einer willkürlichen reellen Funktion (im Sinne Dirichlets) erweist sich als unhaltbar, ebenso der einer beliebig zusammengewürfelten unendlichen Punktmenge mit bestimmten deskriptiven Eigenschaften und daraus abgeleitete Begriffe, wie der der »oberen Grenze«. Die Cantorsche Definition des Linearkontinuums als einer bestimmt gekennzeichneten Punktmenge fällt auch in sich zusammen. — Die gesamte Analysis, die ja mit dem Begriff der reellen Zahl beginnt, bedarf einer neuen Begründung, obwohl damit nicht gesagt ist, daß nicht

1) Es sind natürlich in manchen Fällen sozusagen »gefühlsmäßige« auf Analogie mit gewissen bekannten Tatsachen beruhende Vermutungen möglich. So kann man etwa nach der Analogie mit dem bekannten von Euklid (IX, 20) bewiesenen Satz über die Existenz unendlich vieler Primzahlen in der natürlichen Zahlenreihe vermuten, daß allgemein in jeder arithmetischen Reihe erster Ordnung, die aus ganzen Zahlen besteht, unendlich viele Primzahlen enthalten sind. Diese Vermutung wurde, wie bekannt, durch den Beweis von Dirichlet bestätigt, allerdings unter Zuhilfenahme infinitesimaler Betrachtungen. Solange der Dirichletsche Beweis aber nicht vorlag, war jene Vermutung, vom streng mathematischen Standpunkt aus gesehen, lediglich eine ganz leere logische Möglichkeit.

erhebliche Teile, vielleicht die erheblichsten, nach Änderung der Beweisform wieder übernommen werden können. Immerhin erleiden Analysis wie Mengenlehre empfindliche Einbußen (»Amputationen«).

Gewonnen wird andererseits eine ganz neue Theorie des Kontinuums als eines »Mediums freien Werdens«, die im Gegensatz zu dem abstrakten »atomistischen« Kontinuumsbegriff der überlieferten Mengenlehre, die begriffliche Erfassung des anschaulichen Stetigen, in dem es keine »Punkte« gibt, ermöglicht.¹

Es ist begreiflich, daß diese »Amputationen« am Körper der überlieferten Mathematik seitens der intuitionistischen »Puttschiffen« heftigen Widerstand der auf ihre Traditionen stolzen Mathematiker gefunden haben. Der hervorragendste Gegner der intuitionistischen »Revolution« ist Hilbert, dessen Anschauungen nunmehr zu schildern sind.

b) Hilberts axiomatischer Formalismus.

Obwohl Hilbert und sein Mitarbeiter Bernays gewiß nicht die einzigen sind, die die Mathematik auf ein notwendig formales System von Axiomen gründen wollen, so haben sie doch dieses Verfahren mit einer bis ins Letzte gehenden Folgerichtigkeit ausgebaut und deshalb ist es für eine grundsätzliche Untersuchung der Sachlage das Zweckmäßigste, an sie anzuknüpfen.

Hilbert unterscheidet von vornherein »inhaltliche« und »formale« Mathematik.² Die erste ist auf das Endliche beschränkt und ist nicht ihrerseits auf Axiome gegründet, sondern auf die sachliche Feststellung von gewissen Grundtatsachen. Die Notwendigkeit dafür ergibt sich daraus, daß Hilbert zum Zwecke der Begründung der »formalen« eigentlichen Mathematik einer (»metamathematischen«) »Beweistheorie« bedarf, die jeden mathematischen Beweis selbst als ein

1) Vergleiche darüber und über den hierfür gehörigen Begriff der »entscheidungsdefiniten Mannigfaltigkeit« meine Abhandlung im 6. Bande dieses Jahrbuches; ferner die dort angeführten Arbeiten Brouwers und Weyls (am wichtigsten sind die Arbeiten Brouwers in den Abhandlungen der Amsterdamer Akademie des Jahres 1918 und 1919 [in neuer Fassung Math. Ann. 93, 95, 96], und Weyls in der Mathematischen Zeitschrift Bd. 10 u. 20), zu denen inzwischen noch der Aufsatz Weyls im »Symposion« I. Band, 1. Heft, gekommen ist. — Über den intuitionistischen Standpunkt wesentlich hinaus geht Weyls neuester Aufsatz im »Handbuch der Philosophie« (München 1926). Ein Verzeichnis der gesamten neuesten Literatur über Grundlagenfragen findet man bei H. Fraenkel, Zehn Vorlesungen über die Grundlagen der Mengenlehre (Leipzig u. Berlin 1927).

2) Die erste heißt auch »Metamathematik«, die zweite Mathematik im engeren Sinne.

mathematisches Gebilde auffaßt, bestehend aus einer endlichen Anzahl in gewisser Anordnung und Gruppierung vorliegender Zeichen. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Beweise begriffsschriftlich dargestellt sind, als eine Reihe von Formeln, die auseinander nach bestimmten formalen Regeln hervorgehen.

Der Grundgedanke Hilberts ist nun folgender: Ein mathematischer Beweis als ein endliches Gebilde ist durch die keine grundsätzlichen Schwierigkeiten darbietende Lehre von den endlichen Gesamtheiten (endliche formale Logik, Arithmetik, Kombinatorik) vollständig beherrschbar. Insbesondere besteht die Möglichkeit zu zeigen, daß aus bestimmten Axiomen nach bestimmten Regeln geführte Beweise nicht auf die einen Widerspruch darstellende Zeichenkombination führen können. Richtet man also die Beweise der höheren (formalen) Mathematik so ein, daß ihr Abbild in Formeln jene Eigentümlichkeit hat, nicht auf die Formel für eine widerspruchsvolle Aussage führen zu können, so weiß man damit, daß jene Begriffe und Axiome der höheren Mathematik auf Grund der benutzten logischen Schlußweisen niemals zu widersprechenden Sätzen führen können, — ohne daß es dazu nötig wäre, jene Begriffe und Axiome ihrem Inhalt nach zu verstehen und etwa auf ihre sachliche Wahrheit zu prüfen. Die Entbehrlichkeit einer sachlichen Nachprüfung ist der entscheidende Punkt; daraufhin ist es gestattet, axiomatische Voraussetzungen einzuführen, deren sachliche Tragweite gewissermaßen den »endlichen menschlichen Verstand« überschreitet, die also mit Recht als »transfinit« oder »transzendent« zu bezeichnen sind. So gelingt es, den Herrschaftsbereich mathematischer Wissenschaft weit über das von Seiten der Intuitionisten zugelassene Maß hinaus auszudehnen, ohne jemals befürchten zu müssen, durch sich einstellende Widersprüche Lügen gestraft zu werden. Und Widersprüche sind, wie schon Kant bemerkte, das Einzige, was die über die Schranken der Erfahrung (hier der mathematischen Intuition) hinausreichende menschliche Vernunft in ihrem Laufe zurückhalten kann. Auf diese Weise wird das gesamte von der überlieferten Mathematik eingenommene Forschungsgebiet erhalten einschließlich der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre.

Es ist nun kurz darzustellen, wie es Hilbert gelingt, 1. die Widerspruchsfreiheit eines bestimmten Axiomensystems zu beweisen, und 2. das Transfinite durch eine ihrer formalen Beschaffenheit nach endliche Begriffsbildung zu erfassen.

1. Nachweis der Widerspruchsfreiheit einer endlichen Anzahl endlicher Formeln. — Wie aus der soeben

gegebenen allgemeinen Darstellung hervorgeht, ist streng zu scheiden zwischen dem formalen Abbild der arithmetischen Sätze und Beweise als dem »Gegenstand« der Theorie und dem inhaltlichen Denken über diesen Formalismus als dem »Inhalt« der Theorie.

Der Schwerpunkt dieser Beweistheorie liegt in dem genauen Studium der Art und Weise, wie aus bestimmten vorliegenden Formeln andere neue hervorgehen. Dies geschieht einmal durch »Einsetzen« (Substitution) von speziellen Ausdrücken in »allgemeine« Formeln, also – ganz wie in der hergebrachten Mathematik – durch Ersetzen eines einen Allgemeinbegriff andeutenden Zeichens durch eine spezielle, einen unter jenen Allgemeinbegriff fallenden Gegenstand darstellende Zeichenkombination. Zweitens entstehen neue Formeln durch Schlüsse nach dem Schema:

$$\frac{\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{Z}}{\mathcal{Z}}$$

Das heißt: 1. Die Formel \mathcal{G} gilt. 2. Es gilt: Aus \mathcal{G} folgt \mathcal{Z} . Also: 3. Es gilt \mathcal{Z} .

Auf diese beiden Arten, durch »Einsetzen« und »Schließen« (das dann noch in verwickelteren Formen vor sich gehen kann) entstehen also nacheinander alle beweisbaren Formeln aus den Axiomen. Man kann u. U. übersehen, aus dem formalen »Gesetz« des Verfahrens heraus, daß eine bestimmte Endformel, etwa $0 \neq 0$, niemals erreicht werden kann.

Gelingt es andererseits, die Formulierung des Widerspruchs immer auf die Gestalt $0 \neq 0$ zu bringen, so ist der Nachweis der Unmöglichkeit des Auftretens der Formel $0 \neq 0$ im Beweise gleichbedeutend mit dem Nachweis, daß in den Beweisen der vorliegenden Art eine widerspruchsvolle Äußerung nicht formuliert werden kann; d. h. daß ein derartiger Beweis nicht zu einem Widerspruch führen kann.

Man kann die zunächst befremdende Sachlage durch einen Vergleich mit gewissen beim Schachspiel auftretenden Möglichkeiten erläutern: Es gibt bekanntlich beim Schach gewisse »Endspiele«, bei denen ein Matt von keiner Partei erzwungen werden kann bei richtigem Spiel. Der einfachste Fall ist der, daß nur noch die beiden Könige sich im Spiel befinden. Dann ist eine Mattstellung niemals zu erreichen, wie auch gespielt werden möge. Verwickelter ist etwa der Fall: Weißer König mit zwei Springern gegen den schwarzen König. In diesem Falle kann Weiß bei korrektem Spiel von Schwarz das Matt nicht erzwingen. Fügt man also zu der üblichen Spielregel des Schach die Zusatzbedingung hinzu, daß Schwarz bestimmt ge-

kennzeichnete »fehlerhafte« Züge nicht spielen darf, so kann man sicher sein, daß Weiß niemals Matt setzt, — wie im übrigen das Spiel auch verlaufen möge. In beiden Beispielen ist also das Auftreten einer Mattstellung ausgeschlossen, die offenbar einer widerspruchsanzeigenden Formel im mathematischen Beweis entspricht, während die nacheinander entstehenden Stellungen auf dem Schachbrett etwa den nacheinander auftretenden Formeln des Beweises gleichzusetzen sind; beide Male geht ja ein Gebilde aus dem andern gemäß gewisser Regeln hervor.

Nun sei ein Beispiel für eine Hilbertsche Beweisführung gegeben.¹ Es werde gezeigt, daß aus den gleich anzuführenden fünf Axiomen die Formel $a \neq a$ niemals gefolgert werden kann.

Die Axiome sollen wie folgt lauten:

1. $a = a$
2. $a = b \rightarrow a + 1 = b + 1$
3. $a + 1 = b + 1 \rightarrow a = b$
4. $a = c \rightarrow (b = c \rightarrow a = b)$
5. $a + 1 \neq 1$.

Die Zeichen a, b, c sind allgemeine Zeichen für Zahlen und aus Zahlen zusammengesetzte Ausdrücke (Funktionen). Das Zeichen \rightarrow »bedeutet »folgt« oder »wenn — so« (»Implikation«).

Es wird zunächst der folgende Hilfsatz bewiesen:

a) Hilfsatz: Eine beweisbare Formel kann das Zeichen \rightarrow höchstens zweimal enthalten.

Beweis: Läge ein Beweis für eine Formel mit mehr als zwei \rightarrow -Zeichen vor, so müßte es in ihm notwendig eine Formel geben, wo dies zum ersten Male der Fall ist. Diese Formel kann unmittelbar durch Einsetzen in die Axiome offenbar nicht entstanden sein. Denn für die Zeichen a, b, c können Ausdrücke, die bereits ein \rightarrow -Zeichen enthalten, nicht eingesetzt werden. Sie kann aber auch nicht als Endformel \mathfrak{I} eines Schlusses auftreten, denn dann wäre die zweite Prämisse des Schlusses, nämlich $\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{I}$, auch schon eine Formel mit mehr als zwei \rightarrow -Zeichen, gegen die Voraussetzung, daß \mathfrak{I} die erste derartige im Beweise auftretende Formel ist. —

Nunmehr ist der Beweis des eigentlichen Satzes möglich:

b) Hauptsatz: $a \neq a$ ist keine aus den Axiomen 1–5 beweisbare Formel.

Beweis: Um eine das \neq -Zeichen enthaltende Formel zu gewinnen, muß man Axiom 5 heranziehen. Alle daraus durch Einsetzen entstehenden Formeln haben die Gestalt $a' + 1 \neq 1$ und hiervon ist $a' + 1$ gewiß nicht dasselbe Zeichen wie 1. Es bleibt also nur die Möglichkeit, daß $a \neq a$ die Endformel eines Schlusses ist. In diesem Falle müßte dessen zweite Prämisse lauten $\mathfrak{C} \rightarrow a \neq a$. Da diese offenbar nicht direkt durch Einsetzen aus den

1) Nach Hilbert, Abhandl. d. Math. Sem. d. Hamburgischen Universität (1922), Bd. I, Heft 2, S. 157 ff. (leicht verändert).

Axiomen entstehen kann, so müßte sie ihrerseits Endformel eines Schlusses sein, dessen zweite Prämisse dann

$$\mathfrak{X} \rightarrow (\mathfrak{S} \rightarrow a \neq a)$$

sein würde. Aber auch diese Formel könnte wiederum nicht anders zustande kommen als durch einen Schluß, dessen zweite Prämisse notwendig die Gestalt hätte:

$$\Pi \rightarrow \{\mathfrak{X} \rightarrow (\mathfrak{S} \rightarrow a \neq a)\}.$$

Diese Formel enthält aber mehr als zwei „ \rightarrow “-Zeichen, ist also nach dem »Hilfsatz« unmöglich. — Damit ist aber auch die Unmöglichkeit eines Beweises für die Formel $a \neq a$ nachgewiesen.

Das angeführte Beispiel zeigt wohl zur Genüge, daß derartige Unmöglichkeitsbeweise unter gewissen Umständen möglich sind. Der vollständige Nachweis der Widerspruchsfreiheit der endlichen Arithmetik ist von Hilberts Schüler W. Ackermann in seiner Dissertation Abschn. I u. II erbracht worden. (Abgedruckt: Math. Annalen Bd. 93, S. 1 ff., 1924¹.)

Es wird nun wesentlich darauf ankommen, diesen Nachweis der Widerspruchsfreiheit auf die »transfiniten« Mathematik auszudehnen.

2. Die begriffliche Erfassung des Transfiniten und der Nachweis ihrer Widerspruchsfreiheit. —

Nachdem die Axiome der finiten Arithmetik neben den allgemeinen logischen Axiomen formuliert sind,²) fügt Hilbert als »transfinites Axiom« die Formel V (11) hinzu:

$$A(\tau A) \rightarrow A(a): \quad \text{»Wenn } A \text{ dem } \tau(A) \text{ zukommt,} \\ \text{so kommt es allen } a \text{ zu.«}$$

Hier bedeutet: A ein Prädikat, $A(a)$ die Aussage » a besitzt das Prädikat A «, $\tau(A)$ einen bestimmten Gegenstand, der zum Prä-

1) Daß tatsächlich damit nichts Neues gewonnen ist, weil ja Hilbert für seine eigene Beweistheorie bereits die endliche Arithmetik und Kombinatorik voraussetzen muß, ist klar. Immerhin ist mit dem Umstand, daß die endliche Arithmetik de facto widerspruchsfrei ist, noch nicht gesagt, daß das auch in der Art Hilberts bewiesen werden kann. Wesentliche Vereinfachungen und Berichtigungen sind neuerdings von v. Neumann (»Zur Hilbertschen Beweistheorie«, Math. Zeitschrift, Bd. 26, S. 1 ff., 1927) gegeben worden. Vgl. auch H. Weyl, Handbuch der Philosophie (her. von Bäumler u. Schröter, München 1926), Abt. II, A, S. 12 ff., 14 ff.

2) Es würde hier zu weit führen, diese Axiome sämtlich aufzuführen, sie sind in vier Gruppen eingeteilt: I. (1–4) Axiome der Folge (Zufügen, Weglassen, Vertauschen von Voraussetzungen, Elimination von Aussagen, d. i. Ketten Schlüsse). II. (5 u. 6) Axiome der Negation (Satz vom Widerspruch und ausgeschlossenen Dritten, rein formal für Aussagen). III. (7 u. 8) Axiome der Gleichheit (Identität mit sich selbst, Ersetzung durch Gleiches). IV. (8 u. 9) Axiome der Zahl (Offenheit der Zahlenreihe, Beziehung einer Zahl zur folgenden). — Im übrigen vgl. Hilberts Originalarbeit: »Die logischen Grundlagen der Mathematik«, Mathem. Annalen Bd. 88, S. 151 ff. (1922) und W. Ackermanns oben zitierte Dissertation.

dikant A gehört und folgende Eigentümlichkeit hat: Falls nicht das Prädikat A schlechthin allen Gegenständen (worauf es seiner Kategorie nach überhaupt sinnvollerweise angewandt werden kann) zukommt, so ist $\tau(A)$ eine sichere Ausnahme, d. h. ihm kommt A nicht zu.

Beispiele: $A =$ bestechlich fein. $\tau(A)$: Aristides.
 $A =$ feige fein. $\tau(A)$: Achilles.
 $A =$ klein fein. $\tau(A)$: Goliath.

Oder aus der Mathematik:

$A =$ teilbar fein. $\tau(A)$: die Zahl 7.
 $A =$ einer algebraischen Gleichung mit ganzen Koeffizienten genügen. $\tau(A)$: die Zahl e .
 $A =$ ein Zahlquadrupel fein, so daß die Fermatsche Gleichung nicht erfüllt ist. $\tau(A)$: ein bestimmtes Fermatisches Zahlquadrupel.
 $A =$ eine Fläche mit Innen- und Außenseite fein. $\tau(A)$: das Möbiussche Blatt.
 $A =$ mit einer von 3 verschiedenen Zahl besetzt fein (ausgelagt von den Stellen einer Wahlfolge). $\tau(A)$: eine bestimmte mit 3 besetzte Stelle der Wahlfolge.
 usw. usw.

Das Axiom macht auf den ersten Blick einen evidenten Eindruck. In der Tat ist es, falls sämtliche Gegenstände a eine endliche Gesamtheit bilden, selbstverständlich. Das Wesentliche ist aber, daß es auf beliebige unendliche Gesamtheiten angewendet werden soll. Also auch auf solche, die nach der intuitionistischen Auffassung ihm nicht genügen, wie etwa die Zahlquadrupel beim Fermatischen Problem oder die Zahlen von der Form $2^n + 1$ (mit Hinblick auf die Frage, ob unter ihnen mehr als 5 Primzahlen sind) oder die Stellen einer Wahlfolge usw. Für derartige Gesamtheiten ist also die Geltung des Axioms nach der »fachlichen« intuitionistischen Anschauung durchaus zweifelhaft. Nun ist es gerade der wesentliche Gedanke des Hilbertschen Verfahrens, daß in eine fachlich-inhaltliche Erörterung der Frage der Gültigkeit des transfiniten Axioms gar nicht eingetreten wird, sondern nur nachgewiesen wird, daß es zusammen mit den vorangehenden »finiten« Axiomen auf keinen Widerspruch führen kann. Wenn dieser Beweis gelingt, ist nach Hilberts Ansicht die Begründung der Analysis und Mengenlehre im überlieferten Umfang möglich.

In der Tat stellt das transfinite Axiom einerseits jene von den Intuitionisten bekämpfte verschärfte Form des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für unendliche Gesamtheiten dar, andererseits ist es möglich aus ihm das Zermelosche Auswahlprinzip, eines der Grundprinzipien der transfiniten Mengenlehre, zu folgern.

Man braucht in der Tat nur das »logische« transfinite Axiom $V(11)$ geeignet zu spezialisieren.¹

Der Beweis der Widerspruchsfreiheit des um das transfinite Axiom vermehrten Systems wird von Hilbert für die einzelnen Spezialfälle des transfiniten Axioms gefondert geführt. Der Gedankengang des von ihm einzig ausgeführten Spezialbeweises² sei im folgenden wiedergegeben. (Math. Ann. Bd. 88, S. 158 – 160.)

Man spezifiziere das »logische« transfinite Axiom

$$A(\tau A) \rightarrow A(a)$$

in der Weise, daß anstelle von $A(a)$ die Gleichung $f(a) = 0$ tritt, wo $f(a)$ eine gewöhnliche ganzzahlige Funktion der ganzzahligen Variablen a bedeutet.

$$\tau(f) = \tau_a [f(a) = 0],$$

ist also eine der Funktion $f(a)$ zugeordnete ganze Zahl und das transfinite Axiom nimmt die Gestalt an:

$$f[\tau(f)] = 0 \rightarrow f(a) = 0.$$

Es ist beispielsweise erfüllt, wenn man $f(a)$ und $\tau(f)$ folgendermaßen definiert:

- a) Ist $f(a) = 0$ für alle a , so soll $\tau(f) = 0$ gesetzt werden.
- b) Ist $f(a)$ nicht Null für alle Zahlen a , so ist unter $\tau(f)$ die kleinste Zahl zu verstehen, für die $f(a)$ von Null verschieden ausfällt. (Siehe Fig. 1).

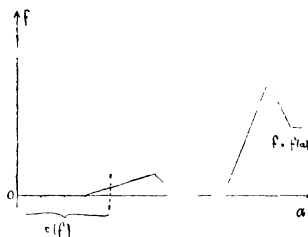


Fig. 1.

1) Für das Zermelosche Prinzip sei dies kurz angedeutet; dieses besagt: Ist M eine Menge von elementenfremden Mengen m , von denen jede Elemente enthält (keine eine Nullmenge ist), so gibt es eine Menge S , die sog. »Auswahlmenge«, die mit jedem m gerade ein Element gemein hat. – Setzt man nun im transfiniten Axiom für das Prädikat A »nicht zu der Menge m gehörig«, so lautet es: Es gibt ein bestimmtes Element $\tau(m)$ zu jedem m , derart, daß entweder alle Elemente zu m nicht gehören oder $\tau(m)$ zu m gehört. Die Menge dieser Elemente $\tau(m)$ für alle m , die keine Nullmengen sind, ist dann die von Z e r m e l o geforderte Auswahlmenge (S).

2) Der Beweis ist später (1924) für ganze große Gruppen von transfiniten Axiomen von H e r m a n n (a. a. O.) zu geben versucht worden, doch enthalten seine Argumentationen noch Lücken. Ihre Wiedergabe ist hier unmöglich. Vgl. dazu die zitierten Schriften von v. N e u m a n n (l. c. S. 41 ff.) und W e y l (l. c. S. 48, 25 – 49, 2).

Das transfinite Axiom besagt dann: Entweder $f(a)$ verschwindet für alle Zahlen a , oder es gibt (zum mindesten) die Ausnahmezahl $\tau(f)$, für die das nicht der Fall ist. (Unter den Ausnahmewerten des Arguments a ist $\tau(f)$ eindeutig charakterisiert als der kleinste.)¹

Der Beweis für die Widerspruchslöslichkeit des Axioms

$$f[\tau(f)] = 0 \rightarrow f(a) = 0$$

in Verbindung mit den finiten Axiomen wird von Hilbert geführt durch die Betrachtung geeigneter Spezialfälle. Es scheint bei oberflächlicher Betrachtung, daß damit nicht mehr gezeigt ist, als eben die Widerspruchslöslichkeit des betreffenden Spezialfalles. Aber dem ist nicht so. Denn wenn ein Beweis für die widerspruchsvolle Gleichung $0 \neq 0$ vorläge, der in gewissen, Variablen enthaltenden, formalen Schlüssen fortgeschritten, so müßte dieser Beweis auch nach der Ersetzung der allgemeinen Variablen durch spezielle Zahlen bestehen bleiben, da ja durch die Substitution die Schlußform als solche nicht angetastet wird. Es ist etwa so, wie wenn man irgend eine algebraische identische Formel, etwa die des binomischen Satzes, dadurch nachprüft, daß man für die allgemeinen Größen bestimmte Zahlen einsetzt und dann zusieht, ob die beiden Seiten der Gleichung dasselbe Zahlenresultat beim Ausrechnen ergeben. Falls sich beiderseits verschiedene Zahlen ergeben, so ist die allgemeine Formel sicher falsch. Nun handelt es sich beim Nachweis der Widerspruchslöslichkeit ja um den Beweis, daß ein bestimmtes Gefüge von Formeln mit der Endformel $0 \neq 0$ unmöglich ist. Das kann offenbar genau so wie im Falle der algebraischen Identität dadurch dargetan werden, daß ein bestimmter spezieller Fall als unmöglich erwiesen wird.

Hilbert spezialisiert nun in der zu erörternden Form des transfiniten Axioms die beliebige (variable) Funktion f , die eine unbestimmte Menge von Sonderfällen $\varphi, \varphi', \varphi'' \dots$ als »Werte« umfaßt, auf den bestimmten Sonderfall φ . Ferner setzt er die Zahl $\tau(\varphi)$ erstmals, sozusagen versuchsweise, gleich Null. Dann gewinnt das transfinite Axiom die besondere Gestalt:

$$\varphi(0) = 0 \rightarrow \varphi(\xi) = 0,$$

wo für eine bestimmte Zahl ξ auch $\varphi(\xi)$ eine bestimmte Zahl ist. Es fragt sich nun, ob $\varphi(\xi)$ für alle ξ gleich Null ist, oder ob es auch einmal ein von Null verschiedenes ξ gibt. Ist das erste der Fall, so ist die obige Formel offenbar richtig, denn das Hinterglied ist richtig. Ist das zweite der Fall

1) Die Beziehung auf die früher, bei der Schilderung der intuitionistischen Auffassung, gebrauchten Beispiele für nicht-entscheidbare Disjunktionen ist leicht einzusehen. Nehmen wir etwa die Frage, ob in der Form $2^n + 1$ für $n > 16$ Primzahlen enthalten sind. Man kann offenbar eine zahlentheoretische Funktion wie folgt definieren: $f(n)$ ist für $n = 1, 2 \dots 16$ Null; für $n = 17, 18, 19 \dots$ ist es dann gleich Null, wenn $2^n + 1$ eine teilbare Zahl ist; dagegen ist $f(n) = 1$ für alle n , für die $2^n + 1$ eine Primzahl darstellt. Nimmt man nun für $f(n)$ die Gültigkeit des transfiniten Axioms im obigen Sinne an, so besagt das: Entweder alle Zahlen der Form $2^n + 1$ ($n > 16$) sind teilbar oder es gibt eine bestimmte Zahl $\tau[f(n)]$, für die die Form $2^n + 1$ zum erstenmal (nach den fünf bekannten Primzahlen, die unter $n = 17$ liegen) eine Primzahl darstellt.

(ist also u. U. $\varphi(\beta) \neq 0$), so setze man zweitens $\tau(\varphi) = \beta$. Dann nimmt die transfinite Formel die Gestalt an:

$$\varphi(\beta) = 0 \rightarrow \varphi(\beta) = 0,$$

wo β und β Zahlzeichen sind. Diese Formel ist aber sicher richtig, weil das Vorderglied falsch ist (denn $\varphi(\beta)$ ist ja nicht allgemein gleich Null!) In jedem Fall – ob $\varphi(\beta)$ immer verschwindet oder nicht – läßt sich also ein besonderer Fall konstruieren, in dem das transfinite Axiom richtig ist. In diesen Fällen kann also auch kein Beweis vorliegen, der mit den (als widerspruchsfrei vorher nachgewiesenen) finiten Axiomen und dem transfiniten geeignet spezialisierten Axiom die Endformel $0 \neq 0$ hervorbrächte. Infolgedessen ist aber auch ein allgemeiner Beweis dieser Art unmöglich.

Das Hilbertsche Verfahren läuft also auf eine Art doppelter Negation hinaus: es wird die Unmöglichkeit eines zu der unmöglichen Formel $0 \neq 0$ führenden Beweises aus den fraglichen Axiomen bewiesen.

Hilbert bemerkt zu diesem Beweise ausdrücklich, daß er nicht die Auffindung oder Auswahl des Gegenstandes $\tau(A)$ unter den unendlich vielen Gegenständen seiner Kategorie tatsächlich bewerkstelligen könne, »wohl aber, daß man ohne das Risiko eines Irrtums stets so tun kann, als wäre die Auswahl getroffen.«¹

Ähnliche Beweise sind dann noch für andere Formen des transfiniten Axioms zu führen, die aber sämtlich von dem »logischen« transfiniten Axiom ihren Ursprung nehmen. Indem damit einerseits gezeigt ist, daß die Einführung dieser transfiniten Annahmen nicht auf Widersprüche führen kann, andererseits aus diesen Annahmen die traditionelle Analysis und Mengenlehre sich herleiten lassen, ist – die endgültige Ausführung der bisherigen Skizzen vorausgesetzt² – die Neubegründung der Mathematik geleistet und der revolutionäre Ansturm der Intuitionisten endgültig abgeschlagen. Das ist der Kernpunkt der Hilbertschen Auffassung.

Damit ist der Grundlagenstreit in seinen wesentlichsten Zügen geschildert und eine Ausgangsstellung für die weiteren Erörterungen gewonnen.

§ 2.

Formulierung des Problems der mathematischen Existenz.

Es handelt sich um die Frage, wie sich das eigentliche Thema dieser Ausführungen bildende Problem der mathematischen Existenz

1) In ganz analoger Weise gibt der Zermelosche Wohlordnungssatz nicht die aktuelle Konstruktion für eine Wohlordnung des Kontinuums.

2) Nach v. Neumann (l. c. S. 46) ist bis jetzt nur die Widerspruchsfreiheit der sog. »halbintuitionistischen« Mathematik (vgl. Weyl, Das Kontinuum, 1918) bewiesen.

durch die im Vorigen geschilderte geistesgeschichtliche Lage des Grundlagenstreits als bestimmt erweist. Um diesen Streit nach den in ihm zutage tretenden Tendenzen zu verstehen und für die Problematik der mathematischen Existenz fruchtbar machen zu können, ist es zunächst notwendig sich über diejenigen Punkte, über die kein Streit besteht, klar zu werden. Auf dem so herausgestellten gemeinsamen Boden läßt sich dann die Entstehung und Fortbildung der gegenfälligen Auffassungen klarer erkennen. Ferner muß von vornherein der Gang der geschichtlichen Entwicklung berücksichtigt werden, der in der Weise verlaufen ist, daß der Intuitionismus einen Angriff gegen die hergebrachte Begründungsweise der Mathematik gemacht hat, gegen den dann Hilberts Formalismus sich erhob.¹

Doch liegt die Sache keineswegs so, daß Hilbert etwa den Versuch gemacht hätte, die »klassischen« Methoden der Begründung der Mathematik (von Cantor, Dedekind, Weierstraß) gegenüber den intuitionistischen Einwänden zu stützen. Vielmehr setzt auch er neue Methoden anstelle jener älteren Begründungsweise, nur erhebt er den Anspruch auf dasselbe umfangreiche Gebiet für die gesicherte mathematische Forschung, das die »klassische« Mathematik des 19. Jahrhunderts zu besitzen glaubte. Auf diese Weise kommt es dazu, daß gewisse Gesichtspunkte und Ergebnisse den heutigen Intuitionisten und Formalisten gegenüber den älteren Mathematikern gemeinsam sind.

Man orientiert sich am besten darüber bei Hilbert, der ja bei Aufstellung seiner eignen These auch immer gleichzeitig schon den intuitionistischen Standpunkt vor Augen hat.²

Der erste Punkt, der in diesem Zusammenhang zu nennen ist, ist die Grundthese von der Notwendigkeit einer gemeinsamen Begründung von Logik, Arithmetik (nebst Kombinatorik) und Mengenlehre, und zwar zunächst mit Beschränkung auf das Endliche. Diese These richtet sich gegen den Versuch der »Logistiker« (Peano, Frege, Russell usw.), die Arithmetik und Mengenlehre aus der formalen Logik herzuleiten. Daß dies unmöglich sei, und zwar schlechterdings unmöglich, weil näher betrachtet widersinnig,

1) Dies ist der Verlauf seit der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Geht man weiter zurück in der Geschichte der Mathematik, so ändert sich das Bild beträchtlich und man erkennt, daß der Intuitionismus eine bis auf die klassische Antike (Aristoteles, Euklid) zurückreichende Vorgeschichte hat. Davon wird später noch ausführlich zu reden sein.

2) Vgl. auch die ähnliche Darstellung Weyls, Math. Zeitschr. Bd. 20, S. 146 ff.

das ist die gemeinsame Überzeugung von Brouwer, Weyl und andererseits Hilbert. Die Begründung dieser Überzeugung beruht auf dem einfachen (übrigens schon früher von Henri Poincaré betonten) Gedanken, daß in allen formallogischen Sätzen (besonders deutlich, wenn sie in der Gestalt »begriffsschriftlicher« Formeln ausgedrückt sind) schon eine Reihe von arithmetisch-kombinatorischen Momenten enthalten sind. (In der »Begriffsschrift« dargestellt durch die »Klammern« und andere Interpunktionszeichen¹, bei Peano und Russell durch Punktgruppen, bei Frege durch sich zweidimensional verzweigende Strichsysteme.) Gleichgültig, ob jene formallogischen Schlußketten auf inhaltlich leichten Endes begründete, für evident angesehene Grundfälle zurückgehen, oder ob an ihrer Spitze nur »Konventionen« stehen sollen, der stillschweigenden Benutzung arithmetisch-kombinatorischer Verfahrensweisen entrinnt kein Logiker. Durch diese ihre faktische Benutzung werden sie zu (stillschweigend) anerkannten Grundtatsachen, deren Begründung mittels eines logischen Formalismus zu versuchen ein offener Zirkel wäre. (Von hier aus ließe sich eine ausführliche Kritik der Frege-Russellschen logischen Begründung der Arithmetik geben, die aber nicht hierher gehört.)

Für den Intuitionisten ist diese Erkenntnis nicht verwunderlich, sondern nur eine Folge seiner Auffassung, daß die reine Mathematik überhaupt auf eine Reihe von intuitiv zu erkennenden Akten und kategorialen Gegenständlichkeiten beruht, wie Kolligieren, Ordnen, Zuordnen, Vertauschen usw., die sogar eine Ausdehnung ins Endlose gestatten.¹

Für den Intuitionisten gibt es innerhalb der reinen Mathematik überhaupt keine axiomatische Begründung, denn nichts ist für ihn willkürlich ansetzbar, alles »sachlich« d. h. gemäß einem »Wesensverhalt«, bestimmt. Axiome können höchstens auftreten als Definitionen einer zu betrachtenden Mannigfaltigkeit, um sie als Thema der Forschung gegen anderes abzugrenzen; – wobei dann die Motive für die Wahl gerade dieses Themas nicht in den Rahmen einer mathematischen Erörterung fallen.

Aber auch Hilbert verteidigt in seinen neuesten, hier allein

1) Neuerdings ist diese gegen die axiomatische Begründung der Arithmetik (nicht etwa der Geometrie) gerichtete Auffassung von O. Hölder (Die mathematische Methode, Berlin 1924) in sehr gründlich durchdachten Ausführungen verfochten worden. Hölder steht in vielem den Intuitionisten nahe, ohne doch eigentlich zu ihnen zu gehören.

in Betracht gezogenen Schriften keineswegs einen rein axiomatischen Standpunkt in Sachen der Begründung der Arithmetik¹.

Die »inhaltliche« Metamathematik wird bei ihm auch genetisch, d. h. auf Beobachtung der elementaren, mathematischen Tätigkeiten und Gegenstände aufgebaut. Wenn sich Hilbert auch über den phänomenologischen Charakter dieser endlichen Gegenstände, die er und Bernays als der sinnlichen Anschauung voll zugänglich auffassen, nicht im klaren ist,² so werden sie doch in ihrer eigentlichen Tatsächlichkeit hingenommen: sie werden als Voraussetzungen weiterer logischer Bearbeitung anerkannt.

»Als Vorbedingung für die Anwendung logischer Schlüsse und die Betätigung logischer Operationen muß schon etwas in der Vorstellung gegeben sein, gewisse außerlogische diskrete Objekte, die anschaulich als unmittelbares Erlebnis vor allem Denken da sind³.« Es handelt sich um etwas Letztes, nicht weiter Zurückführbares. »Sollen die logischen Schlüsse sicher sein, so müssen sich diese Objekte in allen Teilen überblicken lassen und ihre Aufweisung, ihre Unterscheidung, ihr Aufeinanderfolgen ist mit den Objekten zugleich anschaulich für uns da als etwas, daß sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren läßt.« Es wird also ausdrücklich eine intuitive Grundlage anerkannt.

Es besteht also anscheinend für das Gebiet der endlichen Gesamtheiten volle Übereinstimmung zwischen Hilbert und seinen intuitionistischen Gegnern.

Erst wenn das Unendliche in Betracht gezogen wird, treten die Unterschiede der Auffassungen zutage. Aber auch hier ist das Verhältnis zwischen Hilbert und den Intuitionisten nicht einfach zu kennzeichnen. Sieht man zunächst nur auf das »inhaltlich« durchforschte (metamathematische) Gebiet, so ist Hilbert zurückhaltender

1) In einer früheren Schrift »Über den Zahlbegriff« (1900), Math. Ver. Bd. 8, S. 180 = Grundlagen der Geometrie, Anh. VI) hatte Hilbert noch eine rein axiomatische Begründung der Arithmetik befürwortet. Gegen diese Hilbertsche Unterfuchung richtet sich O. Hölder's vorhin genannte Kritik (l. c. § 117), die ein sehr lehrreiches Beispiel für die Aufweisung versteckter arithmetisch-kombinatorischer Verfahrensweisen in einer angeblich rein logischen Ableitung darstellt.

2) Seit Hufferls Unterscheidung etwa zwischen »figuralem Moment« (Philosophie der Arithmetik, S. 227) oder »sinnlichem Einheitsmoment« (Logische Untersuchungen, II. Bd., VI. Unterf. § 51) und Kollektivum ist es nicht mehr angängig, auch nur die einfachste Menge als rein sinnlich konstituiert anzusehen. (Vgl. auch des Verf. Bemerkungen in ds. Jahrb. 6, S. 418/9.)

3) Hilbert, Neubegründung der Arithmetik. (Erste Mitteilung), Abhandl. d. Math. Seminars d. Hamburg. Universität (1922), Bd. I, S. 157–163.

als seine Gegner. Er macht (in ausdrücklicher Weise!) nur Anspruch auf die »inhaltliche« Erkenntnis des Endlichen; Brouwer und Weyl dagegen dehnen diese Art der Betrachtung (und für sie ist ja, nach Hilberts Redeweise, alle Mathematik eigentlich »Metamathematik«!) auch auf das Endlose aus. Sieht man genauer zu, so lehnt Hilbert die Möglichkeit, das Endlose inhaltlich zu erfassen, nicht geradewegs ab, nur ist es nach ihm in Anbetracht anderer fruchtbarer Möglichkeiten nicht notwendig, diesen mühsamen Weg inhaltlicher Erkenntnis so weit zu gehen. Bernays sagt in seinem Vortrag »Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik«¹, eine Berufung auf ein anschauliches Erfassen der unendlichen Zahlenreihe sei möglich, aber es könne sich dabei nicht um Anschauung im »primitiven« Sinne handeln, »und wenn es auch ganz voreilig wäre, jede weitergehende Art von anschaulicher Evidenz von vornherein abzustreiten, werden wir doch derjenigen Tendenz der exakten Wissenschaft Rechnung tragen, welche darauf gerichtet ist, die feineren Organe der Erkenntnis nach Möglichkeit auszuschalten und nur die primitivsten Erkenntnismittel zu Hilfe zu nehmen.« Der Hilbert-Bernays'sche Standpunkt unterscheidet sich also von dem Brouwer-Weyl'schen viel mehr durch die verschiedene methodische Absicht als in der Beurteilung der vorliegenden Sachlage.²

Das tritt noch viel eindringlicher vor Augen, wenn man auf die Theorie des »Endlosen« etwas näher eingeht. Es ist in erster Linie Brouwers große Leistung, die Idee des Unendlichen wieder auf ihren spezifischen »potentiellen« Ursprung im Aristotelischen *ἀπειρον δυνατόν* (Phylik III, 6) zurückgeführt zu haben, indem er 1. die endlose Folge als Urbild des Unendlichen ansprach, 2. die echte Zeitbedingtheit dieser Folge, als einer werdenden, durch die eingehende Betrachtung der »frei werdenden Wahlfolgen« dartat (dabei außer Aristotelischen auch Kantische Gedanken über das Wesen der natürlichen Zahlenreihe und des Unendlichen wieder aufnehmend. — Vgl. darüber § 6 b II). Diesen positiven und in der Tat unwiderleglichen Aufstellungen der Intuitionisten über die endlosen Folgen hat Hilbert seine Anerkennung ebenfalls nicht verlagert. Er bemerkt ausdrücklich in seinem Aufsatz [in den Math. Ann. 88], daß man das »tertium non datur« nicht ohne weiteres

1) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band 31, S. 10 ff. (1922).

2) Kürzlich hat sich Hilbert allerdings gegen die Berechtigung des »inhaltlichen« Unendlich überhaupt ausgesprochen (Math. Ann. 95).

Husserl, Jahrbuch f. Philosophie. VIII.

von endlichen auf unendliche Gesamtheiten ausdehnen könne. »Bei unendlich vielen Dingen hat die Negation des allgemeinen Urteils $(a)A(a)$ $\{= \text{alle } a \text{ haben das Prädikat } A\}$ gar keinen präzisen Inhalt, ebenfowenig wie die Negation des Existenzialurteils $E(a)A(a)$ $\{= \text{es gibt ein } a \text{ mit der Eigenschaft } A\}$. Allerdings können gelegentlich diese Negationen einen Sinn erhalten, nämlich wenn die Behauptung $(a)A(a)$ durch ein Gegenbeispiel widerlegt wird oder wenn aus der Annahme $(a)A(a)$ bzw. $E(a)A(a)$ ein Widerspruch abgeleitet werden kann. Diese Fälle sind aber nicht kontradiktorisch entgegengesetzt; denn wenn $A(a)$ nicht für alle a gilt, wissen wir noch nicht, daß ein Gegenstand mit der Eigenschaft Nicht- A wirklich vorliegt; ebenfowenig dürfen wir ohne weiteres sagen: entweder gilt $(a)A(a)$ bzw. $E(a)A(a)$ oder diese Behauptungen weisen einen Widerspruch wirklich auf. Bei endlichen Gesamtheiten sind »es gibt« und »es liegt vor« einander gleichbedeutend; bei unendlichen Gesamtheiten ist nur der letztere Begriff ohne weiteres deutlich« [l. c. S. 155]. Diese Darlegungen könnte wörtlich ein Intuitionist geschrieben haben. In der sachlichen Beurteilung der Problematik des Endlosen ist ebenfalls kein Unterschied in den Auffassungen der beiden Parteien festzustellen. Aber die Folgerungen, die jede Partei aus dieser einmütig festgestellten Sachlage zieht, sind durchaus verschieden. Schon hier zeichnet sich ein Tatbestand ab, der noch weiterhin unsere schärfste Beachtung fordern wird: das Motiv für das Einschlagen so verschiedener Wege kann nicht einfach in der feststellbaren identischen mathematischen Sachlage liegen, sondern muß von andersartigen Überzeugungen, die man als philosophische wird anzusprechen haben, ausgehen.

Das Weiterschreiten von dem jetzt erreichten Punkte aus erfolgt schon dem Problematz nach in ganz verschiedenen Richtungen. Die Intuitionisten sehen sich vor die Notwendigkeit gestellt, die eigentümlichen Verhältnisse hinzunehmen, die die wesentliche Zeitbestimmtheit oder, was sonst das Endlose als solches kennzeichnet, mit sich bringt; d. h. sie suchen ihre Begriffe und Forschungswege dieser eigenartigen Gegenständlichkeit und ihrem Sinngehalt anzumessen; – mag das auch noch so unbequem sein, noch so viel Arbeit der Neubegründung angeblich schon seit langem gesicherter mathematischer Ergebnisse erfordern und noch soviel schmerzlichen Verzicht auf schon Errungenes in der Mengenlehre und verwandten Disziplinen bedeuten. Hilbert, der »Formalist«, weicht dagegen dieser bitteren Notwendigkeit aus, indem er von vornherein auf die »inhaltliche« Erkenntnis des Unendlichen überhaupt ver-

richtet; [man denke an die oben angeführte eigenartige Begründung von Bernays mit der angeblichen »Tendenz der exakten Wissenschaft«!] Er erblickt seine Aufgabe lediglich darin, »zu erkennen, worin und inwiefern die Anwendung transfiniter Schlußweisen, so wie sie in der Analysis und Mengenlehre geschieht, doch stets 'richtige' Resultate liefert. Auf dem Boden des Finiten soll also die freie Handhabung und volle Beherrschung des Transfiniten erreicht werden!« (l. c. S. 156). Es liegt ihm also vor Allem an der Erhaltung des Besitzstandes der mathematischen Wissenschaft, an der Möglichkeit, eine Reihe hergebrachter Beweisführungen unter Umdeutung ihrer früheren Meinung in der Neubegründeten Wissenschaft beizubehalten. Das unter dieser Bemühung sich das Thema, der Gegenstand und das Ziel mathematischer Forschung unverfehens verschoben hat, bekümmert ihn wenig. Nicht etwa, daß ihm die Tatsache dieser Verschiebung entginge: es finden sich bei ihm (später noch näher zu besprechende) Ausführungen, in denen er ausdrücklich ablehnt, »Wahrheiten im absoluten Sinne« über Transfinites auszusprechen. Und Bernays, dessen quasi-philosophische Auslegung der Hilbertschen Absichten diese vielleicht doch etwas überspannt, macht gewissermaßen aus der Not eine Tugend und erblickt den Vorzug des Hilbertschen Verfahrens gerade darin, »daß die Probleme und Schwierigkeiten, welche sich in der Grundlegung der Mathematik bieten, aus dem Bereich des Erkenntnistheoretisch-Philosophischen in das Gebiet des eigentlich Mathematischen übergeführt werden. Die Mathematik schafft sich hier selbst ein Schiedsgericht, (infolge der Möglichkeit, die Widerspruchsllosigkeit vorgelegter Axiomensysteme zu beweisen), vor welchem alle grundsätzlichen Fragen in spezifisch mathematischer Weise zum Ausdruck gebracht werden können, ohne daß man es nötig hat, sich über subtile logische Gewissensfragen den Kopf zu zerbrechen . . . «¹

Auf Grund dieser vorläufigen Skizze der Gemeinsamkeiten und Gegenläufe der Parteien im Grundlagenstreit kann der Zusammenhang mit dem Problem der *m a t h e m a t i s c h e n E x i s t e n z* herausgestellt werden.

Der Terminus »Existenz«, im allgemeinen eine Weise des Seins bezeichnend, hat in der hergebrachten Mathematik eine besondere

1) Ähnlich äußert sich Hilbert selbst in seinem letzten Aufsatz (Math. Ann. 95). Er leugnet dort das Sein des Unendlichen überhaupt, es ist für ihn eine bloße »Redensart«. Trotzdem gewinnt man, sobald er sich mit mengentheoretischen Dingen beschäftigt, den zwingenden Eindruck, daß er doch insgeheim an das Unendliche irgendwie »g l a u b t«.

Bedeutung gewonnen. Dies tritt besonders hervor, wenn man den Gebrauch der Ausdrücke »Existentialaxiom«, »Existentialsatz« und »Existenzbeweis« (und seinen Gegensatz: »Unmöglichkeitsbeweis«) näher prüft.

Zu Beginn einer streng, d. h. auf Axiome aufgebauten, mathematischen Erörterung, wird die »Existenz« der mathematischen Gegenständlichkeiten gefordert, die in den nachfolgenden Axiomen eine Rolle spielen. So beginnt etwa Hilberts heute schon klassische Axiomatik der Geometrie mit den Worten »Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen . . .« (Punkt, Gerade, Ebene genannt). »Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen . . .« Unter diesem »Wir denken« ist gemeint: wir denken sie als mathematisch existierend, unter Umständen, die in den folgenden Axiomen noch genauer bestimmt werden. Unter diesen Axiomen sind nämlich noch explizite »Existentialaxiome« wie z. B. I, 3 »Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte . . .« usw. Auch wenn in manchen Darstellungen so allgemeine Existentialaxiome wie die genannten mit »Wir denken« beginnenden Sätze Hilberts nicht vorangestellt werden, so sind sie doch stets stillschweigend mitgemeint. Die häufig verwendete implizite Definition der einer bestimmten Theorie zugrunde liegenden mathematischen Gegenständlichkeiten macht häufig ins einzelne gehende Existentialaxiome überflüssig. Es ist dann immer stillschweigend vorausgesetzt, daß es die implizit definierten »Dinge« gibt, d. h. daß es solche »Dinge« gibt, die den in den Axiomen ausgedrückten Bedingungen genügen.¹

Was bedeutet aber nun dieses »existiert« oder »es gibt«? Zunächst doch wohl nur das, daß jene »existierenden Gegenständlichkeiten« zum Thema der weiteren Betrachtung gemacht werden².

Aber freilich ist dies nicht hinreichend. Denn von allem anderen abgesehen könnte es sich ereignen, daß diese harmlos zum Thema gemachten »Dinge« im Laufe der Theorie widersprechende Eigenschaften erhielten. Das würde die Theorie unmöglich machen. (Die genaueren Gründe für diese für gewöhnlich als selbstverständ-

1) Man könnte einwenden: Die implizite Definition besagt nur: »sofern solche Gegenstände existieren, stehen sie in den und den Beziehungen«. Aber das ist angesichts des hypothetischen Charakters der gemeinhin verwendeten Axiome kein wesentlicher Unterschied.

2) Vgl. H. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre. Berlin 1923, S. 188: »Die Behauptung ‚*m* existiert‘ will also nichts anderes ausdrücken, als daß *m* eine der für uns in Betracht kommenden Mengen bezeichnet.«

lich angelegene Annahme werden später auseinandergelegt werden.) Man wird also von den »mathematisch existierenden« Gegenständen zum mindesten verlangen müssen, daß sie in widerspruchsfreier Weise in einer Theorie figurieren können. Hiermit sind wir in der Tat zu einem ersten denkbaren Begriff von mathematischer Existenz gelangt.

Def. I. Mathematisch existent heißen Gegenständlichkeiten, die zum Thema einer mathematischen Theorie gemacht werden und in dieser Theorie widerspruchsfrei fungieren können.

Wichtig ist, das lediglich dies implizite »Fungieren«, »in Funktion stehen« notwendig ist. Ob die »Gegenständlichkeit« als solche zugänglich, d. h. ob sie überhaupt ein eigentlicher Gegenstand ist (wozu gehört, daß sie ein mögliches Phänomen ist), das bleibt zunächst ganz dahingestellt.

Gegenüber diesem, in sich allem Anschein nach unanfechtbaren ersten Begriff von Existenz ist schon seit der Antike ein zweiter aufgetreten, der das Kennzeichnende des existierenden mathematischen Gegenstandes in seiner Konstruierbarkeit gelegen sein läßt. So wird etwa im I. Buche Euklids gleich zu Beginn (I, 1) das gleichseitige Dreieck konstruiert und damit als existierend hingestellt. Soll diese Forderung der Konstruierbarkeit einen präzisen Sinn haben, so ist es notwendig die Konstruktionsgrundlagen und Konstruktionsmittel anzugeben. Diese sind bei Euklid (für die Planimetrie), roh gesprochen, durch die beiden *αἰτίματα* (»Postulate« in der ursprünglichen, jetzt verblaßten Bedeutung) gegeben: »Um jeden Punkt der Ebene kann man mit beliebigem Radius den Kreis schlagen.« Und: »Durch zwei beliebige Punkte der Ebene kann man eine Gerade ziehen.« Betrachtet man das Verfahren Euklids genauer, so sieht man, daß er nur solche Punkte als existierend annimmt, die von einem gewissen Ausgangspunkt und einer gewissen Einheitsstrecke aus mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. (Also so, daß in den Koordinaten der existierenden Punkte höchstens aus Quadratwurzeln zusammensetzbare Irrationalitäten vorkommen.) Nach diesem (nun wieder hinreichend zu verallgemeinernden) Prinzip muß man also folgende zweite Erklärung des Begriffs der mathematischen Existenz geben:

Def. II. Mathematisch existent sind solche Gegenstände, die von einem festgelegten Ausgangspunkt aus mit bestimmt umschriebenen Mitteln konstruiert werden können.

Die Angabe der Konstruktionsgrundlagen oder -mittel bestimmt dann im einzelnen Fall den jeweils vorliegenden Existenzbereich. In jedem Fall wird dann die Zugänglichkeit (d. h. in gewissem Sinn die »Phänomenalität«) des Gegenstands durch die Konstruktion zum mindesten relativ auf die Konstruktionsgrundlage gesichert, d. h. ist der Ausgangspunkt »selbst gegeben«, so ist es auch das Konstruierte.

Es ist offensichtlich, daß die beiden im Vorigen skizzierten Auffassungen der Grundlegungsfrage diesen beiden »Definitionen« der mathematischen Existenz in gewisser Weise entsprechen. Die erste dem axiomatischen Formalismus, die zweite dem Intuitionismus.

Diesen Definitionen entsprechen dann auch zwei verschiedene historische Auffassungen der Existenzbeweise bzw. der Existenztheoreme. Während die antike Auffassung (II) die aktuelle Konstruktion des Existierenden im Existenzbeweis verlangt und es auch in der neueren Mathematik vielfach derartige konstruktive Existenzbeweise gibt, so stehen dem doch gerade in der neuesten Mathematik auch häufig Existenzbeweise und Existenzprinzipien gegenüber, die keineswegs gestatten, die als »existierend« nachgewiesene Gegenständlichkeit wirklich »vorzulegen«. Zuerst geschieht das vielleicht in Riemanns sogenanntem Dirichletschen Prinzip¹.

Ein anderes berühmtes Beispiel ist der erste (von P. Gordan als »theologisch« bezeichnete) Beweis der Endlichkeit des vollen Invariantensystems von Hilbert. Ein einfacheres, sehr instruktives Beispiel mit Gegenbeispiel gibt ebenfalls Hilbert in seinem Aufsatz »Axiomatisches Denken« (Math. Ann. Bd. 78, S. 412–5). Nach Toeplitz (im Hilbert-Heft der »Naturwissenschaften« Bd. 9) sind derartige Beweise überhaupt für Hilberts mathematisches Denken besonders charakteristisch, und es ist daher seine prinzipielle Stellung zu der ganzen Frage von besonderem Interesse. Hilbert meint auch für seine Auffassung aus den konstruktiven Tendenzen Brouwers oder Weyls Nutzen ziehen zu können. »Das Hindernis für die Vereinigung der beiden Ziele (der konstruktiven und der axiomatischen Methode) liegt nur in der vorgefaßten Meinung . . ., daß...

1) Riemann, Gesammelte Werke, 1. Aufl., S. 30–35, 90–93. Historisch ist die Benennung »Dirichletsches Prinzip« nicht ganz korrekt; das Prinzip geht, wie Bolza in seinem Aufsatz »Gauß und die Variationsrechnung« III. Teil, § 2) in Gauß' Gesammelten Werken, Bd. X, 2) gezeigt hat, auf Gauß' Untersuchungen zur Potentialtheorie (1834/40) zurück. Vgl. auch F. Klein, Gesammelte Abhandl., Bd. III, S. 493, Anm. 2.

im Gebiete der Arithmetik jede Konstruktion durchaus eine Zahlenkonstruktion sein müsse.« Diese Ansicht erachtet Hilbert für ein Vorurteil. »Eine konstruktive Umdeutung der Existentialaxiome ist nicht nur in der Weise möglich, daß man sie in Erzeugungsprinzipien zur Konstruktion von Zahlen umwandelt, sondern die durch ein solches Axiom ermöglichte Schlußweise kann als Ganzes durch einen formalen Prozeß ersetzt werden, derart, daß an Stelle der Allgemeinbegriffe wie Zahl, Funktion usw. bestimmte Zeichen treten. »Wo Begriffe fehlen, da stellt ein Zeichen zur rechten Zeit sich ein.« Dies ist das methodische Prinzip der Hilbertschen Theorie.«¹ Man könnte auf den Schlußgedanken mit Bezug auf diese eigentümliche »Theorie« mit dem anderen Faust-Zitat antworten »Spottet ihrer selbst und weiß nicht wie«! Denn *θεωρία* heißt doch »Schau« und diese wird sozusagen grundsätzlich abgelehnt! Selbst wenn man diese Darstellung in ihren Formulierungen nicht ganz ernst nimmt, so ist doch so viel ersichtlich, daß jene Ersetzung des Existenzsatzes durch einen formalen Prozeß gar nichts mehr mit der Herstellung eines wirklichen Zugangs zu der fraglichen Gegenständlichkeit zu tun hat, sondern gerade sich der Dringlichkeit der Zugangsforderung (der Forderung der »Phänomenalität«) zu entziehen sucht durch den Schleichweg einer Schein-Konstruktion, eines Konstruktions-Erfasses!

Es erhellt aus dem Vorstehenden der fundamentale Zusammenhang zwischen dem philosophischen Problem des Sinns der Mathematik überhaupt, und dem mathematischen Grundlagenstreit.

Sofern nämlich Philosophie Wissenschaft vom Seienden als solchem (dem *ὅν ἢ τὸ ὄν* des Aristoteles oder dem *ὄντως ὄν* Platons) ist, besteht ihre Grundaufgabe gegenüber dem Mathematischen, wie gegenüber jedem Gegenständlichen darin, seinen Seinsinn, das Wie seines Seins aufzudecken². Also stellt sie die ontologische Fundamentalfrage nach dem Sinn der »mathematischen Existenz«. Auf diese Frage geben aber die beiden Parteien im Grundlagenstreit wesentlich verschiedene Antworten. Diese Antworten der »Sachverständigen« werden nun dem Philosophen als Unterlagen dienen müssen für seine kritische Untersuchung des Wie der mathematischen Existenz.

Aus diesem Grunde knüpft die folgende Darstellung immer wieder an die Formulierungen der Gegner im Grundlagenstreite an.

1) Zitiert nach Bernays, Jahresber. d. D. Math. Ver. Bd. 31, S. 16.

2) Der Terminus »Seins-Sinn« stammt von Heidegger als Übersetzung des Aristotelischen *οὐσία* (entstellt in der scholastischen Tradition mit »Substantia« wiedergegeben).

»Was befragt, nicht nur in mathematischer, sondern in philosophischer Strenge gefragt, mathematische Existenz? Wie sind die beiden in den »Definitionen« zutagetretenden »Lösungen« jenes Problems zu beurteilen?« – Das sind die Fragen, die im folgenden behandelt werden sollen.

§ 3.

Immanente Kritik der Hilbertschen Theorie.

Der Grundlagenstreit, dessen Zuspitzung auf die Idee der mathematischen Existenz soeben gezeigt wurde, scheint zunächst keiner unparteiischen Schlichtung fähig. Man mag eben Hilberts grundsätzlichen Verzicht auf philosophische Klärung noch so sehr bedauern, man wird deswegen seine eigene, in philosophischer Hinsicht sehr resignierte, in mathematischer sehr kühne Grundstellung in ihrer inneren Folgerichtigkeit nicht erschüttern können. Insbesondere wird es unmöglich sein, ihm die Aufgabe philosophischer Klärung von außen aufzuzwingen. Man wird daher zweckmäßigerweise versuchen, sich zunächst auf seinen Standpunkt zu stellen und zu erwägen haben, ob sich nicht auch innerhalb seines eigenen Gedankenganges Fragen erheben, die bis ans Ende verfolgt, schließlich zur Aufgabe oder wenigstens Modifikation des ursprünglichen Frageanlasses führen.

a) Die Bedeutung der Forderung der Widerspruchsfreiheit.

Auch wenn man sich Hilberts Gesichtspunkt ganz zu eigen macht, kann man fragen: Sind die »Probleme und Schwierigkeiten, welche sich in der Grundlegung der Mathematik bieten« wirklich damit erledigt, daß man die Widerspruchsfreiheit eines zur Begründung der hergebrachten Analysis und Mengenlehre hinreichenden Axiomensystems nachgewiesen hat?

Was ist mit dieser Widerspruchsfreiheit gewonnen? Welche Bedeutung hat sie für die Grundlegung der Mathematik? Warum soll man ihr eine solche Bedeutung beilegen?

Man könnte geneigt sein, diese Frage für bloß rhetorisch zu halten. Denn, so könnte man sagen, was ist selbstverständlicher als die Forderung der Widerspruchsfreiheit? Ist sie nicht die von jeher bekannte *conditio sine qua non* jeglichen wissenschaftlichen Denkens überhaupt? Aber man beachte genau, um was es sich hier bei Hilbert handelt! Nicht um die Widerspruchsfreiheit der inhaltlich erforschbaren »Metamathematik«, sondern um die der nur formal, in dem Zusammenhang ihrer Konsequenzen und sonst nicht irgendwie

gegebenen, inhaltlich völlig sinnleeren eigentlichen Mathematik. Man gebe sich über die völlige Inhaltslosigkeit dieser Hilbertschen Mathematik keiner Täuschung hin. Wohl gibt Hilbert selbst zur Erläuterung seines transfiniten Axioms das Beispiel des unbeflecklichen Aristides. Aber es handelt sich offenbar um nichts mehr als um eine dazu noch ziemlich vage Analogie. Denn die Menge der Menschen ist zwar in gewissem Sinne konkret unübersehbar, aber sicher endlich. Und die Mengen, die Hilbert »eigentlich« meint, sind nicht nur nicht endlich, sondern im eigentlichen Sinne transfinit; »überendlich«, nicht bloß endlos.¹⁾ Durch diese Erschleichung (subreptio) wird die inhaltliche Bedeutsamkeit des transfiniten Axioms vorgetäuscht. Nun soll hier dieser Merkwürdigkeit, daß nach Hilbert die gesamte Mathematik eine gänzlich inhaltsleere Wissenschaft sein soll, noch nicht weiter nachgeforcht werden. Aber es bleibt die Frage zu beantworten, was denn ein Widerspruch in dieser Kette von Schlüssen zwischen zugestandenermaßen leeren Begriffen zu bedeuten habe. Daß Sätze mit irgend einem sachlichen Gehalt²⁾ nicht widerspruchsvoll und zugleich wahr sein können, ist freilich evident, — zum mindesten in der hier allein betrachteten mathematischen Sphäre. Und ebenso evident ist, daß falsche und überhaupt nicht wahre und nicht verifizierbare Sätze ohne wissenschaftlichen Wert sind. Aber die Sätze im Hilbertschen logischen Formalismus sind weder wahr noch falsch. Von ihnen gilt in aller Strenge das Russell'sche Witzwort, die reine Mathematik handle von Dingen, die völlig unbekannt, und von Sätzen, von denen niemand wisse, ob sie wahr oder falsch

1) Es sei der Klarheit und Kürze des Ausdrucks wegen gestattet, folgende Bezeichnungen anzuwenden:

1. endliche oder finite Mengen.
 2. endlose oder indefinite Mengen. (In Cantors Redeweise entsprechen ihnen die abzählbaren Mengen, und besonders die vom Ordnungstyp ω .)
 3. überendliche oder transfinite Mengen. (Die nicht abzählbaren Mengen Cantors, wie das Kontinuum $[2^{\aleph_0}]$ oder auch die 2. Zahlenklasse mit der Mächtigkeit: \aleph_1 .)
2. und 3. können unter der Bezeichnung »unendliche« (infinite) Mengen zusammengefaßt werden.

2) Es ist hier der »sachliche Gehalt« durchaus noch zu scheiden von der Sachlichkeit im Sinne des 1. Abschnitts der Hufferl'schen »Ideen«. Bei der Unterscheidung der materialen (sachhaltigen) Ontologie und der formalen Ontologie steht natürlich auch die »sachliche« reine Mathematik (also in Hilberts Redeweise »Metamathematik«) auf der Seite der formalen Ontologie und macht sogar deren wichtigsten Teil aus.

sein¹. Die einzelnen Theoreme der Hilbertschen Mathematik machen sozusagen gar keinen Anspruch darauf, verifizierbar zu sein. Man kann ihnen gegenüber diese Frage gar nicht stellen; – sondern nur die andere, ob sie (aus den vorausgesetzten Axiomen) beweisbar sind oder nicht.²

Daß ein bestimmtes Theorem der Analysis beweisbar ist und ein bestimmtes anderes nicht, das sind also auch für Hilbert wahre (bzw. falsche) Aussagen, – nur sind sie keine mathematischen, sondern »metamathematische« Aussagen. Und überhaupt gilt: nur metamathematische, nicht eigentlich mathematische Sätze sind der Wahrheit bzw. Falschheit fähig.

Es sei nun die Frage wiederholt: Welche Bedeutung vermag die Forderung der Widerspruchsfreiheit in der Hilbertschen Theorie zu haben? Offenbar keine mathematische, sondern nur eine metamathematische Bedeutung. Beweisbarkeit ist eine metamathematische Eigenschaft eines einzelnen Theorems, Widerspruchsfreiheit eine solche des ganzen Systems der Mathematik. Es handelt sich ja keineswegs um die Widerspruchsfreiheit der Gesamtheit der metamathematischen Aussagen selbst, – darin läge kein Problem, sondern um Widerspruchsfreiheit in bezug auf die eigentliche Mathematik. Was kann es aber für einen Sinn haben, von der Wahrheit bzw. Falschheit unfähigen Sätzen und Satzsystemen Widerspruchsfreiheit zu fordern? Sie kann doch jetzt nicht mehr in ihrer Funktion als *conditio sine qua non* der Wahrheit von Wert sein!³

Die Antwort ist einigermaßen merkwürdig; sie lautet: ist die Widerspruchsfreiheit der formalen Hilbertschen Mathematik auch

1) Vielleicht müßte man noch schärfer sagen, nicht nur wisse man nichts über ihre Wahrheit oder Falschheit, sondern »an-sich« sei eine Frage danach sinnlos. Aber wir sind nicht sicher, ob wir damit Hilberts Meinung treffen würden.

2) Diese Eigentümlichkeit teilen die Hilbertschen Theoreme bekanntlich mit allen Theoremen eines hypothetisch-deduktiven Systems (beispielsweise des Systems der verschiedenen Geometrien), aber neu ist, daß die Analysis selbst, die Grundlage der höheren Mathematik überhaupt, jeder Möglichkeit der Verifikation ermangeln soll.

3) H. Weyl stellt die nämliche Frage in seinen »Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik« (Math. Zeitschr. 20, S. 148): »Auf diesem (Hilbertschen) Standpunkt darf man nicht nach einem tieferen Grund für die angenommenen Axiome und Operationsregeln fragen; auch ist nicht abzusehen, warum man gerade Wert darauf legt, daß das »Formelspiel widerspruchsfrei ist, oder warum man das inhaltliche Denken sich nicht noch mit anderen aus dem Spiel entspringenden Fragen beschäftigen läßt.« Er versucht aber keine Lösung.

nicht die unerläßliche Bedingung der Wahrheit der Theoreme, so ist sie doch die *conditio sine qua non* der Fortführbarkeit des Deduktionsprozesses. Durch die Widerspruchsfreiheit und durch sie allein ist also das mathematische »Formelspiel« vor dem vorzeitigen Abbrechen geschützt. Dies ist der metamathematische Sinn der Forderung der Widerspruchsfreiheit.

Was befähigt die Widerspruchsfreiheit zu dieser Leistung? Wieso hemmt der Widerspruch die Deduktion, wo es doch gar nicht auf die Wahrheit des Deduzierten ankommt?

Weil nach einem bekannten Theorem der formalen Logik ein »falscher« (und daher a fortiori ein »widerspruchsvoller«) Satz alle denkbaren Sätze nach sich zieht. Das rührt daher, daß ja zugleich mit dem »falschen« Satz auch sein kontradiktorisches Gegenteil »gilt«. Zwei kontradiktorisch entgegengesetzte Sätze erfüllen aber das »All der Aussage« d. h. sie sind äquivalent mit allen Sätzen überhaupt (der betreffenden deduktiven Region). Bei Hilbert gälte im besonderen zugleich mit $0 \neq 0$ (der Formel des Widerspruchs) auch die »richtige« Formel $0 = 0$. Die »Richtigkeit« dieser Formel hat einen formaldefinierten Sinn, hat also mit »Wahrheit« im inhaltlichen Sinn nichts zu tun.¹ Ebenso wenig die Falschheit des kontradiktorischen Gegenteils. Die Sache ist die: es folgen aus den zugleich vorausgesetzten Formeln $0 = 0$ und $0 \neq 0$ alle Sätze zugleich mit ihren kontradiktorischen Verneinungen, also immer mit irgend einem p zugleich sein Gegenteil \bar{p} (nicht- p). Damit hat es aber jeden Sinn verloren, noch von irgend einem Satz p zu behaupten, er sei beweisbar; denn da ja doch stets entweder p oder \bar{p} bestehen muß, so weiß man ja von vornherein, daß jeder Satz beweisbar ist². Die Beweisbarkeit verliert daher völlig ihren auszeichnenden Charakter; man kann von keinem (innerhalb der vorliegenden mathematischen Region) denkbaren Satz mehr behaupten, er folge irgendwie eher aus den vorausgesetzten Axiomen als sein Gegenteil oder irgend ein anderer Satz. Man kann also alles beweisen, und das heißt soviel als man kann nichts mehr beweisen. Das Spiel der formalen Deduktion ist zu Ende³.

1) Vgl. W. Ackermann, Mathematische Annalen Bd. 93, S. 4.

2) Im Hilbertschen logischen Kalkül gilt formal der Satz vom ausgeschlossenen Dritten.

3) Vgl. zum ganzen Gedankengang O. Hölder, Die mathematische Methode (Berlin 1924), S. 276f.

Somit hat sich herausgestellt, daß allerdings die Widerspruchsfreiheit von höchster Bedeutung ist für jedes deduktive Verfahren aus axiomatischen Grundfäßen überhaupt, mag ihm nun ein inhaltlicher Sinn zukommen oder nicht. Sie ist sozusagen eine notwendige Lebensbedingung für den Deduktionsprozeß selbst. Damit ist ihre zentrale Stellung unter den Aufgaben der Metamathematik, die sie in Hilberts Theorie einnimmt, gerechtfertigt.

b) Das Transfinite und das Imaginäre.

Nachdem es als gesichert betrachtet werden kann, daß die Hilbertsche Forderung der Widerspruchsfreiheit auch bei strenger Innehaltung seines rein formalistischen Standpunkts ihren guten Sinn hat, nämlich als unerläßliche Bedingung der Möglichkeit der Deduktion, erhebt sich die weitere Frage, ob man darüber hinaus den so als möglich erkannten widerspruchsfreien Gegenständlichkeiten der Hilbertschen Mathematik nicht auch eine positive Bedeutung zuschreiben muß. In der Tat liegt doch die Frage nahe: Wozu eigentlich dieses widerspruchsfreie Deduzieren? Mit seiner Möglichkeit ist doch noch nicht seine Notwendigkeit, seine positive Sinnhaftigkeit gezeigt. Hilbert selbst hat auf diese Frage, deren Dringlichkeit er sich nicht hat entziehen können, folgende Antwort gegeben:¹ »In meiner Beweistheorie werden zu den finiten Axiomen die transfiniten Axiome und Formeln hinzugefügt, ähnlich wie in der Theorie der komplexen Zahlen zu den reellen die imaginären Elemente und wie in der Geometrie zu den wirklichen die ideellen Gebilde. Und auch der Beweggrund dafür und der Erfolg des Verfahrens ist in meiner Beweistheorie der gleiche wie dort: nämlich die Hinzufügung der transfiniten Axiome geschieht im Sinne der Vereinfachung und des Abchlusses der Theorie«². Es ist nun zu prüfen; ob diese These Hilberts einer kritischen Betrachtung stand hält. Über die Bedeutung der imaginären Zahlen ist nach allgemeinem Urteil schon von Gauß das Wesentliche gesagt worden, an jener berühmten Stelle der Anzeige der *Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda* vom 23. April 1831³, wo von ihm »die wahre Metaphysik der imaginären Größen in ein neues helles Licht gestellt« wird. Gauß geht davon aus, daß die Arithmetik sich erst

1) Math. Annalen Bd. 88, S. 160/61.

2) Später (in Math. Ann. 95) hat sogar Hilbert diesen »pragmatischen« Gedanken zum Leitfaden seiner gesamten Beweistheorie gemacht!

3) Werke, II. Band, S. 175ff.

in neuerer Zeit entwickelt habe, im Gegensatz zur Geometrie. Der Begriff der Zahl sei stufenweise von den ganzen zu den gebrochenen Zahlen, dann zu den negativen und endlich zu den imaginären erweitert worden. »Dieses Vorschreiten ist aber immer anfangs mit furchtjam zagendem Schritt geschehen. Die ersten Algebraisten nannten noch die negativen Wurzeln der Gleichungen falsche Wurzeln, und sie sind es auch, wo die Aufgabe, auf welche sie sich beziehen, so eingekleidet vorzutragen ist, daß die Beschaffenheit der gesuchten Größe kein Entgegengesetztes zuläßt. Allein so wenig man in der Allgemeinen Arithmetik Bedenken hat die gebrochenen Zahlen mit aufzunehmen, obgleich es so viele zählbare Dinge gibt, wobei eine Bruchzahl ohne Sinn ist, ebensowenig durften in jener den negative Zahlen gleiche Rechte mit den positiven deshalb verweigert werden, weil unzählige Dinge kein Entgegengesetztes zulassen: Die Realität der negativen Zahlen ist hinreichend gerechtfertigt, da sie in unzähligen anderen Fällen ein adäquates Substrat finden. Darüber ist man freilich seit langer Zeit im klaren: allein die den reellen Größen gegenübergestellten imaginären – ehemals und hin und wieder noch jetzt, obwohl unschicklich, unmögliche genannt – sind noch immer weniger eingebürgert als nur geduldet, und erscheinen also mehr wie ein an sich inhaltsleeres Zeichenspiel, dem man ein denkbare Substrat unbedingt abspriicht, ohne doch den reichen Tribut, welchen dieses Zeichenspiel zuletzt in den Schatz der Verhältnisse der reellen Größen steuert, verschmähen zu wollen.« Gauß betrachtet nun im weiteren die Sache »aus einem anderen Gesichtspunkt.« Er legt dar, wie schon positive und negative Zahlen nur da Anwendung finden können, »wo das Gezählte ein Entgegengesetztes hat, was mit ihm vereinigt gedacht der Vernichtung gleichzustellen ist.«

»Genau betrachtet findet diese Voraussetzung nur da statt, wo nicht Substanzen (für sich denkbare Gegenstände), sondern Relationen zwischen je zwei Gegenständen das Gezählte sind.« In ähnlicher Weise zeigt er dann, daß wenn die Gegenstände derart sind, »daß sie nicht in eine, wenngleich unbegrenzte, Reihe geordnet werden können, sondern sich nur in Reihen von Reihen ordnen lassen«, d. h. wenn sie eine »zweidimensionale Mannigfaltigkeit« bilden, es neben der positiven und negativen Einheit $+1$ und -1 noch »zweier anderer unter sich auch entgegengesetzten« Einheiten $+i$ und $-i$ bedarf. Darauf wird dann die uns heute so wohlbekannte Vorstellung der komplexen Zahlenebene entwickelt und am Schluß stehen die bedeutamen Worte: »Hat man diesen Gegenstand bisher aus einem falschen

Gefichtspunkt betrachtet und eine geheimnisvolle Dunkelheit dabei gefunden, so ist dies großenteils den wenig schicklichen Benennungen zuzuschreiben. Hätte man $+1$, -1 , $\sqrt{-1}$ nicht positive, negative, imaginäre (oder gar unmögliche) Einheit, sondern etwa direkte, indirekte, laterale Einheit genannt, so hätte von solcher Dunkelheit kaum die Rede sein können.* Die an sich sehr bekannten Gauß'schen Ausführungen wurden deshalb mit solcher Ausführlichkeit wiedergegeben, weil sie wirklich verdienen, klassisch genannt zu werden. Es ist darin mit aller Klarheit alles Entscheidende über die Frage des Imaginären vom Standpunkt des Mathematikers aus gesagt. Auch die neuere Begründung des Rechnens mit komplexen Zahlen mittels des Begriffs des »Zahlenpaares« bringt kein wirklich neues Moment in die Diskussion.¹ Den philosophisch entscheidenden Kernpunkt der Gauß'schen Auffassung kann man so ausdrücken: das »Imaginäre« bildet zusammen mit dem »Reellen« ein »komplexes« Gebiet, das ebenso real, d. h. wirklichkeitsnah ist, wie das Gebiet der ursprünglich allein »reell« genannten Zahlen. Die Leistung von Gauß besteht gerade darin, dem gesamten komplexen Zahlensystem nicht nur ein »denkbares« Substrat sondern sogar eine »anschaulichste Verfinnlichung« gegeben zu haben². Das besagt, phänomenologisch angesehen, daß er das Imaginäre nicht als leer, obgleich vielleicht widerspruchlos Vermeintes hat stehen lassen, sondern zu seiner erfüllten Anschauung gebracht hat. Dabei braucht man übrigens nicht an die geometrische »anschauliche Verfinnlichung« in wörtlicher Bedeutung zu denken; phänomenologisch gesehen handelt es sich dabei ja doch um »kategoriale Anschauung«³; die »arithmetische«

1) Zur Theorie des Imaginären vgl. Hölder, l. c. X. Abschnitt, über die Zahlenpaare insbes. § 80; ferner F. Klein, Vorlesungen über Elementar-Mathematik vom höheren Standpunkt aus. I. Teil, 1. Hauptteil, Abschn. IV. (Ursprünglich autographiert 1908 und 1911, neuerdings im wesentlichen unverändert gedruckt, Berlin 1924.) Diese Werke sind auch zur Orientierung für Nichtmathematiker besonders geeignet.

2) Vgl. dazu noch die folgende Äußerung von Gauß (l. c. S. 174): »Die Verfehlung der Lehre von den biquadratischen Resten in das Gebiet der komplexen Zahlen könnte vielleicht manchem, der mit der Natur der imaginären Größen weniger vertraut und in falschen Vorstellungen davon befangen ist, anstößig und unnatürlich scheinen, und die Meinung veranlassen, daß die Untersuchung dadurch gleichsam in die Luft gestellt sei, eine schwankende Haltung bekomme und sich von der Anschaulichkeit ganz entferne. Nichts würde ungegründeter sein als eine solche Meinung. Im Gegenteil ist die Arithmetik der komplexen Größen der anschaulichsten Verfinnlichung fähig...«

3) Vgl. Hufferl, Log. Untersuchungen, Bd. II, 2 (VI. Untersuchung).

Vorstellung der doppelt endlosen Reihe ist phänomenologisch durchaus erfüllte Anschauung, wenn auch »kategoriale«, – während noch Leibniz die resignierten Worte schrieb¹: Der göttliche Geist habe »eine feine und wunderbare Ausflucht gefunden in jenem Wunder der Analysis, dem Monstrum der idealen Welt, fast einem Amphibium zwischen Sein und Nicht-Sein, daß wir die imaginäre Wurzel nennen.« Diese »schwankende Haltung des Imaginären« hat Gauß von Grund aus und für immer gefestigt. Das Imaginäre als »Laterales« hat keinen prinzipiell anderen Seins-Sinn als etwa das Negative (»Inverse«).

Wie steht es nun mit dem Hilbertschen Transfiniten? Bedarf es da auch nur einer zweckmäßigen Veränderung der Bezeichnungsweise, um alle Dunkelheit verschwinden zu lassen?

Man sieht nach einiger Überlegung leicht, daß beim Transfiniten Hilberts die Dinge ganz anders liegen als beim Imaginären. Die Hilbertschen transfiniten Axiome sind offenbare Analogiebildungen zu Gesetzmäßigkeiten, die für endliche Mengen gelten. Das Aristides-Beispiel, das schon besprochen wurde, beweist dies klar.² Das leitende Prinzip ist, möglichst viele Eigenschaften endlicher Mengen auch für die unendlichen als gültig anzusehen³. »Möglichst viele« befagt dabei: so viele ihrer sich ansezen lassen, ohne daß man zu widersprechenden Konsequenzen kommt. Wenn man in der Geschichte der Lehre von den imaginären Zahlen nach einem entsprechenden Standpunkt sucht, so stößt man auf denjenigen, den Hankel das »Prinzip der Permanenz formaler Gesetze« genannt

1) Leibniz, Math. Schrift. (Gerhard) V., 357. Die ganze Stelle lautet im Urtext:

»Verum enim vero tenacior est varietatis suae pulcherrimae Natura rerum aeternarum varietatum parens, vel potius Divina Mens, quam ut omnia sub unum genus compingi patiatur. Itaque elegans et mirabile effugium reperit in illo Analyseos miraculo, idealis mundi monstro, pene inter Ens et non-Ens Amphibio, quod radicem imaginariam appellamus.«

2) Auch Hilbert selbst ist sich darüber keineswegs im Unklaren, man vgl. W. Ackermanns Äußerung (Math. Ann. Bd. 93, S. 8).

3) Vgl. Weyl, Math. Zeitschr. 20, S. 143, 147 (das über den »Existenzialabsolutismus« Gefagte) und 150: »Vielleicht ist es aber ja doch so, wie Hilbert zu meinen scheint, daß für den mathematischen Teil der theoretischen Weltkonstruktion das Prinzip der Widerspruchlosigkeit zusammen mit der Forderung, die vom neuen Existentialabsolutismus über das Unendliche nach Analogie des Endlichen aufgestellten Behauptungen so weitgehend wie möglich symbolisch zu rechtfertigen, als einziger Leitfaden genügt.«

hat¹. Es ist dies zugleich diejenige Auffassung, die, ohne explizite formuliert zu werden, die Anfänge des Rechnens mit den Imaginären geleitet hat, die bis in das 16. Jahrhundert zurückreichen². Man führt etwa $i = \sqrt{-1}$ also $i^2 = -1$ ein und rechnet mit diesem zunächst ganz bedeutungsleeren Symbol nach den sachlich für reelle Zahlen sinnvollen Rechenregeln. Dabei erweist sich im Verlaufe einer ausgedehnten Benützung die mathematische Fruchtbarkeit dieses zunächst ganz willkürlichen Verfahrens. Der erste Fall, indem es sich als fruchtbar erwies, war der sog. Casus irreducibilis der kubischen Gleichung, den Bombelli zuerst mit Hilfe des Imaginären behandelte³. Indessen tritt nun bei der naiven Anwendung eines solchen Verfahrens sofort das Gespenst eines möglichen Widerspruchs auf, der sich bei dem fortgesetzten Gebrauch des neuen Verfahrens ergeben könnte. Es entsteht damit die Aufgabe, die Widerspruchsfähigkeit des Rechnens mit den neuen Zahlen nachzuweisen. Dieser Nachweis geschieht in der Zeit vor Hilbert stets dadurch, daß man das Rechnen mit den neuen Zahlen abbildet (in eindeutiger Weise) auf das Rechnen mit bestimmten komplexen schon eingeführten Zahlen. (Dabei genügt es bekanntlich, für die gebrochenen, negativen und komplexen Zahlen »Zahlenpaare« einzuführen⁴. Dagegen liegt der Fall bei den irrationalen Zahlen ganz anders und viel schwieriger.) Es ist dann zumeist leicht, für die besonderen eingeführten Komplexe eine anschauliche Deutung aufzuzeigen. Historisch und auch sinngenetisch im Sinne der geistesgeschichtlichen Entwicklung liegt die Sache natürlich umgekehrt. Das anschauliche Substrat ist das erste, was in das wissenschaftliche Bewußtsein tritt. Dann erst wird es formalisiert und damit führt es allererst zu den abstrakten Zahlkomplexen, die dann den neuen Zahlenarten zugeordnet werden.

Dieser Umstand verdeckt nun den Unterschied, der zwischen dem abstrakten Nachweis der Widerspruchsfähigkeit durch Abbildung

1) Vgl. H. Hankel, Theorie der komplexen Zahlensysteme, Leipzig 1867, S. 10. — Historisch tritt dieses Prinzip zuerst im 14. Jahrhundert bei Oresme auf. S. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Leipzig 1874, S. 350/351.

2) Bei Oresme (14. Jahrh.) dient das fragliche Prinzip zur Erweiterung des Potenzbegriffs durch die Zulassung gebrochener Exponenten.

3) In seiner Algebra von 1579. Vgl. darüber Hölder, l. c. § 78.

4) Eine zusammenhängende Darstellung dieser Dinge gibt z. B. Hölder in seinem akadem. Programm »Die Arithmetik in strenger Begründung.« (Leipzig 1914).

auf eine als widerspruchsfrei bekannte abstrakte Mannigfaltigkeit und der Bereitstellung eines konkreten »Substrats« besteht: also etwa zwischen der Abbildung der gebrochenen, negativen, imaginären Zahlen auf gewisse »Zahlenpaare« und ihrer anschaulichen Deutung mittels der Teilung von Gegenständen, der Richtungsunterschiede in der Geraden und in der Ebene. Wir haben also, um ganz deutlich zu sein, drei verschiedene Momente bei der Einführung neuer Zahlenarten zu unterscheiden:

1. den Anfaß der formalen Rechenregel; zumeist nach dem Prinzip der (größtmöglichen) Permanenz der formalen Gesetze,
2. den Nachweis der Widerspruchsfreiheit des eingeführten Rechnungsverfahrens; i. A. geführt durch Abbildung auf bereits als widerspruchsfrei bekannte Systeme,
3. die Aufweisung eines anschaulichen Substrats, in dem die neueingeführten Zahlenbeziehungen konkret (besonders in ihrem Zusammenhang mit den bereits bekannten Verhältnissen) gedeutet werden können.

Die vor Hilbert übliche Beweismethode für den zweiten Punkt bringt es, wie schon ausgeführt, mit sich, daß zugleich mit der Erledigung des Problems (2) auch das Problem (3) gelöst ist: zugleich mit dem Nachweis der Widerspruchsfreiheit ist der Aufweis eines anschaulichen Substrats gegeben. Das Neue am Hilbertschen metamathematischen Beweisverfahren ist dagegen, daß durch es nur das 2. aber nicht auch das 3. Problem gelöst wird: die Widerspruchsfreiheit des arithmetischen Axiomensystems einschließlich der transfiniten Axiome wird nachgewiesen, ohne daß sich aus ihrem gelungenen Nachweis auch nur die leiseste Hindeutung auf ein konkretes Substrat ergäbe, an dem das Transfinite gedeutet werden könnte.

Logisch ist gewissermaßen alles in Ordnung, und die Untersuchung leidet keineswegs an einer »schwankenden Haltung«, aber in ontologischer Hinsicht stellt das Transfinite Hilberts eine sehr merkwürdige Gegenständlichkeit dar, auf die man sehr wohl die Leibnizsche Bezeichnung »Amphibium zwischen Sein und Nichtsein« anwenden kann. Es läßt sich auch nicht leugnen, daß die vorhin angeführte Gaußsche Äußerung vom »inhaltsleeren Zeichenspiel, dem man ein denkbare Substrat unbedingt abspricht, ohne doch den reichen Tribut, welches dieses Zeichenspiel zulegt in den Schatz der Verhältnisse der reellen Größen steuert, verschmähen zu wollen« genau auf das Hilbertsche Transfinite paßt. Höch-

stens könnte man sich gegen den Ausdruck »ein denkbare Substrat« wenden, der von Gauß ziemlich gleichbedeutend mit »anschaulich« gebraucht wird, während gerade hier eine tiefer gehende phänomenologische Untersuchung einen grundlegenden Wesensunterschied aufdecken würde.

In der Tat liegt die Sache, phänomenologisch betrachtet, so, daß man dem Hilbertschen Transfiniten sehr wohl die »Denkbarkeit« zuerkennen muß, die jeder komplexen Bedeutungsintention zukommt, sofern sie nur widerspruchsfrei ist; aber damit ist noch keineswegs die Möglichkeit der anschaulichen Erfüllung jener leeren Bedeutung gesichert. Vielmehr kann sich jener in der Bedeutung gemeinte, proleptisch supponierte Gegenstand »transfinite Menge« bei dem methodischen Versuch, zu ihm einen phänomenologischen Zugang zu finden, als »widerfönnig« herausstellen, d. h. als wesensmäßig unzugänglich, auch für die kategoriale Anschauung.

Freilich ist zu betonen, daß es sich beim Transfiniten um eine ganz eigenartige Sachlage handelt. Man könnte etwa meinen, den bekannten Siebenflächner oder den regulären Taufendflächner zum Vergleich heranziehen zu dürfen. Auch da, so könnte man sagen, lägen Gegenstände vor, die als bloß vermeinte ihrem »Begriff« nach durchaus widerspruchsfrei seien. Versuche man aber zu einer echten, erfüllten Anschauung jener Gegenstände fortzuschreiten, so erweise sich diese als evident unmöglich, man stoße auf einen »material-ontologischen« (anschaulich-räumlichen) Widerfönn. Indessen ist die Gleichsetzung dieses Vorkommnisses mit der Sachlage beim Transfiniten irrig. Denn die Unmöglichkeit jener Polyeder läßt sich beweisen, aus den Axiomen der euklidischen Geometrie des dreidimensionalen Raumes, d. h. die – auch ganz in abstracto (ohne Rekurrenz auf irgendwelche Anschaulichkeit) – gemachte Annahme ihrer »mathematischen Existenz« würde auf Widersprüche im System der euklidischen Raumgeometrie führen.¹ Nicht nur mißlingt der »Existenzbeweis«, sondern er schlägt in einen echten »Unmöglichkeitsbeweis« um. Es liegt also auch ein formal-ontologischer Widerfönn vor, wenn man die betr. Polyeder als auf Grund der abstrakten euklidischen Axiome abstrakt definierte Gegenstände betrachtet. Beim Hilbertschen Transfiniten verhält es sich aber gerade so, daß die Unmöglichkeit derartiger Widersprüche in aller Stringenz durch

1) Beim Taufendflächner geriete man etwa mit dem Satz über die Summe der »Seiten« einer »körperlichen Ecke« in Konflikt. Vgl. Weber-Wellstein³, (Enzyklopädie der Elementar-Mathematik) Bd. II, § 91.

Hilberts eigenartige Methode nachgewiesen ist. Man muß also zusammenfassend sagen: die Hilbertschen transfiniten Mengen sind mit allen ihren Eigenschaften:

1. widerspruchlos denkbar, d. h. im Sinne der Bedeutungs-Logik »existierende Gegenständlichkeiten«,
2. auch im Sinne der formalen Ontologie nicht »widerfinnig«,
3. trotzdem prinzipiell der (das Sein in der formal-ontologischen Sphäre konstituierenden) »kategorialen Anschauung« nicht zugänglich, also formal-ontologisch nicht positiv existierend.

Die Unterscheidung von (2) und (3) ist ein Novum¹. Bisher wurde angenommen, daß die Eigenschaft (2) stets (3) nach sich zöge. Die Möglichkeiten »formal-ontologischer Widerfinn – formal-ontologische Existenz« schienen eine vollständige Disjunktion zu bilden. Und nun hat sich herausgestellt, daß gewisse Gegenständlichkeiten im Sinne der formalen Ontologie weder widerfinnig noch existent sind.² Zu diesen merkwürdigen Gegenständlichkeiten gehören eben Hilberts transfinite Mengen.

Hieraus erhellt, daß ein grundfälglicher ontologischer Unterschied zwischen ihnen und den imaginären Zahlen besteht. Denn diese sind – als »laterale Zahlen« im Gaußschen Sinn – der kategorialen Anschauung ohne weiteres zugänglich. Damit ist also dem Hilbertschen Vergleich zwischen dem Transfiniten und Imaginären seine wesentlichste Stütze entzogen. Die Funktion des Imaginären³ in der geklärten Gaußschen Auffassung läßt sich nicht mehr mit der des Transfiniten auf eine Stufe stellen.

Will man den gegenwärtig (seitens der sog. »Philosophie des Als-Ob«) so viel gebrauchten Begriff der Fiktion einführen, so kann man sagen: beim Transfiniten handelt es sich um eine echte, beim Imaginären um eine bloß scheinbare Fiktion. Die zweite ist durch eine geeignete Änderung der Bezeichnung zum Verschwinden zu bringen, die erste nicht. (Die transfiniten Aussagen sind prinzipiell nicht anschaulich verifizierbar.)

1) Man könnte höchstens die Kantische Unterscheidung von ens imaginariun, ens rationis und nihil negativum (Kritik der reinen Vernunft² S. 347f. vergleichen. (Siehe unten § 6c III D und IV.).

2) Sie sind also wirklich »Amphibien zwischen Sein und Nicht-Sein«!

3) Das Gleiche gilt mutatis mutandis von den »idealen« Gebilden der Geometrie und ebenso von den »Idealen« der höheren Arithmetik.

Indessen muß entgegen der Meinung der »Fiktionalisten« gesagt werden, daß hier auch bei den »echten Fiktionen« Widersprüche nachweislich nicht vorkommen. Eine Philosophie des Als-Ob im Sinne Vaithingers kann sich also keineswegs zur Bestätigung ihrer Lehre von der »Fiktion in der Mathematik« auf Hilberts Transfinites berufen.

Aus der Ablehnung des Hilbertschen Vergleichs zwischen Transfinitem und Imaginärem ergibt sich aber auch eine ernstere Konsequenz: die Frage nach einem berechtigten Motiv für die Einführung des Transfiniten bleibt offen. Die Analogie mit dem Imaginären ist nicht wirklich vorhanden, also kann auch dies für die Einführung des Imaginären maßgebende Motiv »der Vereinfachung und des Abschlusses der Theorie« nicht mehr für das Transfinites in Anspruch genommen werden. Wozu also das Hilbertsche Formelspiel?

Diese Frage muß trotz ihrer Dringlichkeit vorläufig unbeantwortet bleiben¹.

1) Hilbert hat in seiner schon zitierten neuen Arbeit »Über das Unendliche« den Gesichtspunkt der Analogie seiner Einführung des Transfiniten mit der des Imaginären usw. durch frühere Mathematiker an die Spitze seiner gesamten Betrachtung des Unendlichen gestellt. Er sagt (Math. Ann. Bd. 95, S. 174): »Wenn wir im Bereich der finiten Aussagen bleiben . . . , so walten da sehr unübersichtliche Verhältnisse ob, und diese Verhältnisse steigern sich bis zur Unerträglichkeit, wenn das »alle« und »es gibt« kombiniert und in eingeschachtelten Sätzen auftritt. Jedenfalls diejenigen logischen Gesetze, die die Menschen, seit sie denken, stets gebraucht haben, und die eben Aristoteles gelehrt hat, gelten nicht. Nun könnte man darauf ausgehen, die für den Bereich der finiten Aussagen gültigen logischen Gesetze aufzustellen; aber damit wäre uns nicht gedient, da wir eben auf den Gebrauch der einfachen Gesetze hinauswollen . . . Gerade wie $i = \sqrt{-1}$ eingeführt wurde, um die Gesetze der Algebra . . . in der einfachsten Gestalt aufrecht zu erhalten, gerade wie die Einführung der idealen Faktoren geschah, um auch unter den algebraischen Zahlen die einfachen Teilbarkeitsgesetze beizubehalten, . . . so haben wir hier zu den finiten Aussagen die idealen Aussagen zu adjungieren, um die formal einfachen Regeln der üblichen aristotelischen Logik zu erhalten.«

Bei der Aufstellung dieser Analogie ist, wie im Text gezeigt, ein entscheidender Punkt übersehen: Während die imaginär-komplexen Zahlen durch Paare gewöhnlicher Zahlen, die unendlich fernen »idealen« Punkte durch Parallelbüschel, die Zahlideale durch gewisse gesetzmäßig gebildete Zahlensysteme aus gewöhnlichen Zahlen abgebildet und im Sinne der ursprünglichen, »wirklichen« mathematischen Gegenständlichkeiten interpretiert werden können, — ist dies bei den »idealen Aussagen« nicht der Fall. Diese sind vielmehr reine »Gesetzhelten«, die keiner irgendwie inhaltlichen Interpreta-

c) Die immanente Unvermeidlichkeit des Unendlichen
in der Metamathematik.

Blickt man auf die bisher gegebenen Erörterungen über die Hilbertsche Theorie zurück, so erkennt man, daß das ihr zugrundeliegende Prinzip der Widerspruchsfreiheit zwar seinen guten Sinn hat, insofern es die unbeschränkte Möglichkeit weiterer Deduktionen garantiert, daß aber andererseits jede positive Motivation vermißt wird, überhaupt zu deduzieren. Indessen, trotz dieser eigentümlichen Zwecklosigkeit scheint doch die Möglichkeit einer sozusagen auf eigenen Füßen stehenden, mit lediglich finiten Mitteln operierender Theorie des Transfiniten gesichert und der immanenten Kritik entzogen. Eine Entscheidung zwischen der intuitionistischen und der formalistischen Auffassung des mathematischen Grundlegungsproblems wird so nicht erreicht.

Sie würde indessen erreichbar sein, wenn es gelänge zu zeigen, daß das Endlose auch in Hilberts Theorie eine (wenn auch verschwiegene) »inhaltliche«, metamathematische Bedeutung hat. Denn der Streit zwischen Brouwer und Hilbert geht eigentlich um das Endlose. Hilbert lehnt die Bemühungen der Intuitionisten um das Endlose als überflüssig und bedenklich ab. Denn einerseits kann keines Erachtens sogar das Transfinite, also erst recht das bloß Indefinite, rein finit »begründet« werden. Andererseits scheint ihm eine Erweiterung der Intuition über das Finite hinaus mit einem gewissen Unsicherheitsfaktor behaftet, und deshalb soll sie vermieden werden. Diesen beiden Gegenargumenten gegen den Intuitionismus wäre nun in dem Augenblick der Boden entzogen, wo gezeigt würde, daß das Indefinite in dem metamathematischen Teil der Hilbertschen Theorie selbst notwendig eine Rolle spielt. Denn alsdann wäre es offenbar sicher nicht überflüssig und, wenn vielleicht auch bedenklich, jedenfalls mit Hilberts eigenen Mitteln nicht vermeidbar.

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, daß das Indefinite auch in den metamathematischen Überlegungen der Hilbertschen Theorie tatsächlich nicht vermieden wird und nicht vermieden werden kann.

tion fähig sind. Man verschleiert einfach durch Einführung der idealen Auslagen den tiefgehenden Unterschied zwischen der Logik des Endlichen und der des Unendlichen, die – darin weichen wir vom Finitismus Hilberts ab –, wenn man nur die richtigen Urphänomene zugrunde legt, gerade so real und konkret entwickelt werden kann, wie die Logik des Endlichen.

Das Indefinite tritt nämlich schon in der grundlegenden Fragestellung Hilberts so offensichtlich hervor, daß man sich wundern muß, daß kaum jemand darauf aufmerksam geworden ist¹.

Wie ist denn das Problem der Widerspruchsfreiheit eines bestimmten Axiomensystems selbst genauer zu formulieren? Doch wohl so: »Es ist zu zeigen, daß aus dem vorgelegten Axiomensystem keine einander widersprechenden Theoreme gefolgert werden können, wie weit man auch die Deduktion fortsetzen mag«. Oder: »Die Reihe der aus den Axiomen deduzierten Formeln kann unbefristet verlängert werden, ohne daß $0 \neq 0$ als Formel auftritt, — unbefristet, d. h. bis ins Endlose. Man kann die i. A. nicht lineare, sondern nach Art eines Stammbaumes oder besser eines Netzes verzweigte Mannigfaltigkeit der Axiome durch Zerlegung in unverzweigte »Fäden«² in eine endliche Anzahl linearer »Folgen« von Formeln verwandeln. Nun kann man dieser Formelfolge eine Zahlenfolge nach der Regel eindeutig zuordnen, daß für jede von $0 \neq 0$ verschiedene Formel die 1 und für die Formel $0 \neq 0$ die 2 gesetzt wird. Dann kann man die Aussage der Widerspruchsfreiheit in die Form kleiden: In der zugeordneten, frei werdenden, nur die Zahlen 1 oder 2 enthaltenden Zahlenfolge, die mit 1111... beginnt, kommt die 2 niemals vor. Die Zahlenfolge ist in der Tat eine frei werdende, denn die Entwicklung der zugeordneten Formelfolge erfolgt Schritt für Schritt, je nach dem Fortschritt der Entwicklung der mathematischen Theorie.

Wie ist nun eine solche Behauptung, die 2 komme in jener Folge niemals vor, zu beweisen?

Der nächstliegende Gedanke ist: durch eine Art vollständiger Induktion. So sagt wirklich H. Poincaré³: »Man müßte feststellen, daß man sich, soweit man auch die Reihe der

1) Zu den wenigen Ausnahmen gehört H. Poincaré, dessen Ausführungen aber gegenwärtig nur noch wenig Beachtung zu finden scheinen. (Siehe die in Anm. 3 gegebenen Zitate.) Nur A. Fraenkel (Einleitung in die Mengenlehre, S. 240) erwähnt die Ausführungen Poincarés.

2) Durch Wiederholung von Sätzen usw. vgl. W. Ackermann, Math. Ann. 93, S. 6; Hilbert, Math. Ann. 88, S. 157/58.

3) Vgl. H. Poincaré, Wissenschaft und Methode (deutsch von F. u. L. Lindemann, Leipzig u. Berlin 1914), S. 138, 147/48, 151, 155, 157/58. Das Zitat steht auf S. 147/48. Es ist leicht verändert und steht im Original in einem anderen Zusammenhang. Hilberts Theorie ist S. 151–158 behandelt, allerdings nur in der Fassung von 1904.

Schlußfolgerungen verfolgt, niemals dem Widerspruche auslegt. . . . Wir können verifizieren, daß die Operationen der Logik, wenn sie auf widerspruchsfreie Prämissen angewandt werden, nur Folgerungen ergeben können, die gleichfalls von Widersprüchen frei sind. Wenn wir also in n Operationen auf keinen Widerspruch stoßen, so werden wir einem solchen auch nicht in der $(n+1)^{\text{ten}}$ Operation begegnen. Es ist demnach unmöglich, daß der Widerspruch beginnt, was beweist, daß wir ihm niemals begegnen werden Ähnliche Argumentationen finden sich nun wirklich bei Hilbert¹, aber »wenn zwei daselbe tun, so ist es nicht daselbe«. Denn in Hilberts Schule² unterscheidet man »zwei Formen von vollständiger Induktion:

1. Die »engere Form«, die sich nur auf etwas konkret und abgeschlossen Vorliegendes bezieht.

2. Die »weitere Form«, die entweder den Allgemeinbegriff der Zahl oder das Operieren mit Variablen benutzt.«

»Während die weitere Form eine höhere Schlußweise ist, deren Begründung eine der Aufgaben der Hilbertschen Theorie bildet, gehört die engere Form den primitiven anschaulichen Erkenntnisweisen an und kann daher als Hilfsmittel der inhaltlichen Beweisführung angewandt werden.« (Bernays.)

In der Tat beginnt jeder Hilbertsche Widerspruchsfreiheitsbeweis mit den Worten »Wir nehmen an, es sei uns ein Beweis vorgelegt, der zur Endformel $0 \neq 0$ führt«. Und dann wird gezeigt, daß dies unmöglich ist.

Aber, was ist damit eigentlich gezeigt? Oder vielmehr: was ist damit eigentlich vorausgesetzt?

Es wird gesagt: »es liege ein Beweis abgeschlossen vor«. Genauer müßte es heißen »irgend ein Beweis«, mit dem Nebengedanken »das gilt von jedem beliebigen Beweis« (der überhaupt der Menge der auf Grund des in Frage stehenden Axiomensystems zu führenden Beweise angehört). Denn nur, wenn man diese Interpretation des unbestimmten Artikels »ein« zuläßt, wird die Hilbertsche metamathematische Beweismethode zwingend. Wird hierbei aber nicht bereits die »weitere Form« des Prinzips der vollständigen Induktion angewandt? Spielt hierbei nicht bereits »der Allgemeinbegriff der Zahl oder das Operieren mit Variablen«

1) f. oben § 1 b. (S. 16.)

2) Bernays, Jahresber. d. D. Math. Vereinig. Bd. 31 (1922), S. 10 ff.

eine Rolle? Ist nicht gerade das scheinbar so harmlose »ein« ein verschleierter Ausdruck für eine logische Variable¹?

In der Tat ist ja die Menge der aus einem bestimmten Axiomensystem zu führenden Beweise – trotzdem jeder einzelne Beweis aus einer endlichen Anzahl von »Zeichen« besteht – unendlich². Das beruht wesentlich darauf, daß man für den einzelnen Beweis B_q zwar eine Zahl M_q angeben kann, die die Anzahl seiner einzelnen Formeln übertrifft, aber daß es keine derartige obere Schranke M gibt, die für alle Beweise gleichzeitig gilt, sodaß sie also alle mit ihrer Formelzahl unter derselben festen Schranke liegen würden. (In ähnlicher Weise liegt die Sache etwa bei der allgemeinen Formel für $(a+b)^n$, dem binomischen Satz. Bis zu einer bestimmten Zahl n , etwa für $n=1, 2, 3 \dots, 34$ kann man ihn durch finite (engere) Induktion beweisen, aber nicht allgemein, obwohl doch auch im letzteren Fall jedes einzelne vorlegbare n endlich ist.) Indem Hilbert bei seiner metamathematischen Beweisführung immer nur auf den einen, als Beispiel dienenden finiten Beweis hinblickt, vergißt er, daß er die weitere (verschwiegene) Annahme macht, es könne die gesamte unendliche Menge solcher möglichen Beweise mit einem Blicke erfaßt werden. Aber das ist eine petitio principii: es wird die »inhaltliche« (metamathematische) Erfassung der unendlichen (freilich nur indefiniten, nicht im engeren Sinne transfiniten) Menge vorausgesetzt.

Man kann dies leicht noch weiter im einzelnen dartun, wenn man sich der vorhin gemachten Zuordnung zu der aus Einsen und Zweien bestehenden Zahlenfolge bedient.

Ein »Beweisfaden« werde dargestellt durch die Formelfolge: (\mathcal{A} : Axiom, $\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 \dots$: Konsequenzen.)

$$\mathcal{A} \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_3 \dots \mathfrak{R}_p$$

Zugeordnet sei jeder Formel die 1, wenn sie nicht $0 \neq 0$ ist; die 2, wenn sie $0 \neq 0$ ist. Dann hat man also bei jedem einzelnen »richtigen« Beweis:

$$\begin{cases} \mathcal{A} \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_3 \dots \mathfrak{R}_p \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \end{cases}$$

1) Es sei daran erinnert, daß auch B. Russell den logischen Sinn der mathematischen Variablen durch das englische Wort »any« (irgendein) sprachlich wiedergibt. Vgl. The principles of mathematics (Cambridge 1903), § 87, p. 89.

2) Wenigstens ist das Problem des Nachweises der Widerspruchsfreiheit nur in diesem Falle sinnvoll oder wenigstens nicht trivial. Es könnte vielleicht (!) sein, daß aus bestimmten Axiomensystemen nur eine endliche Anzahl voneinander verschiedener Folgerungen gezogen werden könnte (die sich dann

Beim Widerspruchsfähigkeitsbeweis handelt es sich nun aber nicht um eine derartige endliche Folge, sondern um jede mögliche derartige Folge, wie weit diese Folgerungsketten sich auch ausdehnen mögen. Also um:

$$\begin{array}{l} \{ \mathfrak{A} \ \mathfrak{R}_1 \ \mathfrak{R}_2 \ \mathfrak{R}_3 \ \dots \ \mathfrak{R}_p \ \mathfrak{R}_{p+1} \ \dots \dots \text{ in indefinitum} \\ \{ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \ \dots \dots \text{ in indefinitum.} \end{array}$$

Wie kann man zeigen, daß in der unteren Folge niemals (!) die 2 auftritt?

W. Ackermann hat die Methoden im einzelnen angegeben. Wie geht er vor?

Zunächst führt er nach bestimmten formalen Gesichtspunkten eine Unterscheidung von »richtigen« und »falschen« Formeln ein. Dabei handelt es sich um »numerische Formeln«, d. h. solche, die außer den elementaren logischen Zeichen (für »und«, »oder«, »folgt«, »nicht«, »gleich«, »ungleich«) nur Zahlzeichen enthalten.

»Der Beweis der Widerspruchsfreiheit vollzieht sich nun auf folgende Weise. Man gibt ein Verfahren an, das die Formeln einer vorliegenden Beweisfigur, deren Endformel eine numerische Formel ist, sämtlich in numerische Formeln verwandelt, so weit sie nicht schon solche sind, und zeigt dann, daß auf Grund dieses Verfahrens eine vorliegende Beweisfigur in ein System von lauter richtigen Formeln übergeht. Da $0 \neq 0$ falsch ist, ist damit die Widerspruchsfreiheit des betreffenden Axiomensystems gezeigt!«

Das Verfahren kann hier nicht im einzelnen geschildert werden. Es verläuft im großen so: Man geht von der Endformel des Beweises schrittweise rückwärts, indem man alle Variablen Schritt für Schritt fort schafft und gelangt so schließlich zur Anfangsformel, die offenbar ein Axiom ist. Schließlich besteht die ganze Beweisfigur aus numerischen Formeln. Dann heißt es weiter:

»Die Verbindung der Formeln durch das Schlußschema bleibt unberührt. Sämtliche Formeln der Beweisfigur sind in richtige übergegangen, falls dieses mit den Axiomen der Fall ist. Der Beweis der Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems ist also erbracht, wenn es gelingt zu zeigen, daß bei der Verwandlung der Beweisfigur in numerische Formeln die Axiome in richtige Formeln über-

allenfalls in der Schlußkette wiederholen würden), aber dann kann man ja diese Folgerungen einzeln durchgehen, um ihre Widerspruchsfreiheit festzustellen, wodurch die Lösung des Problems trivial wird.

1) Math. Ann. 93, S. 4.

gehen.« (Dies zu zeigen, bietet aber bei der endlichen Anzahl der Axiome keine Schwierigkeiten.)

Ist man soweit gelangt, so ist die Fortsetzung des Beweises leicht: Aus der »Richtigkeit« der Axiome (die nach gewissen rein formalen Kriterien beurteilt wird) folgt Schritt für Schritt die »Richtigkeit« der Konsequenzen. Die »Richtigkeit« überträgt sich also in der Vorwärtsrichtung bis zur Endformel des Beweises. Diese kann also nicht $0 \neq 0$ sein. (Denn diese Formel ist formal »falsch«.) Damit ist der gewünschte Beweis erbracht.

Dieser metamathematische Beweis ist stichhaltig für jede vorgelegte konkrete »Beweisfigur«, die ja notwendig endlich ist. Denn man braucht alsdann nur die »engere Form« der vollständigen Induktion. Aber daraus folgt keineswegs, daß er für alle Beweisfiguren, die überhaupt möglich sind, gilt. Man muß sorgfältig zwischen den beiden Fällen unterscheiden. Wenn man sich auch jedes einzelne Glied einer unendlichen Menge vorstellen kann, so ist damit noch keineswegs gesagt, daß man sich die ganze Menge als aktual unendliche vorstellen kann. So kann man sich von jeder einzelnen natürlichen Zahl einen deutlichen Begriff machen (sie in bestimmter Weise auch kategorial anschauen). Aber man kann sich von der aktual unendlichen Menge aller Zahlen durchaus keinen Begriff machen, sondern nur von dem ins Endlose gehenden Zählprozeß, der diese Menge als *ἀπειρον διὰ τὸ ἀμειβόμενον* erzeugt.

In ähnlicher Weise kann man sich sämtliche auf Grund eines bestimmten Axiomensystems möglichen Beweise nicht »nebeneinander«, als aktual unendliche Menge denken. Sondern man kann sich nur einen (verzweigten) unendlichen Prozeß vorstellen, der von den Axiomen ausgehend zu immer neuen Folgerungen führt. Bezüglich dieses Prozesses besteht aber nicht einmal die vollständige Disjunktion: entweder kommt im Verlauf des Prozesses die Formel $0 \neq 0$ irgendwo vor oder sie kommt niemals und nirgends vor. (Denn im analogen Fall der schrittweise werdenden Folge gilt eine derartige Disjunktion offenbar nicht.)

Die Sachlage erinnert an eine ähnliche, die eintritt, wenn man den Satz von der (weiteren) vollständigen Induktion auf folgende Weise zu »beweisen« versucht:

Man nehme an, ein Lehrsatz, in den eine ganze Zahl m eingeht, und der erstens für $m = 1$ richtig ist, zweitens stets richtig ist für $m = n + 1$, wenn er für $m = n$ gilt, sei nicht für alle Zahlen $m = 1, 2, 3, 4 \dots$ wahr. Denn müßte es eine erste Zahl v geben,

für die der Satz nicht gilt. Er ist dann aber sicher für $\nu - 1$ richtig. Setzt man nun $\nu - 1 = n$, so ist $\nu = n + 1$ und man kommt zu einem Widerspruch¹.

Es scheint zunächst, als ob dieser »Beweis« die »weitere Form« der Induktion auf die »engere« zurückführt. Aber das ist eine Täuschung. Denn er setzt (nach Hölder, l. c.) »gewissermaßen als logisches Axiom voraus, daß, wenn nicht alle Glieder einer nur nach einer Seite unendlich ausgedehnten Folge eine bestimmte Eigenschaft besitzen, ein erstes Glied da sein muß, das die betreffende Eigenschaft nicht besitzt².

Dieses logische »Axiom« ist aber nichts anderes als das auf endlose Folgen (indefinite Mengen) angewandte Prinzip des ausgeschlossenen Dritten. Denn offenbar ist es gleichbedeutend mit folgendem Satz: »Entweder besitzen alle Glieder der endlosen Folge F die Eigenschaft E , oder es gibt ein Glied (und sogar ein »erstes« Glied), das die Eigenschaft E nicht besitzt. Tertium non datur³.« Man kommt also nicht darum herum, sich mit der endlosen Folge in »inhaltlicher« (metamathematischer) Weise zu befassen und das läuft dann auf das Induktionsprinzip in der »weiteren« Form hinaus. Denn jenes »tertium non datur« für endlose Mengen gilt ja eben, wie sowohl von intuitionistischer wie von formalistischer Seite zugestanden wird, nicht allgemein.

1) Vgl. H. Poincaré, Wissenschaft und Hypothese (deutsch von F. u. L. Lindemann, Leipzig 1904), S. 12. — O. Hölder, Die mathematische Methode (Berlin 1924), § 120, S. 344.

2) Hölder fügt noch folgende Anmerkung hinzu (l. c. Anm. 3): »Da überhaupt ein Glied, das die Eigenschaft nicht besitzt, in der Reihe vorkommen soll, d. h. nach einer endlichen Zahl von Schritten in der Reihe auftreten muß, so gehen diesem Glied nur Glieder in endlicher Zahl voran, und man kann, wenn man die vorangehenden, die Eigenschaft nicht besitzenden Glieder ins Auge faßt, die auf Erschöpfung der Menge gegründete Betrachtungsweise durchführen«, d. h. man kann unter diesen endlich vielen die Eigenschaft nicht besitzenden Gliedern ein erstes finden. — Indessen ist dies eben, wie im Text erläutert, ein Satz über endlose Folgen; denn jenes zuerst genannte Glied, »das nach einer endlichen Zahl von Schritten (sagen wir s) auftreten muß«, ist keineswegs in finiter Weise vorgegeben; man kann keineswegs a priori eine feste obere Schranke M angeben, unter der die Zahl s liegen muß. Vielmehr kann s jede beliebige vorgegebene feste Zahl M übersteigen. — Etwas ganz ähnliches hatten wir oben für die Beweisfiguren gezeigt.

3) Vgl. Hilberts eigene, schon früher angeführte Formulierung, Math. Ann. 88, S. 155.

Nun verfährt der Hilbertsche Beweis für die Widerspruchsfreiheit offenbar ebenso, wie der soeben zergliederte angebliche Beweis des Induktionsprinzips. Hilbert nimmt an, die Formel $0 \neq 0$ komme irgendwo in der deduzierten Formelfolge vor. Dann muß sie an einer bestimmten Stelle zum ersten Mal vorkommen. Dann kommt sie sicher unmittelbar vor dieser Stelle nicht vor.

Damit hat man dann ein endliches Anfangsstück der an sich ins endlose laufenden Deduktionskette gewonnen und man kann dann mit Recht das vorhin im Anschluß an W. Ackermann geschilderte finite Verfahren anwenden. — Aber, das sei zum Schluß nochmals wiederholt, der Schluß, die Formel $0 \neq 0$ müsse an einer bestimmten, vorlegbaren Stelle vorkommen, — wenn sie überhaupt je vorkommen kann — ist falsch! —

Man sieht aus diesen Überlegungen, daß Hilbert im Irrtum ist, wenn er meint, für die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems der Arithmetik und Analysis einen finiten Beweis gegeben zu haben, d. h. einen Beweis, der nur die »primitiven Anschauungstatsachen« der endlichen Mengenbeziehungen verwendet. Er braucht wesentlich zu seiner Beweisführung das Endlose.

Das Schema seines Beweisverfahrens muß so umgestaltet werden, daß ersichtlich wird, daß das Verfahren unbegrenzt fortgesetzt werden kann. So allein ist es möglich, festzustellen, daß $0 \neq 0$ niemals (!) als Konsequenz auftreten kann.

Die Umformung des Hilbertschen Beweisverfahrens ist sehr einfach. Die endlose Folge der Konsequenzen aus einem bestimmten Axiomensystem ist zunächst eine vielfach verzweigte, in viele endlosen Folgen auslaufende offene Mannigfaltigkeit nach Art eines Stammbaumes. Schneidet man ein bestimmtes Anfangsstück ab, so kann man es als »vorgelegte« endliche Beweisfigur F_1 wie bei Hilbert behandeln. Das Resultat der Behandlung ist dann, daß die Endformel dieser Figur »richtig« (also nicht $0 \neq 0$) ist. Dann kann man um ein bestimmtes endliches Stück F_2 in dem endlosen »Stammbaum« der Deduktionen weitergehen und nunmehr die vorhin als richtig erwiesenen Endformeln als Prämissen benutzen. Auf diese Weise werden sämtliche Beweisfäden (nach der festgesetzten Zerfällung) verlängert, und damit kommt man zu einer »verlängerten Beweisfigur« ($F_1 \rightarrow F_2$). Diese kann man wieder auf dieselbe Weise »verlängern« ($F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3$) und diesen Prozeß der Verlängerung einer Beweisfigur kann man unbegrenzt oft anwenden. Man erhält dadurch die offene endlose Beweisfigur $F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3 \rightarrow F_4 \rightarrow \dots \rightarrow F_n \rightarrow F_{n+1} \rightarrow \dots$ in indefinitum, mit lauter »richtigen« Formeln;

also eine gesetzmäßige endlose Folge von richtigen Formeln. Damit ist dann ein korrekter Widerspruchsfreiheitsbeweis zustande gebracht, der jenes falsche Axiom über die vollständige Disjunktion nicht voraussetzt, — aber an seiner Stelle das Prinzip der vollständigen Induktion (im weiteren Sinne). Das ist auch ganz natürlich, denn jenes Axiom gilt eben nur, wo »gesetzmäßige«, der Induktion unterworfenene Folgen vorliegen.

Was leistet nun der so umgestaltete Beweis der Widerspruchsfreiheit? Sofern er sich auf die Theorie der finiten und indefiniten Mengen (ohne Benutzung des *tertium non datur*) beschränkt, offenbar inhaltlich nichts. Er zeigt ja nur, daß das, was »inhaltlich« in der metamathematischen Darlegung benutzt wird, auch in formal-mathematischer Hinsicht widerspruchsfrei ist. Aber der Beweis selbst wäre offenbar unsicher, wenn man diese Widerspruchsfreiheit des materiell in der metamathematischen Überlegung verwandten Beziehungsmaterials nicht voraussetzt. Der Beweis gilt also nur, — wenn das zu Beweisende gilt, — ein immerhin etwas grotesker Sachverhalt.

Schließlich läuft die ganze Sache darauf hinaus, daß eine so offensichtlich die Endlosigkeit begrifflich implizierende Fragestellung wie die nach der Widerspruchsfreiheit eben auch nur unter Verwendung dieses Begriffs des Endlosen beantwortet werden kann; im Grunde eher eine Trivialität als eine Paradoxie. Auch ist dieser Sachverhalt von H. Poincaré¹ schon vor Jahren klar erkannt worden. Aber angesichts des blendenden Scheins der Hilbertschen Argumentation bedurfte es wohl dieser langwierigen und pedantischen Widerlegung². —

1) Vgl. die oben (S. 46) angeführten Stellen. — Ferner auch: H. Fraenkel (Einleitung in die Mengenlehre, 2. Aufl., Berlin 1923) S. 239/40: »Ein ernstes Bedenken [gegenüber der Hilbertschen Theorie] bezieht sich darauf, ob überall bei den inhaltlichen Schlüssen die Benutzung solcher logischen Prinzipien streng vermieden wird und sich vermeiden läßt, deren Begründung eben das Ziel jener Schlüsse ist, also ob z. B. in bezug auf das logische Schließen, das sich in zwar endlichen, aber nicht beschränkten Prozessen vollzieht, Gesetze wie die von der vollständigen Induktion [in der »weiteren Form«] oder vom ausgeschlossenen Dritten [in bezug auf endlose Mengen] niemals verwendet zu werden brauchen, bevor sie durch die neue Methode endgültig gerechtfertigt sind.« — (Die Zusätze in [] sind von mir.)

2) Zur Ergänzung sei noch die Kritik des der Hilbertschen Argumentation analogen Schachbeispiels bei Weyl (Symposion I, S. 22–26; Math. Zeitschr. 20, S. 147 f.) angegeschlossen. Es heißt bei Weyl, zum Beweis dafür, »daß beim Schachspiel 10 Damen einer Farbe in einer spielgerechten Stellung unmöglich sind«: »Die Zugregeln lehren, daß ein Zug die Summe

Indeffen ist mit der Sicherstellung der eben genannten Trivialität noch bei weitem nicht alles gesagt. Vor allem ist damit doch nur ein Teil der Hilbertschen Beweisführung getroffen: nämlich der, der sich auf die (»intuitionistische«) Theorie der finiten und indefiniten abzählbar unendlichen Mengen bezieht, dagegen nicht derjenige, der vom allgemeinen tertium non datur und von der Theorie der eigentlich transfiniten (nicht abzählbar unendlichen) Mengen handelt. Dieser letzte Beweis ist weit davon entfernt, trivial zu sein, wenn er die widerspruchslose »Anfängbarkeit« des Transfiniten zeigt, unter Verwendung lediglich finiter und indefiniten Begriffsbildungen. – Andererseits ist das Endlose als notwendiges Thema inhaltlicher (fachlicher) Untersuchung erwiesen. Der extreme Finitismus Hilberts ist also abzulehnen und das gute Recht der intuitionistischen Forschung anzuerkennen¹.

§ 4.

Logische Analyse der intuitionistischen Thesen.

a) Die Leugnung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten.

Nachdem die im Vorigen gegebene immanente Kritik der Hilbertschen Theorie die Unentbehrlichkeit der Theorie des

$(\mathfrak{B} + \mathfrak{D})$ der Anzahl der Bauern (\mathfrak{B}) und Damen (\mathfrak{D}) einer Farbe niemals vermehren kann. Im Anfang ist diese Summe gleich 9, also kann sie – hier vollziehen wir einen anschaulich-finiten (?) Schluß durch vollständige Induktion – bei keiner Stellung in einer Partie diesen Wert überschreiten.« – Dieser Beweis ist nicht »anschaulich-finit«, sondern anschaulich-indefinit (endlos). Zwar kann man (wenn man von gewissen Remis-Partien, die in der Beweistheorie kein rechtes Analogon haben, abieht) sagen, daß jede einzelne Partie aus endlich vielen Zügen besteht. Aber man kann keine feste obere Schranke M angeben, unter der auf jeden Fall die Zahl der Züge zu bleiben hat. Es gibt daher unendlich viele mögliche Schachpartien; d. h. man kann keine obere Schranke M für ihre Anzahl angeben. Will man also eine Übersicht über alle möglichen Partien gewinnen, so muß man dazu eine endlose werdende Folge von Zügen aufstellen (die dann im einzelnen für ein endliches Anfangsstück der Folge, sagen wir von s Gliedern, eine endliche Anzahl K_s Kombinationsmöglichkeiten von elementaren Zügen enthält). – Wenn also in dem Weylschen Beweis von »keiner Stellung« die Rede ist, so kann nur gemeint sein, »keine aus der endlosen Folge von möglicherweise in irgend einer möglichen Partie noch zu spielenden Stellungen«. Der Beweis beruht dann darauf, daß sich die Konstanz der Summe $\mathfrak{B} + \mathfrak{D}$ von der n ten Stellung allgemein auf die $(n+1)$ te überträgt. Hierbei ist nach dem Gefagten aber wesentlich, daß diese Übertragung ins Endlose (in die offene Unendlichkeit hinein), in indefinitum, stattfindet.

1) S. hierzu den »Mathematischen Anhang«, besonders über neue Untersuchungen von J. v. Neumann.

Endlosen innerhalb gewisser Grenzen dargetan hat, ist die logische Klärung dieser Theorie von ausschlaggebender Bedeutung für die Grundlegung der Mathematik geworden. Brouwer hat bekanntlich diese Klärung in Angriff genommen mit seiner These, daß der logische Satz vom ausgeschlossenen Dritten für unendliche Mengen keine Geltung mehr habe. Er sagt:¹ »Meiner Überzeugung nach sind das Lösbarkeitsaxiom² und der Satz vom ausgeschlossenen Dritten beide falsch, und ist der Glaube an sie historisch dadurch verursacht worden, daß man zunächst aus der Mathematik der Teilmengen einer bestimmten endlichen Menge die klassische Logik abstrahiert, sodann dieser Logik eine von der Mathematik unabhängige Existenz a priori zugeschrieben und sie schließlich auf Grund dieser vermeintlichen Apriorität unberechtigterweise auf die Mathematik der unendlichen Mengen angewendet hat.« Der Tatbestand, auf den sich diese These stützt, ist im Vorigen wiederholt dargestellt worden: In einer unendlichen Folge von Zahlen etwa besteht nicht die Alternative, daß entweder alle Zahlen der Folge die Eigenschaft E haben oder es (mindestens) eine Zahl der Folge gibt, welche die Eigenschaft E nicht beiligt.

Dieser Tatbestand kann nun aber verschieden interpretiert werden; man kann etwa folgende Auffassungen anführen:

1. Das genannte »entweder – oder« bezeichnet wirklich eine vollständige Disjunktion im formalen Sinn. Aber der Satz vom ausgeschlossenen Dritten gilt nicht. (Brouwer.)

2. Es bezeichnet nur scheinbar eine vollständige Disjunktion: in Wahrheit stehen die beiden disjunktiven Glieder sich nicht wie Position und Negation gegenüber (Weyl), d. h. rein formell besteht nur die Alternative »entweder alle Zahlen haben die Eigenschaft E oder nicht«. Aber daß nicht alle Zahlen die Eigenschaft E haben, und daß es eine Ausnahme positiv gibt, das ist nicht dasselbe!

3. Wenn es auch immer eine solche Ausnahme in abstracto »gibt«, so kann sie doch nicht immer »vorgelegt« werden. (Hilberts Formulierung).

Vielleicht ist die dritte Interpretation diejenige, die die tatsächlich stattfindenden Verhältnisse am besten zu charakterisieren scheint. Denn es kommt doch vor allem auf folgenden Punkt an: Weiß man, daß in einer Zahlenfolge nicht alle Zahlen von Eins verschieden sind,

1) In seinem Aufsatz »Intuitionistische Mengenlehre«, Jahresber. d. D. Math. Ver., Bd. 28, S. 203 ff. (1919).

2) d. h. die Annahme, daß jedes mathematische Problem grundsätzlich lösbar sei. (Vgl. Hilbert, Math. Ann. 78, S. 412; 95, S. 180.)

so ist gewiß, daß nach einer endlichen Anzahl N von Wahlen die 1 auftritt, aber es kann a priori durchaus keine feste Zahl M — sei sie auch noch so groß gewählt — angegeben werden, derart, daß N niemals größer als M ist¹.

Immerhin kann man gerade gegen diese Auffassung der Sachlage Bedenken haben. Denn man erwäge die folgende Disjunktion und frage sich, ob sie notwendig entscheidbar sein muß: Von zwei Fällen muß einer stattfinden: »entweder muß die Ausnahmezahl niemals auftreten oder nach einer endlichen Anzahl N von Wahlen, wenn auch keineswegs für diese Anzahl N eine feste obere Schranke M angegeben werden kann.«

Ist dies wirklich eine sinnvolle Alternative? Offenbar ist doch der (in gewissem Sinn »dritte«) Fall denkbar, daß man, so lange man auch wartet, niemals zu einer Ausnahmezahl kommt. Da man aber offenbar nicht unbegrenzt lange warten kann, so läßt sich in diesem Fall durchaus nicht entscheiden, ob in einer endlichen Zukunft die Ausnahmezahl erscheinen wird oder nicht.

Dagegen läßt sich sehr wohl (im Prinzip) die Sache entscheiden, wenn man eine — wenn auch noch so große — obere Schranke M für die Ordnungszahl der »entscheidenden« Wahl kennt. Die Entscheidungswahl kann dann konkret ins Auge gefaßt werden und sie ist dann offenbar der Alternative »ja-nein« unterworfen.

Man hätte also nur eine sinnvolle vollständige Disjunktion: entweder erscheint nach einer bestimmten, unter einer festen oberen Schranke M liegende Anzahl N von Wahlen die Ausnahmezahl oder sie ist auch nach der M^{ten} -Wahl nicht erschienen. Tertium non datur. Innerhalb der zweiten Möglichkeit noch Unterschiede zu machen, entbehrt des verifizierbaren Sinnes.

Indessen bei dieser Auffassung ist das »nicht alle Zahlen der Folge besitzen die Eigenschaft E « nicht eindeutig bestimmt und die rein formal gebildete vollständige Disjunktion ohne rechten Sinn. Die Hilbertsche Unterscheidung zwischen dem »es gibt eine Ausnahme, sie ist aber nicht vorlegbar« und »es gibt keine Ausnahme« ist nicht verifizierbar.

Man muß versuchen, die ganze Sache prinzipieller zu erwägen.

Es sei gegeben ein Satz p . Denkt man sich sein kontradiktorisches Gegenteil, den Satz \bar{p} (nicht- p) hinzu, so besteht die vollstän-

1) Wie sich derartige Verhältnisse u. U. bei konkreten mathematischen Problemen auswirken können, darüber hat Hilbert (Math. Ann. 78, S. 412–15) in seinem Aufsatz »Axiomatisches Denken« sehr lehrreiche Ausführungen gemacht.

dige Disjunktion p oder \bar{p} , tertium non datur. Das ist der übliche logische Standpunkt.

Indessen, bei genauerer Erwägung erkennt man, daß die negative Aussage \bar{p} mehrteilig, nämlich z w e i t e i l i g ist: Für p kann man auch sagen » p gilt«. Oder wenn man einen prädikativen Satz nimmt: Für » A ist b « kann man auch sagen »Es gilt der Satz $\langle\langle A \text{ ist } b \rangle\rangle$ «.

Wie steht es aber mit dem \bar{p} ? Man kann dafür offenbar in analoger Weise sagen: » \bar{p} gilt« oder in der ausführlichen Fassung: »Der Satz $\langle\langle A \text{ ist nicht } b \rangle\rangle$ gilt«. Aber das ist nicht die einzige Möglichkeit, p zu negieren. Es gibt noch die zweite folgende: Man faßt als das kontradiktorische Gegenteil des Satzes p oder » p gilt« usw. die Aussage auf: » p gilt nicht« bzw. »der Satz $\langle\langle A \text{ ist } b \rangle\rangle$ gilt nicht«.

Rein formal hat man also nach dem bisher Entwickelten folgende drei Möglichkeiten:

1. » p gilt« symbolisch etwa » $+p$ « (1)
2. » \bar{p} gilt« „ „ » $+(-p)$ « (2)
3. » p gilt nicht« „ „ » $-(+p)$ « (3)

bzw.:

1. »Der Satz $\langle\langle A \text{ ist } b \rangle\rangle$ gilt« symbolisch: $A \varepsilon b$
2. »Der Satz $\langle\langle A \text{ ist nicht } b \rangle\rangle$ gilt« „ $A \varepsilon \bar{b}$
3. »Der Satz $\langle\langle A \text{ ist } b \rangle\rangle$ gilt nicht« „ $\bar{A} \varepsilon b$

oder allgemeiner:

1. $A(a)$ 2. $\bar{A}(a)$ 3. $\bar{\bar{A}}(a)$

Welche logischen Beziehungen bestehen zwischen diesen 3 Aussagen (1), (2), (3)? —

- a) (1) schließt sich mit (2) und auch mit (3) aus. Dagegen sind (2) und (3) verträglich.
- b) Aus (2) folgt (3), aber nicht umgekehrt aus (3) (2). (2) und (3) sind daher i. H. nicht äquivalent. Doch kann dies in besonderen Fällen eintreten.
- c) Es gilt e n t w e d e r (1) o d e r (2) o d e r (3); die 3 Möglichkeiten bilden eine vollständige Disjunktion; quartum non datur.

Zusammenfassend kann man sagen: es bestehen folgende Möglichkeiten:

- I. (1) gilt; (2) und (3) gelten nicht.
- II. (1) gilt nicht; (2) und (3) gelten.
- III. (1) und (2) gelten nicht; (3) gilt.

Die übrigen rein formal denkbaren Kombinationen des Geltens bzw. Nichtgeltens von (1), (2), (3) stellen keine sinnvollen Möglichkeiten dar.

Um die Bedeutung dieser formallogischen Beziehungen deutlich zu machen, unterscheidet man am zweckmäßigsten zwei Fälle: einen normalen und einen abnormalen.

α) Der normale Fall findet statt, wenn die mögliche aber nicht notwendige Äquivalenz zwischen (2) und (3) besteht. (vgl. b). —

Dann hat man nur eine zweifache vollständige Disjunktion, (Dichotomie, *tertium non datur*).

β) Der abnormale Fall findet statt, wenn (2) und (3) nicht äquivalent sind. (Alsdann folgt, nach b, (3) aus (2), aber nicht umgekehrt.)

Hier findet eine dreifache vollständige Disjunktion statt. (*Trichotomie*; *quartum non datur*.)

Der Fall (α) ist verwirklicht für die Betrachtung von Eigenschaften endlicher Mengen, genauer der Teilmengen einer endlichen Menge. Das ist derjenige Fall, von dem nach Brouwers vorhin zitierten Worten »die klassische Logik abstrahiert« ist.

Der Fall (β) ist dagegen realisiert z. B. bei der Betrachtung von Eigenschaften endloser Zahlfolgen. Dieser Fall ist also noch näher zu klären. Bei ihm muß man, wie gesagt zwischen den beiden möglichen Negationen (2) und (3) des positiven Satzes (1) sorgfältig unterscheiden¹.

Die Notwendigkeit dieser Unterscheidung kann in konkreter Weise klagemacht werden mittels der Hufferl'schen Lehre vom Urteil².

Damit ein Urteil mit der den Forderungen logischer Vernunft entsprechenden Evidenz gefällt werden kann, muß ihm ein mittels der kategorialen erfüllten Anschauung zur Evidenz gebrachter Sachverhalt zugrunde liegen³. Dieser Sachverhalt kann ein positiver oder negativer sein. Auch negative Sachverhalte sind der Erfüllung in einer ganz bestimmten Modifikation zugänglich. Es sei an folgende Ausführungen der »Logischen Untersuchungen« erinnert: (VI. Untersuchung § 11; Bd. II, 2, S. 41): »In der weiteren Sphäre der Akte, welche überhaupt Unterschiede der Intention und Erfüllung zulassen, reiht sich der Erfüllung, als ihr ausschließender Gegensatz, die Enttäufung an. Der zumeist negative Ausdruck, der hierbei zu dienen pflegt, wie z. B. auch der Ausdruck Nichterfüllung,

1) Über den Formalismus der Brouwer'schen Logik f. den mathematischen Anhang.

2) In der VI. logischen Untersuchung. (Bd. II, 1.)

3) Vgl. Hufferl, l. c. § 39 (Log. Untersuchungen II, 2, S. 122 ff.).

meint keine bloße Privation der Erfüllung, sondern ein neues deskriptives Faktum, eine so eigenartige Form der Synthesis wie die Erfüllung. . . . Die Synthesis der Erkenntnis war Bewußtsein einer gewissen »Übereinstimmung«. Der Übereinstimmung entspricht aber als korrelierte Möglichkeit die »Nichtübereinstimmung«, der »Widerstreit«. Die Anschauung »stimmt« zur Bedeutungsintention nicht, sie »streitet« mit ihr. Widerstreit »trennt«, aber das Erlebnis des Widerstreites steht in Beziehung und Einheit, es ist eine Form der Synthesis. War die frühere Synthesis von der Art der Identifizierung, so ist die jetzige von der Art der Unterscheidung. . . . In der hier fraglichen »Unterscheidung« erscheint der Gegenstand des enttäuschenden Aktes als »nichtderselbe«, als »anders« wie der Gegenstand des intendierenden Aktes. . . . Völlig gleichgeordnet sind die beiden Synthesen allerdings nicht. Jeder Widerstreit setzt etwas voraus, was der Intention überhaupt die Richtung auf den Gegenstand des widerstreitenden Aktes gibt, und diese Richtung kann ihr letztlich nur eine Erfüllungssynthesis geben. . . . Eine Intention enttäuscht sich in der Weise des Widerstreites nur dadurch, daß sie ein Teileinerumfassenderen Intention ist, deren ergänzender Teil sich erfüllt«. Die Lehre Hufferls befaßt also zunächst: Erfüllung und Enttäuschung verhalten sich wie Position und Negation: Enttäuschung ist Nichterfüllung; damit gleichbedeutend ist das Bewußtsein der Nichtübereinstimmung zwischen Intendiertem und Angesehenem, des Widerstreits. Um dies Bewußtsein entstehen zu lassen, ist es aber offenbar notwendig, Intendiertes und Angesehenes gleichermaßen gegenwärtig zu haben; deshalb ist auch die Enttäuschung eine »Synthesis«, die »Synthesis des Widerstreits«. Damit aber festgestellt werden kann (was doch offenbar für das Zustandekommen der Synthesis notwendig ist), daß ein bestimmter intendierter Gegenstand einem bestimmten angesehenen »entspricht«, mit welchem er nach der vorwegnehmenden Erwartung, die in jeder auf Erfüllung »ausweisenden« Intention liegt, übereinstimmen sollte, — dazu ist erforderlich, daß die Intention wenigstens in Etwas erfüllt wird¹.

1) Zur Erläuterung diene ein einfaches Beispiel: Wie kommt etwa das Urteil »Das Buch liegt nicht auf dem Tisch« zustande? Erwartet wird, daß das fragliche Buch auf dem bestimmten Tisch liegt. Der Augenschein (eine Weise der Anschauung) zeigt: 1. den betreffenden gemeinten Tisch, 2. den Sachverhalt, daß das gemeinte Buch nicht darauf liegt, d. h. das Leersein des Tisches. Zur evidenten Fällung des obigen Urteils ist der erste Punkt

Die Übereinstimmung zwischen Intendiertem und Angesehenem muß hinreichend fein, um die Identität des angesehenen Gegenstandes mit dem in der Intention vermeinten zu sichern; erst auf Grund dieser Identifizierung hebt sich dann die unterschiedliche wirkliche Beschaffenheit des angesehenen Gegenstandes von der ihm vermeintlich zukommenden ab. Im Grunde ist also jeder Widerstreit ein partieller Widerstreit¹.

Erwägt man diese ganze Hufferl'sche Lehre, so erscheint die vorhin vollzogene Gleichsetzung der Termini »Enttäuschung« und »Nichterfüllung«, »Widerstreit« und »Nichtübereinstimmung« nicht gerechtfertigt. Wenn die Enttäuschung und der Widerstreit positive Phänomene sui generis sind, weshalb dann diese negativen Bezeichnungen? Diese sind nur am Platze, wenn hinter der Gleichsetzung der Ausdrücke auch eine Gleichheit der damit bezeichneten Gegenstände steht. Dies ist aber gerade wegen des durchaus positiven Charakters jener Sachverhalte nicht der Fall.

Genauer gesagt: Eine einfache Nichterfüllung ist durchaus noch keine positiv erlebte Enttäuschung. Denn es kann doch sein, daß es weder zu einer Erfüllung noch zu einer Enttäuschung kommt. Das erhellt aufs klarste daraus, daß jeder Enttäuschung eine partielle Erfüllung zu Grunde liegen muß. Wie nun, wenn es zu gar keiner Erfüllung kommt? Analog setzt »Widerstreit« eine teilweise Übereinstimmung voraus. Wenn es nun aber zu gar keiner Übereinstimmung kommt, – und das ist doch wohl der ausgeprägteste Fall der Nicht-Übereinstimmung – wo ist dann der Widerstreit?

Also haben doch wohl »Nicht-Erfüllung« und »Nicht-Übereinstimmung« ihren guten rein negativen (bzw. privativen) Sinn? Oder vielleicht doch nicht? Vielleicht ist in diesen scheinbar rein negativen Fällen das übereinstimmende und sich erfüllende Moment nur eine Stufe weiter zurückgedrängt?²

ebenso nötig wie der zweite. Der erste gibt die Erfüllungssynthese (Identifizierung des gemeinten und gesehenen Tisches), auf Grund deren allererst das Nicht-Liegen gerade auf diesem Tisch zur Gegebenheit gebracht werden kann, indem es zu einer Synthese des Widerstreits (der »Nichtübereinstimmung« der Intention auf das auf dem Tisch liegende Buch mit dem wahrgenommenen leeren Tisch) kommt.

1) Diese Verhältnisse sind von Hufferl genauer in § 12 der zitierten VI. Untersuchung auseinandergesetzt worden (l. c. S. 44 f.).

2) Auch nach Hufferl (l. c. S. 44 f.) besteht die »totale und reine« Enttäuschung in dem pointierten Herausgehobensein lediglich des unterschiedlichen Teilmoments ϑ (bzw. $\bar{\vartheta}$) am Ganzen Θ . Aber das Ganze Θ steht doch mit seinen übereinstimmenden Momenten μ, ν, \dots im Hintergrund.

Man wird diese Fragen nur an der Hand einer konkreten Analyse entscheiden können.

Man nehme als Vorbereitung den einfachen Sachverhalt »das Buch liegt nicht auf dem Tisch«. — 1. Enttäufchung bedeutet hier: der Tisch wird gesehen, aber das Buch ist nicht darauf; also Erfüllung in Bezug auf das originäre Gegebensein des vermeinten Tisches; partielle Enttäufchung hinsichtlich des supponierten Daraufliegen des Buches.¹

2. Nicht-Erfüllung befragt (oder kann doch befragen): Weder der Tisch noch das Buch werden gesehen. Der Sachverhalt ist also sicher nicht als mit der Intention übereinstimmend gegeben. Aber er ist auch nicht im Widerstreit (im eigentlichen Sinne) mit ihr gegeben. Er ist eben gar nicht gegeben.

Aber ist dies streng genommen richtig? Ist denn wirklich gar kein Sachverhalt gegeben? Ist gar nichts gegeben? Kann überhaupt gar nichts gegeben sein?

Offenbar nicht. Es ist vielleicht das Zimmer gegeben, worin der Tisch und das Buch sich gewöhnlich befanden, woraus sie aber entfernt sind. Oder das Haus ist verschlossen und das Zimmer nicht betretbar und also auch nicht »originär gegeben« usw. usw. In allen solchen Fällen wird man auf die Frage: »Liegt das Buch auf dem Tisch?« nicht etwa die Antwort geben: »Es liegt nicht auf dem Tisch« sondern etwa: »Der Tisch ist überhaupt nicht da« oder: »Ich weiß nicht, ich kann nicht in das Zimmer hinein.«

Aber eine gewisse, wenn auch »schwächere« Erfüllung der Intention ist doch auch hier vorhanden; das Zimmer bzw. das Haus ist »übereinstimmend« mit dem vermeinten Zimmer und dem vermeinten Haus, die im Falle »totaler Erfüllung« fundierend gewesen wären für das Dasein des Tisches und Buches, — nicht etwa nur »objektiv kausal«, sondern durchaus im phänomenologischen Sinn als »Hintergrund«, umschließende phänomenale Örtlichkeit, als örtlicher Zugang im Sinne des praktischen Lebens usw.

Man nehme selbst einen extremen Fall: Für den in einem tiefen Kerker Eingeschlossenen ist der größte Teil der Welt unzugänglich, nicht »originär gegeben.« Für ihn sind also die Intentionen von Wahrnehmungsurteilen (auf solche beschränken wir uns der Einfachheit halber) zumeist nicht erfüllbar. Indessen irgendwie besteht doch auch ein denkbarer Zugang zu den Wahrnehmungs-

1) Diese Enttäufchung kann natürlich noch auf verschiedene Weise zustandekommen. Einmal etwa wird das Buch überhaupt nicht gesehen, das andere Mal sieht man es z. B. auf dem Boden liegen usw.

sachverhalten, wenn er auch *de facto* versperrt ist. Und das »Anfangsstück« dieses Zugangsweges für den Gefangenen, etwa, um ganz konkret zu sein, der Weg von seinem Lager bis zur freilich verschlossenen Kerkertüre, ist originär gegeben und durchschreitbar. Er repräsentiert also die partielle Erfüllung des im Urteil Vermeinten – in gewissem Sinne. Denn – daran muß man streng festhalten, dann wird auch der Schein des Paradoxen verschwinden – ein konkret und originär gegebener Sachverhalt läßt sich nicht von seinem phänomenalen Zugang trennen, der Zugang gehört mit zum Phänomen. Er fällt nur zumeist nicht ins Auge, wenn er leicht und »selbstverständlich« ist.¹

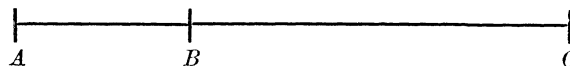
Man muß sich davor hüten, diesen »Zugangssachverhalt« als »subjektiv« aufzufassen, etwa prinzipiell zu scheiden den »objektiven« Sachverhalt: »das Buch ist nicht auf dem Tisch« und den »subjektiven«: »Ich kann nicht in das Zimmer hinein«. Das wäre eine ganz schiefe Gegenüberstellung. Man kann den ersten Sachverhalt auch subjektiv wenden: »Ich sehe, daß auf dem Tisch kein Buch liegt« und den zweiten (was für uns wichtiger ist) objektiv: »das Zimmer ist nicht gegeben«. Natürlich kann man einen Unterschied der Fälle danach machen, ob die in der Ausgangsfrage: »Ist *A* *b*?« oder: »Hat *a* die Beziehung *R* zu *b*?« explizit angeführten Gegenständlichkeiten zum Teil wenigstens im originär gegebenen Sachverhalt vorhanden sind oder nicht. Aber man darf über dieser berechtigten Unterscheidung nicht vergessen, daß der wirkliche Sachverhalt, dem nachgefragt wird, auch noch eine Fülle von impliziten, fundierenden Momenten enthält. Von den expliziten Momenten kann u. U. keines gegeben sein. Aber von den impliziten Momenten, die schließlich stets bis zum faktischen

1) Es liegt der geschilderten Analyse ein allgemeines methodisches Grundprinzip der Phänomenologie zugrunde, das in einer früheren Arbeit des Verfassers als »Prinzip des transzendentalen Idealismus« bezeichnet wurde. (S. Jahrb. f. Philos. u. phän. Forsch., Bd. 6, S. 387/88, S. 405, Anm. 2, S. 412, S. 413.) Man kann es kurz mit den Worten andeuten: »Zu jeder Gegenständlichkeit gibt es (im Prinzip, d. h. abgesehen von »technischen« Schwierigkeiten) einen Zugang«. Damit erst ist jegliche Gegenständlichkeit als Phänomen charakterisiert und dem schlechthin universalen Anspruch der transzendentalen Phänomenologie (für die jedes Sein mit Konstituiertsein gleichbedeutend ist) Genüge geschehen. – Dies ist der zunächst sich darbietende Aspekt des »phänomenologischen Zugangsprinzips« (dieser Terminus soll im folgenden vorzugsweise verwandt werden). Über die nähere Explikation und Weiterbildung bzw. Umgestaltung dieser Auffassung kann hier nicht gesprochen werden.

Leben (Dasein) des Urteilenden selbst führen¹, müssen immer irgendwelche gegeben sein. — Im Schlafe kann man nicht einmal sagen: »Von dem betreffenden Sachverhalt ist nichts gegeben«.

Außer diesem elementaren und vielleicht zu trivialen Beispiel sei noch ein anderes, mathematisches gebracht, bevor das eigentliche Brouwersche Problem zur Sprache kommt. Wir entnehmen es der feinsinnigen Analyse, die O. Hölder kürzlich² vom indirekten Beweisverfahren gegeben hat. Er braucht den (indirekten) Beweis des sog. archimedischen Hilfssatzes aus dem Dedekindschen Stetigkeitsaxiom als Beispiel.

Die Strecke AB sei ein Teil von AC (i. Figur).



Angenommen, es würde AC von keinem Vielfachen von AB übertroffen (oder erreicht), so kann man die Punkte P rechts von A einteilen in solche, daß AP übertroffen und solche, daß AP nicht übertroffen wird von einem genügend vervielfachten AB . Die Einführung des Dedekindschen »Schnittpunktes« X zwischen diesen beiden Punktmengen ergibt einen Widerspruch³.

Folglich existiert der Punkt X gar nicht. — Wie so kann man aber doch mit ihm operieren? Hier ist ebenfalls nicht »nichts« gegeben! —

Man denkt sich statt des Vielfachen von AB gewisse wachsende Strecken AA_1, AA_2, AA_3, \dots , die nicht gerade Vielfache von AB sind. Dann kann es zwei Punktklassen, diejenigen Punkte, die von der Folge übertroffen werden und solche, die nicht übertroffen werden, geben und also auch den Punkt X . »Wir können nun diesen Fall einmal an Stelle des ursprünglichen setzen und ihn als Abbild des früheren (unmöglichen) Falles betrachten, freilich mit der Einschränkung, daß hier nicht zu jeder Relation des abzubildenden Sachverhalts eine entsprechende Relation im Abbild zu finden ist.«

Man erhält dann, wenn X der Trennungspunkt der Klassen ist und X_1 links und X_2 rechts von X in kleinerem Abstand als AB liegt, die Figuren:

1) Hier tritt wieder das schon erwähnte phänomenologische Zugangsprinzip hervor.

2) S. »Die mathematische Methode« (Berlin 1924), § 118, S. 329–31.

3) Denn (vgl. l. c. § 30, S. 90) wählt man zwei Punkte X_2 und X_1 rechts und links gleichweit von X , in geringerem Abstand als die Länge von AB , so wird X_1 nach Voraussetzung von einem Vielfachen von AB übertroffen: $\mu \cdot AB > AX_1$, aber:

$$X_1X = XX_2 < AB \quad \dots \quad (1)$$

Also ist: $(\mu + 1) \cdot AB = \mu \cdot AB + AB > AX_1 + X_1X = AX$.

Es wird also AX übertroffen.

Andererseits ist für X_2 nach Voraussetzung für jede Zahl ν :

$$AX_2 > \nu \cdot AB \quad \dots \quad (2)$$

Es ist aber $AX + XX_2 = AX_2B_2$, folglich wegen (1) und (2)

$$AX + AB > \nu \cdot AB,$$

d. h. AX ist größer als das $(\nu - 1)$ fache, somit größer als jedes Vielfache von AB . — Damit ist ein Widerspruch erreicht.



Nimmt man nun die vorhin fallengelassene Bedingung, daß

$$A_{\mu} A_{\mu+1} = A_{\nu-1} A_{\nu} = AB$$

sein soll, wieder auf, so ergeben sich (da doch $X_1 X = X X_2 < AB$ ist), folgende Bilder:



Diese Figuren sind jede für sich möglich. Nimmt man aber hinzu, daß μ ein genügend hoher und ν ein beliebiger Index sein soll, so kann man $\nu - 1 = \mu + 1$ setzen; also $A_{\nu-1} \equiv A_{\mu+1}$.

Dann ist aber derselbe Punkt bald rechts, bald links von X , was unmöglich ist, sobald man sich die Figuren wieder zusammengelegt, d. h. so aufeinander gelegt denkt, daß X mit X zusammenfällt. »Mir scheint demnach der Beweis einer Unverträglichkeit stets darauf zu beruhen, daß der vorausgesetzte, unmögliche Sachverhalt wenigstens in Teilen real abgebildet werden kann, wobei wir dann im Grunde nur mit den darstellenden Zeichen der Begriffe operieren und einen im darstellenden Gebiet realen Versuch machen.«

Dies entspricht – abgesehen von der Terminologie – durchaus unserer Auffassung. Auch hier tritt an Stelle eines unmöglichen, d. h. leeren Sachverhalts ein »Rahmenverhalt«, in dem gewisse Momente des ursprünglich vermeinten Sachverhalts sich wiederfinden¹. So ist der Sachverhalt mit der beliebigen wachsenden Streckenfolge $AA_1, AA_2, AA_3 \dots$ ein (i. a. möglicher) Rahmenfachverhalt des unmöglichen ursprünglich vermeinten Sachverhalts mit der Folge von Multiplen von AB .

Freilich würden wir nicht von darstellenden Zeichen, sondern genauer von vermeintenden Intentionen usw. reden. Das »darstellende Gebiet«, der »Oberbau«, ist die leere Intention, der »Unterbau« der Erfüllung (l. c. §§ 114, 116).

Nach diesen Vorbereitungen werde nunmehr wieder die Brouwer'sche Frage nach dem Vorkommen einer bestimmten Zahl in einer endlosen werdenden Wahlfolge ins Auge gefaßt:

Die Folge beginne etwa so: 2 4 25 3 6 6 7 . . . ohne erkennbares Gesetz. Kommt die 1 in ihr vor? Darauf kann man weder einsichtig antworten: »die 1 kommt vor« (p) noch: »die 1 kommt nicht vor« (\bar{p}). Vielmehr nur: »ein Sachverhalt dieser Stufe ist nicht einsichtig gegeben«. Oder genauer: »weder der Sachverhalt <<die 1 kommt vor>> noch der Sachverhalt <<die 1 kommt nicht vor>> ist (einsichtig) gegeben« (q). Dagegen ist dieser eben genannte Sachverhalt » q « sehr wohl einsichtig gegeben. Er ist aber gewisser-

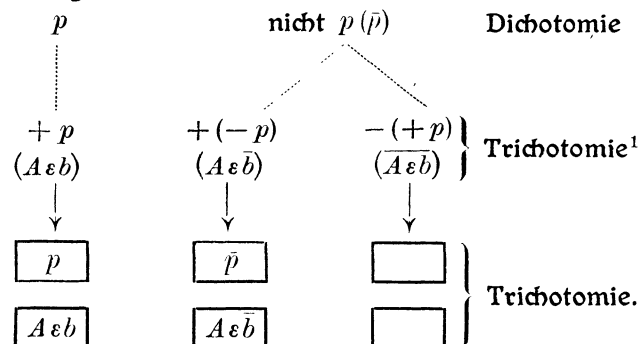
1) Im ersten Beispiel war das leere Zimmer, aus dem Tisch und Buch entfernt sind, der Rahmenfachverhalt, für die unmöglich für sich vorstellbare Leere, die im Gegensatz steht zu den beiden konkreten entgegengesetzten Sachverhalten: »Das Buch liegt auf dem Tisch« – »Das Buch liegt nicht auf dem Tisch« (sondern etwa am Boden!)

maßen ein Sachverhalt höherer (zweiter) Stufe. (Denn ihm würde ja entsprechen: »der Sachverhalt $\langle\langle$ die 1 kommt vor $\rangle\rangle$ ist einsichtig gegeben.« Die ineinander geschachtelten Zeichen »...« und $\langle\langle$... $\rangle\rangle$ deuten dies an.)

Zieht man nur die Sachverhalte 1. Stufe in Rücksicht, so muß man die trichotome Disjunktion so symbolisch darstellen ($\boxed{\dots}$ bezeichnet den angeschauten Sachverhalt):

$$1. \boxed{p} \quad 2. \boxed{\bar{p}} \quad 3. \boxed{}$$

Man hat also, wenn man Urteile als Intentionen mit »freien«, die erfüllenden Sachverhalte mit umrahmten Buchstaben bezeichnet, folgendes Schema:



Zieht man aber die Sachverhalte 2. Stufe mit hinzu, so hat man:

$$1. \boxed{+p} \quad 2. \boxed{+\bar{p}} \quad 3. \boxed{-(p \vee \bar{p})}$$

- d. h. »1. Der Sachverhalt $\langle\langle p$ ist (einsichtig gegeben) $\rangle\rangle$ besteht«.
 »2. Der Sachverhalt $\langle\langle \bar{p}$ ist (einsichtig gegeben) $\rangle\rangle$ besteht«.
 »3. Der Sachverhalt $\langle\langle$ weder p noch \bar{p} ist (einsichtig gegeben) $\rangle\rangle$ besteht«.

Dabei sind (1), (2), (3) selbst als Sachverhalte (2. Stufe), nicht aber als Urteile gemeint.

Das eigentlich Wesentliche sind die Sachverhalte erster Stufe), also die Trichotomie (3 fache Disjunktion) mit zwei erfüllten und einem leeren Glied. Konkret im Falle der werdenden endlosen Folge sind die beiden erfüllten möglichen Sachverhalte diejenigen, die eine Entscheidung gestatten, der (dritte) leere der, der dem Fall der Unentscheidbarkeit entspricht. In diesem dritten Falle wird man (wie bei den anderen beiden Beispielen) auf einen unerfüllbaren »Rahmenfachverhalt« zurückgeworfen, dem die wer-

1) Man müßte eigentlich schreiben $-(\pm p)$, denn aus $-(+p)$ ergibt sich »fachverhaltlich« $-(-p)$ und umgekehrt. (Anders dagegen S. 57!)
 — Vgl. zum Ganzen die Ergänzungen im Math. Anhang.

dende Folge zugrunde liegt, die irgendwie wird, deren Werden unbestimmt in der Zukunft liegt, die sich aber gegen die Erwartung (Supposition) entscheiden kann — oder die sich auch vorläufig nicht entscheiden kann.

Allerdings darf man den Parallelismus zwischen den drei Beispielen nicht übertreiben. Die Brouwersche Sachlage hat noch ihre spezifische Eigenart. Schon die beiden erfüllbaren Möglichkeiten (1 kommt vor, 1 kommt nicht vor) stehen nämlich im Brouwerschen Fall nicht auf einer Linie. Die erste Möglichkeit, die positive (1 kommt vor) kann bei einer völlig frei werdenden Folge vorliegen¹. Die zweite nicht: sie ist stets auf Grund einer — sei es auch nur als Unterbedingung fungierenden — Gesetzmäßigkeit gegeben (etwa: 7 kommt nicht vor, bei einer Wurffolge mit nur einem Würfel usw.). Andererseits kann die erste Möglichkeit auch auf Grund eines Gesetzes sicher realisiert sein. Trennen wir die Fälle noch genauer:

1. Im Falle einer frei werdenden Folge gibt es eigentlich nur eine erfüllbare Möglichkeit, nämlich das »empirische« Vorkommen von 1. Man müßte sie konkreter formulieren: »die 1 ist bereits erschienen«; ihr Gegenteil: »die 1 ist noch nicht erschienen« bildet dazu den echten kontradiktorischen Gegensatz. Es gibt daher — bei dieser natürlichsten und sachgemäßeften Formulierung — nur diese beiden Möglichkeiten, gerade bei der freien Wahlfolge, sodaß also das tertium non datur gilt und jede Paradoxie verschwindet.

2. Nimmt man andererseits eine völlig gesetzmäßige Folge, d. h. eine solche, durch deren Gesetz über das Vorkommen der 1 entschieden wird, so hat man ebenfalls eine zweigliedrige vollständige Disjunktion: »1 kommt vor« — »1 kommt nicht vor«.

Bemerkenswert ist, daß im 1. Falle die sachgemäße Formulierung die Vergangenheits- und Zukunftsform des Verbums verwenden muß, also die Zeit eine wesentliche Rolle spielt, während das im 2. Fall nicht stattfindet. Dieser Umstand ist in der Tat ein Hinweis darauf, in welcher Richtung eine weitere »ontologische« Klärung der Sachlage zu erwarten ist. Zum 2. Fall ist ferner zu sagen, daß der Begriff »völlig gesetzmäßige« Folge eigentümlich schwankend ist. Eine Folge kann nämlich »völlig gesetzmäßig« sein in Bezug auf eine bestimmte Eigenschaft E_1 und nicht gesetzmäßig in Bezug auf eine zweite Eigenschaft E_2 . Z. B. kann

1) also quasi »empirisch«; sie ist wirklich, also möglich.

man durch ein völlig bestimmtes Gesetz die Folge der Zahlen von der allgemeinen Form $2^n + 1$ definieren. Ob aber diese Zahlenfolge für $n > 16$ eine Primzahl enthält, (wie für $n = 1, 2, 4, 8, 16$); ob etwa $2^{2^p} + 1$ für $p > 4$, ebenso wie für $p = 1, 2, 3, 4$ Primzahl wird (Goldbachs Vermutung), ist gänzlich unbekannt und mit der bekannten Gesetzmäßigkeit der Folge nicht gegeben. Dagegen sind andere Eigenschaften der Zahlenfolge, z. B. daß jede ihrer Zahlen kongruent 1 mod 4 ist, offenbar bestimmt. Damit ist also, selbst bei einer Folge, deren Zahlen man durch ein allgemeines Glied (also nicht bloß rekurrent) darstellen kann, die »völlige Gesetzmäßigkeit« durchaus relativ auf bestimmte Eigenschaften. Das gilt a fortiori für rekurrent definierte Folgen, wie etwa die Ziffern der Dezimalbruchentwicklung von π , die Primzahlen, die algebraischen Zahlen, nach ihrem »Rang« geordnet usw. usw.

Daraus ergibt sich nun eine merkwürdige Annäherung zwischen den beiden zunächst scharf unterschiedenen Fällen der freien und der gesetzmäßigen Folge – auch wenn man von den Zwischenfällen bei frei werdenden Folgen mit die Freiheit z. T. einschränkenden Nebenbedingungen absteht. Nennen wir die Folge determiniert bezüglich der Eigenschaft E_1 , wenn sie zu entscheiden gestattet, welche ihrer Glieder diese Eigenschaft besitzen, bezüglich anderer Eigenschaften E_2, E_3 wo dies nicht der Fall ist, indeterminiert, so ergibt sich, daß die völlig gesetzmäßigen Folgen den frei werdenden im wesentlichen gleichstehen, sobald man sie bezüglich derjenigen Eigenschaften betrachtet, relativ zu denen sie indeterminiert sind. Die freien Folgen sind gewissermaßen dadurch gekennzeichnet, daß sie allen Eigenschaften gegenüber indeterminiert sind. Man kann sie daher als absolut indeterminiert bezeichnen¹. Bei Folgen mit gewissen Nebenbedingungen gibt es sicher gewisse Eigenschaften, gegenüber welchen sie determiniert sind. Folgen, die allen Eigenschaften gegenüber, also gewissermaßen absolut determiniert sind, gibt es nicht. Denn nicht einmal die »Urfolge« der

1) Diese Formulierung könnte mißverstanden werden. Es gibt auch bei völlig freien Wahlfolgen gewisse Eigenschaften, über deren Zutreffen, nachdem eine endliche Anzahl von Wahlen vollzogen ist, entschieden ist, wie z. B. die Eigenschaft, daß eine bestimmte Zahl n in der Folge vorkommt. Das sind eben die oben genannten »empirischen« Eigenschaften. Diese hängen eben gewissermaßen von der »Zeit«, genauer von der Entwicklungsphase, in der die Folge sich gerade zur Zeit der Fragestellung befindet, ab. – Die im Text gemeinten Eigenschaften, hinsichtlich deren eine Folge »determiniert« oder »indeterminiert« ist, sind aber sämtlich als zeitunabhängig gedacht.

natürlichen Zahlen 1, 2, 3, . . . ist absolut determiniert z. B. nicht bezüglich der Eigenschaft Zwillingsprimzahlen zu enthalten und dgl.; ja, im Grunde kann man die teilweise Indeterminiertheit zum mindesten aller durch ein nicht-rekurrentes Gesetz bestimmten Folgen auf die Indeterminiertheit der Urfolge zurückführen.

Diese Eigenschaft der endlosen Folgen, immer (teilweise wenigstens) indeterminiert zu sein, macht die mathematische Problematik bezüglich des Endlosen überhaupt erst möglich. Denn es ergibt sich vermöge dieser partiellen Indeterminiertheit die Aufgabe, durch eine endliche Schlußkette das allgemeine Glied der gesetzmäßigen Folge so umzuformen, daß die Folge in der neuen Form bezüglich neuer Eigenschaften determiniert wird, hinsichtlich welcher sie bisher indeterminiert war. Von diesem Gesichtspunkt aus erscheint als eine Hauptaufgabe der Mathematik die fort schreitende Determinierung der Folgen. Das berühmte Fermatische Problem kann man etwa so formulieren: Es ist die Folge der (in einer abzählbaren Reihe geordneten) Zahlenquadrupel x, y, z, n ($n > 2$) so umzuformen, daß sie determiniert wird in bezug auf die Eigenschaft, die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ identisch zu befriedigen¹.

Die Tatsache der teilweisen Indeterminiertheit macht also die mathematische Forschung bezüglich dieses Problemtypus überhaupt erst sinnvoll. Die Möglichkeit der Indeterminiertheit hängt aber davon ab, daß die endlosen Folgen nicht bis ans Ende überblickt werden können. Wäre die Überblickung der endlosen Mengen möglich, so gäbe es keine Indetermination und damit keine sinnvolle arithmetische Problematik. Wer solche Fragen mit Sinn stellt, muß also ein endliches Wesen sein. In dieser Beleuchtung erscheint das dictum: „ὁ θεὸς ἀποθνήσκει“ als geradezu widerfönnig².

1) Die fort schreitende Determinierung mit dem Fortschreiten der Forschung hat eine eigentümliche Konsequenz, an der man nicht vorbeiföhen darf. Sie macht unentscheidbare Alternativen entscheidbar. Da nun aber unentscheidbare Alternativen nach dem phänomenologischen Zugangsprinzip auch »an sich« nicht bestehen (als Sachverhalte, wie oben erläutert, nicht vorhanden sind), so ergibt sich mit Notwendigkeit die Folgerung, daß mathematische Sachverhalte mit dem Fortschritt des mathematischen Wissens der Menschheit sich verändern – was für die hergebrachte Auffassung den Gipfel der Abfurdität darstellt. Trotzdem sind wir der Meinung, daß jene »Abfurdität« die Wahrheit ist, womit allerdings die Pflicht der philosophischen Klärung dieser so paradox anmutenden Sachlage notwendig verbunden ist. Ihr werden wir in § 6 zu genügen suchen.

2) Schon Hufferl hat sich in der »Philosophie der Arithmetik«, I. Bd., (Halle a. S. 1891), S. 214, Anm. 1, gegen diesen G a u ß'schen Ausdruck aus ganz ähnlichen Gründen gewandt.

Allein das führt geradewegs auf eine tiefer liegende philosophische Frage, die hier noch nicht erörtert werden kann.

b) Konsequenz und Wahrheit.

Versucht man sich von der in den bisherigen Entwicklungen dargestellten logischen Sachlage zusammenhängend Rechenschaft zu geben, so wird man dazu getrieben zwei grundverschiedene, den Gang der Untersuchung jeweilig bestimmende Ziele zu unterscheiden, das der Konsequenz und das der Wahrheit. In einem solchen Sinne kann man geradezu von einer »Logik der Konsequenz« gegenüber einer »Logik der Wahrheit« sprechen, wie das Hufferl tut¹. Durch diese Unterscheidung wird man befähigt die grundlegenden Fragehaltungen des axiomatischen Formalismus (Hilbert) gegenüber der des Intuitionismus (Brouwer) in ihrem Gegensatz kurz zu kennzeichnen: für Hilbert ist die reine Mathematik eine Weiterbildung der Logik der Konsequenz, für Brouwer eine Logik der Wahrheit.

Der grundlegende Unterschied besteht darin, daß die Logik der Wahrheit sich auf Sachverhalte formal-ontologischer Natur bezieht, diese Sachverhalte selbst einsichtig (natürlich »kategorial«) anzuschauen, d. h. in ihrer ursprünglichen (originären) Gegebenheit zu erfassen strebt.

Sie geht somit aus auf Seins- und Wesensverhalte², die allerdings formaler Art sind, nicht durch einen Prozeß der Generalisierung aus dem konkreten Material (das, damit dieser Prozeß möglich ist, notwendig von einer bestimmten eingeschränkten Artung sein muß, nämlich »dinglich« im verallgemeinerten Sinn) zu gewinnen, sondern durch die eigentümliche »Operation« der »Formalisierung«³.

Dagegen richtet sich die »Logik der Konsequenz« (und damit auch Hilberts Mathematik – nicht seine Metamathematik!) im strengen Sinn gar nicht auf Gegenstände (die doch irgendwie zugänglich, in irgendeiner Weise Phänomene sein müssen), sondern auf bloße »Gefüßtheiten«, die in ihrer inneren Struktur undurchdringlich sind.

1) In einer (nicht veröffentlichten) Vorlesung über »Einleitung in die Philosophie« im Wintersemester 1923/24.

2) Es kann hier noch nicht erläutert werden, sondern wird erst an späterer Stelle zur Sprache kommen, daß nicht etwa nur »daseinsfreie« Wesensverhalte in Frage kommen, sondern gerade echte Daseinsverhalte. Das bedeutet allerdings einen gewissen Bruch mit der hergebrachten phänomenologischen These von der reinlichen Trennbarkeit von »Dasein« und »Wesen« (im Sinne von »Eidos«).

3) Vgl. Hufferl, Ideen, § 13.

Sie gleichen darin in der Tat den Steinen im Spiel (Schach-Figuren und dgl.), daß ihr Dasein gewissermaßen ganz in ihrer Spielfunktion, in der Weise ihrer formalen Verknüpfung aufgeht. Es ist sogar möglich, daß diese »Gesetztheiten« in sich Widersprüche bergen, die in der formalen Argumentation gar nicht zutage treten, etwa wie bei dem sachgemäßen Hantieren mit einer Granate ihre Sprengwirkung nicht in Erscheinung tritt¹. Es ist daher auch kein Wunder, daß man sie häufig mit den Zeichen verwechselt hat, sie für »Zeichen, die nichts bedeuten« bzw. bezeichnen, erklärt hat². Diese Auffassung stellt jedoch einen Mißbrauch des Begriffs Zeichen dar. »Ein Zeichen ist doch offensichtlich bezogen auf etwas, wofür es Zeichen ist.« Aloys Müller hat diesen Einwand mit Recht gemacht und Bernays als Vertreter von Hilbert, hat darauf den Gebrauch des Terminus »Zeichen« aufgegeben, soweit es sich um »bedeutungslose Zeichen« handelte und ihn durch »Figur« ersetzt. Es ist dabei, wie auch in der gerade erwähnten Diskussion zwischen A. Müller und Bernays hervortritt, von Wichtigkeit, sich nicht an die Einzelheiten der Form und Ausführung der »Figuren« zu stoßen (ebenso wenig wie man dies bei Spielsteinen und Schachfiguren tut), sondern nur auf die für ihre formale (Spiel-) Verwendung relevanten Eigenschaften an ihnen zu achten. Faßt man sie so auf, so sind sie in gewissem Sinne doch wieder »Zeichen«, indem sie in ihrer anschaulichen Besonderheit auf etwas Gemeinfames, von ihnen als konkreten Figuren Verschiedenes hinweisen, — eben auf die nur der kategorialen Anschauung und auch dieser nur gewissermaßen von »außen«, als Elemente einer rein formalen Verknüpfung zugänglichen »Gesetztheiten«³.

Bezüglich dieser »Gesetztheiten« formuliert die formale Mathematik bzw. Konsequenz-Logik keine Sätze mit dem Anspruch auf Wahrheit. Man kann von einem »Theorem« dieser Mathematik nur ausagen, daß es »beweisbar« (besser: »ableitbar«) ist oder nicht, nicht aber, daß es wahr ist oder unwahr. Die Sache liegt aber auch nicht einfach so, daß die formale Mathematik ein »hypo-

1) Darauf beruht z. B. u. a. die Folgerichtigkeit einer Argumentation in den Unmöglichkeitsbeweisen der Mathematik.

2) Hilbert, Abhandl. d. math. Sem. d. Hamburg. Univ., Bd. I, Heft 2, p. 157 ff. (1922). »Neubegründung der Mathematik« (Erste Mitteilung). — Bernays, Jahrb. d. D. Math. Ver., Bd. 31 (1922), S. 10 ff. Vgl. ferner die Diskussion zwischen Bernays und Aloys Müller im 90. Bd. d. Math. Ann., S. 153 ff. und S. 159 ff.

3) Vgl. Bernays, l. c. S. 160.

thetisch-deduktives System« bildet (Pieri, B. Russell u. a.), d. h. nur hypothetische Satzgefüge enthält von der Form: »Wenn die und die Axiome gelten, so gelten die und die Theoreme.« Denn auch die Hilbertschen Axiome, wenigstens die transfiniten, »gelten« gar nicht, d. h. können gar nicht gelten, sie können gar nicht wahr oder falsch sein. Lediglich ein rein formal definierter Begriff von »Richtigkeit« (was in diesem Zusammenhang ungefähr so viel wie »Spielgerechtigkeit« besagt) mit einem ebenso formalen Gegensatz »Falschheit« (was also mit »Unwahrheit« nicht zu verwechseln ist) macht sie anwendbar. Hilbert hat dies klar gesehen, wie die folgende schon angeführte Stelle zeigt: »Die Axiome und beweisbaren Sätze sind die Abbilder der Gedanken, die das übliche Verfahren der bisherigen Mathematik ausmachen, aber sie sind nicht selbst die Wahrheiten im absoluten Sinne. Als die absoluten Wahrheiten sind vielmehr die Einsichten anzuführen, die durch meine Beweistheorie hinsichtlich der Beweisbarkeit und der Widerspruchsfreiheit jener Formelsysteme geliefert werden«¹. Trotzdem kann man an dieser Äußerung vom philosophischen Gesichtspunkt aus wenigstens die Terminologie teilweise beanstanden. G. Frege, der sich bereits 1903 ähnlich geäußert hat, anlässlich der formalen Arithmetik Thomases, formuliert die Sache so: »Wenn sie (die formale Arithmetik) ein Spiel mit Figuren ist, so gibt es in ihr ebenfowenig Lehrsätze und Beweise wie im Schachspiel«². Frege lehnt also im Gegensatz zu Hilbert auch die Beweistheorie in der formalen Mathematik ab, während doch gerade die Beweistheorie in der Hilbertschen Metamathematik die entscheidende Rolle spielt. Was aber sind die Deduktionen der formalen Mathematik, wenn sie nicht Beweise sind?

Man muß terminologisch reinlich scheiden zwischen ableiten und beweisen, deduzieren und demonstrieren. Die Mathematik der Alten kannte nur die *ἀπόδειξις*, die demonstratio. Für deductio gibt es kein eigentlich entsprechendes griechisches Wort: *καταγωγή* wird nicht im logischen Sinn gebraucht, *ἀπαγωγή* ἐς ἄτοπον

1) Math. Ann. 88, S. 153.

2) Grundgesetze der Arithmetik, II. Bd. (Jena 1903), S. 101. Die Stelle fährt fort: »Zwar kann es Lehrsätze in einer Theorie des Schachspiels geben, aber nicht im Schachspiel selbst. Die formale Arithmetik kennt nur Regeln. Aber es ist auch eine Theorie der formalen Arithmetik denkbar; und in ihr wird es Lehrsätze geben, die z. B. besagen, daß man von einer gewissen Figurengruppe aus gemäß den Spielregeln zu einer anderen Figurengruppe gelangen könne.«

bedeutet *reductio ad absurdum*. Höchstens die ἀγωγή¹ eines Sophismas (wie des »Lügners« u. a.) kann mit unserer selbständig gewordenen Deduktion in Parallele gesetzt werden und dann das fachlich, aber nicht sprachlich entsprechende συλλογισμός.

Ein Beweis (*demonstratio*, ἀπόδειξις) geht auf Wahrheit (ἀλήθεια). Die Ausführungen des Aristoteles in den Analytiken² zeigen, daß wohl zwischen συλλογισμός und ἀπόδειξις unterschieden wird, indem bei dem »Beweis« die Voraussetzungen wahr sein müssen, während sie beim συλλογισμός διαλεκτικός nur angenommen (d. h. aus der im Schwange befindlichen Meinung (δόξα) aufgenommen) werden. Aber daß man Voraussetzungen macht, die einer Verifikation im Zusammenhang der betrachteten Theorie (beim »hypothetisch-deduk-

1) Vgl. den Wortgebrauch von »ἀγωγή« bei Plutarch, De commun. not. 2, p. 1059e = Stoic. vet. fragm. coll. Arnim, Vol. II, p. 84 = Chrysippus, fr. 250: . . . λόγους τὰς ἀγωγὰς ὑγιεῖς ἔχοντας; vgl. fr. 298^a (Χρυσίππου λογικῶν ζητημάτων A p. 99, 13: ἡ (μ)ὲν (ἀγωγή) τ(οῦ) λόγου ὑγιής (ergänzt von Arnim).

2) Es kommen hauptsächlich folgende Stellen in Frage: 1. Analytica priora I, c. 1. Die Untersuchungsrichtung wird zu Beginn so gekennzeichnet: »πρῶτον μὲν εἰπεῖν περὶ τί καὶ τίνος ἐστὶν ἡ σκέψις, ὅτι περὶ ἀποδείξεων καὶ ἐπιστήμης ἀποδεικτικῆς« (24a, 10–11). Der Unterschied der »apodeiktischen« und »dialektischen« Aussage wird bestimmt: »διαφέρει δὲ ἡ ἀποδεικτικὴ πρότασις τῆς διαλεκτικῆς, ὅτι ἡ μὲν ἀποδεικτικὴ λήψις θατέρου μορίου τῆς ἀντιράσεως ἐστίν, . . . ἡ δὲ διαλεκτικὴ ἐρώτησις ἀντιράσεως ἐστίν« (24a, 22–25). Aber diese Unterscheidung ist irrelevant für die Deduktion (den Syllogismus) als solchen: »οὐδὲν δὲ διοίσει πρὸς τὸ γενέσθαι τὸν ἑκατέρου συλλογισμόν« 24a, 25–26). »ὥστε ἐστὶ συλλογιστικὴ μὲν πρότασις ἐπὶ πᾶσι κατάφασις ἢ ἀπωφασίς τινος κατὰ τινος, ἀποδεικτικὴ δὲ, ἐὰν ἀληθὴς ᾖ καὶ διὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς ὑποθέσεων ἐλημμένη« (a 29–b 10). Endlich ist wichtig die Definition des Syllogismus selbst: »συλλογισμὸς δὲ ἐστὶ λόγος ᾧ τεθέντων τινῶν ἕτερόν τι τῶν κειμένων ἐξ ἀνάγκης συμβαίνει τῷ ταῦτα εἶναι« (24b 18–20). 2. Analyt. priora I, c. 4. – Über das Verhältnis von Apodeixis und Syllogismus: »πρότερον δὲ περὶ συλλογισμοῦ λεκτέον ἢ περὶ ἀποδείξεως διὰ τὸ καθόλου μᾶλλον εἶναι τὸν συλλογισμόν· ἡ μὲν γὰρ ἀπόδειξις συλλογισμὸς τις, ὁ συλλογισμὸς δὲ οὐ πᾶς ἀπόδειξις« (25 b, 28–31). Danach scheint es also, als ob die Deduktion (συλλογισμός) allgemeiner ist als der Beweis und im wesentlichen mit unserem Begriff der Deduktion identisch ist. Dies ist auch richtig, nur ist συλλογισμός nicht genau dasselbe wie die heutige rein formale Deduktion, indem selbst im »dialektischen« Syllogismus wenigstens nach dem »Inhalt« der Voraussetzungen gefragt wird. Vgl. »... κατὰ μὲν ἀλήθειαν ἐκ τῶν καὶ ἀλήθειαν διαγεγραμμένων ὑπάρχειν, εἰς δὲ τοὺς διαλεκτικοὺς συλλογισμοὺς ἐκ τῶν κατὰ δόξαν προτάσεων« (46a, 8–10), d. h. bei den in der Unterredung (Streitgespräch) vorkommenden Schlüssen muß man die Voraussetzungen aus der (öffentlichen) Meinung nehmen. Immerhin bestehen weitgehende Analogien. Auch der aristotelische Begriff der Schluß-Figur (σχῆμα) ist dem der Hilbertschen Beweisfigur analog. Vgl. z. B. (26a, 13–14): »... δῆλον ἐν τούτῳ τῷ σχήματι πότε ἐστὶ καὶ πότε οὐκ ἐστὶ συλλογισμός...«

tiven« System) oder gar grundfänglich nicht (bei der formalen mathematischen Axiomatik Hilberts) auf ihre Wahrheit oder Unwahrheit geprüft werden können, davon ist keine Rede. Ein Erkennen ist jedenfalls streng an wahre Axiome (Ausgangslätze) gebunden (vgl. bes. die Anfangskapitel der zweiten Analytik). Auch die Stoa hat sich zu der Idee der »eigenständigen« Deduktion nicht hindurchgerungen, obwohl von ihr klar ausgesprochen wird, daß ein Schluß auch dann noch gültig bleiben kann, wenn die Prämissen falsch sind¹ (λόγος συνακτικός). In gewissem Sinne ist dafür ja jeder indirekte Beweis (d. h. durch die ἀπαγωγή εἰς ἄτοπον, reductio ad absurdum) ein Beispiel (das schon in der Aristotelischen Syllogistik eine große Rolle spielt), aber hier ist doch auch gerade bezweckt, die Unwahrheit der Hypothese darzutun. Somit ist die antike Logik durchaus demonstratio (ἀπόδειξις) oder eine unvollkommenere Erfassungsform für die Demonstration. Eine Ausnahme macht höchstens die erwähnte stoische Betrachtung über den λόγος συνακτικός.

Im Gegensatz dazu ist es für das Verständnis der modernen uns beschäftigenden Gedanken grundlegend, daß man die von der Geltung und der Möglichkeit der Geltung ihrer Voraussetzungen unabhängige, reine, »freischwebende« Deduktion oder »Ableitung« (bezw. »Herleitung«) unterscheidet von dem Beweis, der vor allem auf sicheren Fundamenten ruhen muß, die aufweisbar sein müssen.

Man kann, wenn man diese strenge Bezeichnungsweise gebraucht, nicht mehr von einer Hilbertschen »Beweistheorie« sprechen, sondern nur von einer Ableitungs-(Herleitungs-)Theorie, die über die Herleitbarkeit bestimmter Formeln aus bestimmten Axiomen urteilt und dgl. Es ist also eine Formel in der formalen Mathematik nicht mehr »beweisbar«, sondern nur »herleit-

1) Vgl. zu diesem Problem H ö l d e r, Die mathematische Methode, § 103, S. 267/68; S i g w a r t, Logik, 2. Aufl., I. Bd., S. 285/86 und die folgenden stoischen Fragmente (aus der Arnimischen Sammlung): Vol. II, p. 78 (Chrysippus fr. 239): κρίνασθαι δὲ φασιν τὸν συνακτικὸν λόγον, ὅτι συνακτικός ἐστιν, ὅταν τῇ διὰ τῶν λημμάτων αὐτοῦ συμπλοκῇ ἔπεται τὸ συμέρασμα . . . καίπερ μὴ ὄντα ἀληθῆ διὰ τὸ ἐπὶ ψεύδους ἄγειν, συνακτικὸν εἶναι φασί . . . τοῦτο γὰρ τὸ συνημμένον ἀληθές ἐστι, διὰ τὸ μηδέποτε ἀρχόμενον ἀπὸ τοῦ ἀληθοῦς λήγειν ἐπὶ ψεύδους (p. 78, l. 15–16, 18–19, 22–24). — Vol. II, p. 81 (Chrysippus fr. 243): ἐπ' ἀληθείᾳ δὲ ἀληθές ἔπεται, . . . καὶ ψεύδει ψεύδος, . . . καὶ ψεύδει ἀληθές . . . ἀληθεῖ μέντοι ψεύδος οὐκ ἀκολουθεῖ (p. 81, l. 36 – p. 82, l. 2).

Das letztere ist genau unsere moderne »implizite Definition« der Implikation ($\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{R}$, $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$; aber nicht $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{F}$). Vgl. etwa Ackermann, Math. Ann. 93, S. 4.

Hufferl, Jahrbuch f. Philosophie. VIII.

bar«. Dagegen müssen Sätze der Metamathematik, sofern sie nicht als unmittelbar einsichtig aufweisbar sind, notwendig beweisbar sein, wenn sie als gesicherte Ergebnisse der Wissenschaft betrachtet werden sollen.

Wahrheit (α -ληθεία), wörtlich und in der eigentlichen Bedeutung »Entdecktheit«¹, kann nur apodiktisch erkannt werden, auf Grund von wahren Prämissen; sie ist also aufweisbar oder beweisbar innerhalb einer apodiktischen Theorie. Sie eignet daher nur den metamathematischen Sätzen Hilberts, nicht den »eigentlich mathematischen«. Ein Unterschied von »absoluter« und »relativer« Wahrheit besteht nicht. P. Bernays hat hierüber eine Reihe unseres Erachtens durchaus irriger Ansichten geäußert²: »Unter diesem Gesichtspunkt (der Verwendung nur der primitivsten anschaulichen Erkenntnismittel) werden wir versuchen, ob es nicht möglich ist, jene transzendenten Annahmen in einer solchen Weise zu begründen (!), daß nur primitive anschauliche Erkenntnisse zur Anwendung kommen. In Anbetracht dieser Beschränkung der Erkenntnismittel werden wir andererseits von dieser Begründung (!) nicht verlangen können, daß sie die zu begründenden Annahmen als Wahrheiten (im philosophischen Sinn) erkennen läßt, sondern wir werden zufrieden sein, wenn es gelingt, die auf jenen Annahmen aufgebaute Arithmetik als ein mögliches, d. h. widerspruchsfreies Gedankenystem zu erweisen.«

Die wichtigsten Begriffe, um die es sich handelt, sind hier: »begründen«, »Wahrheit im philosophischen Sinn« (!) und »mögliches Gedankenystem«.

Zunächst: »begründen«. — Dies ist offenbar doppelsinnig; es kann bedeuten »beweisen« oder »herleiten«. Von einem Beweis der »transzendenten Annahmen« (d. h. der transfiniten Hilbertschen Axiome und Theoreme) kann keine Rede sein; ebensowenig von einer »Herleitung« der Axiome, sondern höchstens der formal-mathematischen »Theoreme«. Aber auch dieses Wort ist im Grunde analog wie der Ausdruck »Beweis« unstatthaft³ oder wenigstens nur cum grano salis zu nehmen oder noch besser durch den Aus-

1) Nach M. Heidegger; in nicht veröffentlichten Vorlesungen, vgl. jetzt seine Abhandlung »Sein und Zeit« passim (in diesem Jahrbuchband).

2) In dem schon oft zitierten Vortrag in Jena 1921: abgedruckt im Jahrb. d. D. Math. Ver. 31, S. 10 ff. (1922). — Wir wissen nicht, ob Bernays' Ansichten in diesem Punkte denen Hilberts durchgängig entsprechen.

3) Hilberts formal-mathematische »Theoreme« sind aristotelisch gesprochen keine λόγοι αποφαντικοί, denn sie sind weder ἀληθείς noch ψευδεῖς. — Vgl. dazu auch die oben (S. 71, bef. Anm. 2) zitierte Äußerung Freges.

druck »Formel« zu erlösen. Gemeint sind indessen mit dem Ausdruck »Annahmen« wohl sicher gerade die transfiniten Axiome, und ihre »Begründung« wird wohl in indirekter Weise dadurch als geleistet angesehen, daß sie in ein mögliches, d. i. widerspruchsfreies Gedankenſystem hineingestellt werden und dadurch gewissermaßen einen Halt bekommen.

Damit werden wir von ſelbſt auf den zweiten Begriff der »Möglichkeit« geführt, der in der »Widerspruchsfreiheit« liegen ſoll. Wir wiſſen bereits, was es mit dieſer auf ſich hat; ſie gibt in der Tat eine Möglichkeit, nämlich die der unbefchränkt fortſetzbaren Herleitung von Formeln und immer neuen Formeln, wobei aber dieſe Formeln eines eigentlichen Sinn-Gehaltes (»Inhalts«) völlig entbehren. Alſo nur die Möglichkeit des ſtändigen Klapperns der Formel-Mühle iſt gegeben, des ewig ungeſtörten Formelſpiels. Von einem »Gedankenſystem« darf man ſtreng genommen nicht ſprechen, denn man pflegt doch damit allgemein zu meinen, daß jeder Gedanke des Systems einen beſtimmten Sinn hat; aber hier handelt es ſich lediglich um Spiel-Gedanken im Gedanken-Spiel, genau analog dem »Gedanken«, der in einem geiſtreichen Schachzug ſteckt. Das hier allein vorliegende Gedankenſystem iſt in keinem anderen Sinn vorhanden, als das »Gedankenſystem« einer Schachpartie. Aber offenbar iſt das nicht von Bernays gemeint, oder wenigſtens iſt dieſe Bedeutung des Ausdrucks nicht ſtreng durchgehalten. Sondern ſie ſchwankt immer wieder hinüber nach der eines ſinnvollen Gedankenzuſammenhangs, der in dem Sinn »möglich« iſt, daß er eventuell auf Wirklichkeiten irgend welcher Art »angewandt« werden kann¹. Das iſt eine offenſichtliche Erſchleichung². Eben- daſelbe muß man aber auch bezüglich ſeines Möglichkeitsbegriffs ſagen. Denn eben dieſe »Möglichkeit« ſoll »Wirklichkeit« werden können, d. h. ſoll denkbare Wirklichkeit ſein, — und das auf Grund ihrer Widerspruchsfreiheit. Auch das iſt wiederum eine Erſchleichung. Denn die Gegenſtände der transfiniten Axiome, die transfiniten Mengen, ſind ja gerade nicht denkbar im Sinn der formal-ontologiſchen Möglichkeit; ſie ſind nicht kategorial erſchaubar, ſie ſind bloß leere Geſetztheiten. Sie können alſo keineswegs zu Wirklichkeiten werden. Ja ſelbſt die »Widerspruchsfreiheit«

1) In der Tat iſt ja bekanntermaßen die Hauptaufgabe der klaſſiſchen wie auch der modernen Analyſis, auf phyſikaliſche Fragen anwendbar zu ſein.

2) Wenigſtens wird das in einer vielleicht denkbaren, wenn auch außerordentlich ſchwer begreiflichen »Anwendung« des leeren Formelſpiels auf ſachliche Fragen liegende ungeheure Problem gar nicht erwähnt! ſ. u. S. 77 ff.

hat gar keinen »inhaltlichen« Sinn, sie bedeutet nicht etwa die *conditio sine qua non* der formal-ontologischen *adabilitas*. Die *adabilia* der formalen Ontologie dürfen allerdings keine Widersprüche aufweisen, aber zunächst müssen sie überhaupt irgend etwas in formal-ontologischen Kategorien Faßbares enthalten, – und das tun die transfiniten Mengen nicht. Zwischen den »Formeln« Hilberts sind schon deshalb keine eigentlichen Widersprüche möglich, weil die Formeln gar keine Gedanken aussagen, also auch keine einander widersprechenden Gedanken enthalten können. Der Widerspruch tritt nur gewissermaßen als Selbstsperrung des Konsequenz-Mechanismus, als ein sozusagen mechanisches Hemmnis des Fortgangs der Folgerungen auf, gemäß der Spiel-Regel des Folgerungsspiels, nicht etwa gemäß eines einsichtigen Sinnzusammenhangs. Also ist auch mit dem rein formalen (»mechanischen«) Nachweis der Widerspruchsfreiheit gar nichts getan für die ontologische Möglichkeit der Gesetzmäßigkeiten der Hilbertschen Mathematik; insbesondere macht er jene Gesetzmäßigkeiten nicht zu Gegenständlichkeiten im Sinne der formalen Ontologie. — Über die »Wahrheiten im philosophischen Sinne« noch etwas zu sagen, erübrigt sich nun wohl; es gibt nur Wahrheiten in einem Sinn; die saßähnlichen Gefüge der formalen »Konsequenz-Mathematik« Hilberts sind weder der Wahrheit noch der Unwahrheit fähig.

Wenn man sich die geschilderte Sachlage vor Augen führt, so entsteht naturgemäß die Frage: Welchen Sinn hat dann überhaupt noch die Hilbertsche Mathematik? Welche Motive bestanden überhaupt noch dafür, sich gerade mit den von Hilbert betrachteten »Gesetzmäßigkeiten« zu beschäftigen? Das Nächstliegende zur Beantwortung dieser Frage ist, weiter zu fragen: wie kam Hilbert gerade auf diese Gesetzmäßigkeiten? Die Antwort lautet natürlich: er nahm sie aus der hergebrachten Mathematik auf, sein Ziel war ja ursprünglich die »Begründung« der überlieferten Mathematik. Nun war aber doch die klassische Mathematik sicherlich »inhaltlich« gemeint; sie vermeinte, sich des Unendlichen wirklich bemächtigen zu können. Sie tat dies auf Grund einer Art von Extrapolation nach dem Prinzip der »Permanenz der formalen Gesetze«, indem sie möglichst viele Eigenschaften endlicher Mengen auf die unendlichen übertrug. (Also vermittels der von Brouwer kritisierten Verallgemeinerung der Gesetze der Teilmengen einer endlichen Menge auf unendliche Mengen.) Diese mit dem Namen »Existentialabsolutismus« von Weyl¹ bezeichnete Auffassung ist in der Tat in gewissem Maße

1) Math. Zeitschr., Bd. 20, S. 150.

auch noch für Hilbert leitend. Zwar erkennt Hilbert den grundlegenden Fehlschluß vom Endlichen auf das Unendliche, er verschmäht aber doch nicht, eine ganz ähnliche Analogie zur Motivierung der Aufstellung seiner transfiniten Axiome zu benutzen, die in dem schon kritisierten »Aristides«-Beispiel hervortritt¹.

Diese Art »Begründung« haben wir nun in aller Ausführlichkeit als ungenügend nachgewiesen. Aber welche andere könnte man an ihre Stelle setzen? Oder wenn dies nicht möglich ist, welches Verfahren soll man einschlagen, um die Analysis aufzubauen?

Die Antwort darauf ist zunächst, daß man »inhaltlich«, d. h. nach »intuitionistischer Methode« soviel von der Analysis aufbauen soll, als man kann. In dieser Richtung sind immerhin recht bemerkenswerte Anfänge von Brouwer, Weyl u. a. gemacht worden. Allerdings sind beide Forscher nicht ganz derselben Meinung über den Umfang des so Begründbaren. Weyl möchte sich ganz strikt auf das Endlose beschränken, während Brouwer einen erheblichen Teil der klassischen Mengenlehre »unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten« begründet hat². Es wird noch zu untersuchen sein, ob nicht etwa auch der Reihe der Cantorschen transfiniten Zahlen ein »inhaltlicher« Sinn untergelegt werden kann (f. u. § 5 a). Vorläufig könnte man jedenfalls die intuitionistische Mathematik (die also der Metamathematik Hilberts entspricht) in zwei Stufen begründen: 1. unter ausschließlicher Benutzung des Endlosen (der abzählbaren Mengen); 2. unter Benutzung des konstruierbaren Transfiniten (nach Brouwer).

Was dann über diese Mathematik hinaus möglich ist, bleibt allerdings, seiner eigentlichen Begründung nach, völlig im Dunkeln. Man kann wiederum die traditionelle Mathematik spalten in 1. einen »metamathematisch fundierten Bestandteil A, 2. in einen als »Gefügtheit« darstellbaren Bestandteil B. Weyl³ hat bemerkt, daß Theoreme des Bestandteils A, wie wir kurz sagen wollen »von der Art A«,

1) Vgl. auch seine neuen Ausführungen im Aufsatz »Über das Unendliche« (Math. Ann. 95).

2) Brouwer, Begründung der Mengenlehre bzw. Funktionenlehre unabhängig vom log. Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Verhandl. d. k. Akad. van Wetenschappen te Amsterdam (1918 u. 1919), I. Serie, Deel XII, Nr. 5 u. 7; Deel XIII, Nr. 2. — Weyl, Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik, Math. Zeitschr. Bd. 10, S. 39 ff. (Die Bemerkung über Brouwer S. 170). — Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik, II. »Fundamentalsatz der Algebra und Grundlagen der Mathematik«. Math. Zeitschr. 20, S. 142 ff. — B. de Loor, Die hoofstelling van die algebra van intuïtionistiese standpunt. (Acad. proefschrift). Amsterdam 1925.

3) Weyl l. c. S. 148/49.

d. h. folche, die mit Hilfe von *A*-Begriffen allein ausprechbar sind, auch dann noch gelten, wenn ihre »Beweise« nur mit Hilfe von *B*-Begriffen geführt werden können. Es sind also »Umwegbeweise« durch das Transfinite ebenso möglich, wie in der klassischen Mathematik Beweise mittels des Imaginären. Die bekanntesten Beispiele sind Dirichlets Beweise rein zahlentheoretischer Theoreme mittels der Methode der Infinitesimal-Analyse. Indessen ist wesentlich, daß die Endtheoreme von der Art *A* sind. — Man kann einen Schritt weiter gehen und sagen: die Theoreme der Analysis, soweit sie für die physikalischen Anwendungen von Belang sind, sind derart, daß sie Gruppen von nur approximativ bestimmbaren Größen verknüpfen. In der Physik sind diese Größen immer nur bis auf eine endliche Anzahl von Dezimalen bestimmt, die der physikalischen Theorie zugrundeliegenden »rein mathematischen« Theoreme geben eine beliebige Anzahl Dezimalen, d. h. genauer, sie ordnen der stets wachsenden Ziffernfolge der »gegebenen« Dezimalbrüche die ebenfalls unbeschränkt fortschreitende Ziffernfolge der »gesuchten« Dezimalbrüche zu¹. Theoreme dieses Typus (zu ihnen gehören z. B. alle Reihenentwicklungen und dgl.) sind also indefinit, d. h. in der Brouwer-Weylschen Analysis sinnvoll; und das auch dann noch, wenn sie nur mit Hilfe des Transfiniten Hilberts bewiesen werden können. Man kann also sagen: Soweit die Analysis auf die physikalische Praxis direkt anwendbare Theoreme liefert, ist sie mittels intuitionistischer Begriffsbildung begründbar.

Leider ist damit aber keineswegs etwa die gesamte »theoretische Physik« begründet. Denn diese hängt gerade in ihren neuesten Entwicklungen vielfach nur noch sehr indirekt (durch Zwischenschaltung statistischer Überlegungen u. dgl.) mit der messenden Erfahrung zusammen. Ein guter Teil der modernen physikalischen Theorie ist vielleicht wirklich (genau läßt sich das bei den heute noch unbekannten Grenzen der Brouwerschen Analysis noch nicht sagen²) »transfinit«.

Weyl hat versucht, — unter der eben genannten Annahme, — sich darüber Rechenschaft zu geben, welchen Sinn man dieser »trans-

1) Es handelt sich eigentlich um Schachtelfolgen von Intervallen (s. unsere Arbeit dieses Jahrb. 6, S. 425 ff.). Im Text ist nur wegen der leichteren Verständlichkeit von Dezimalbrüchen die Rede, die nicht so eindeutig die erreichte Genauigkeit anzeigen. Doch ist dies eine im Grunde leicht zu erledigende, rein technische Frage.

2) Wenn das einmal genauer bekannt sein wird, wird man auch die Wichtigkeit des Brouwerschen »Transfiniten« im Vergleich zum Weylschen »reinen Indefiniten« abschätzen können.

finiten« Analysis und Physik nun noch zuschreiben kann¹. Er hat dem phänomenologisch (intuitionistisch) begründbaren »Wissen« den »Glauben« gegenübergestellt, in dem es »dem Bewußtsein gelingt, 'über den eigenen Schatten zu springen', den Stoff des Gegebenen hinter sich zu lassen, das Transcendente darzustellen; aber, wie sich von selbst versteht, nur im Symbol«. Es handelt sich dabei um eine der künstlerischen analoge »theoretische Gestaltung«, deren »Organ« nicht »das Sehen«, sondern das »Schöpferische« ist. Weyl lehnt sich dabei philosophisch an Fichte an², der die Postulatenlehre Kants auf Alles ausgedehnt habe, sodaß »ohne den Glauben an die transcendente Vernunftthese . . . alles Wissen tot und gleichgültig ist«.

Nun ist in der Tat nicht zu verkennen, daß es sehr nahe liegt, die Grundbegriffe der Kantischen Philosophie auf die eigenartige »Transcendenz« des Transfiniten anzuwenden³. Von dem bekannten Wort von den Begriffen, die ohne Anschauung leer sind, bis zu gewissen Einzelheiten der transcendentalen Dialektik – dem regulativen, nicht konstitutiven Gebrauch der Ideen, deren transcendentalem Schein, der Erschleichung in den dialektischen Argumenten, endlich, nicht zuletzt: den auf die spezifische Natur des Menschen, als geschaffenen Wesen, bezüglichen Anschauungsformen des Raumes und vor allem der Zeit, wobei noch die enge Beziehung von Zahl und Zeit in der Lehre vom transcendentalem Schematismus besonders zu beachten ist, – kann man in dem besonderen Problem des mathematischen Transfiniten die großen Kantischen Fragestellungen wiederfinden. (Vgl. unsere späteren Ausführungen über Kant § 6b II und 6c III D.) Aber andererseits ist doch zu betonen, daß Kants Postulatenlehre erstens der praktischen Vernunft angehört, zweitens sich auf das einsichtige Verständnis des Sittengesetzes gründet, – beides, wie es scheint, Momente, die für die Problematik der theoretischen Physik nicht existieren.

Neuerdings hat Weyl (in seinem Beitrag »Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft« zum »Handbuch der Philosophie« Abteilung II, A, herausgegeben von Bäumler und Schröter, München [Oldenbourg] 1926) seine Auffassung einer sachlich bedeutsamen »symbolischen« Mathematik näher auseinandergelegt. Eine

1) Math. Zeitschr. Bd. 20, S. 149–150, Symposion I, S. 30–32.

2) l. c. S. 149, Anm. 20. Wir ziehen es vor, im folgenden die ursprünglicheren Kantischen Begriffe zu verwenden.

3) So sagt auch Hilbert am Schlusse seines neuesten Aufsatzes »Über das Unendliche« (Math. Ann. 95), das Unendliche sei eine Idee im Sinne Kants.

Würdigung der dort entwickelten, sehr bemerkenswerten Gedanken überschreitet den Rahmen der gegenwärtigen Untersuchung schon deshalb, weil nach Weyl das »von dem Glauben getragene Jenseits, auf das sich die Symbole der Hilbertschen theoretischen (nicht intuitiven) Mathematik richten«, nur gefunden werden kann, wenn man »die Mathematik sich völlig mit der Physik verschmelzen läßt« und annimmt, »daß die mathematischen Begriffe von Zahl, Funktion usw. (oder die Hilbertschen Symbole) prinzipiell in der gleichen Art an der theoretischen Konstruktion der wirklichen Welt teilnehmen, wie die Begriffe Energie, Gravitation, Elektrizität usw.«¹ Unsere gegenwärtigen Betrachtungen beschränken sich aber auf das Gebiet der reinen Mathematik. Nur so viel sei bemerkt, daß Weyl sich in seinen neuesten Untersuchungen vor allem Leibniz nähert² und unter den nachkantischen Philosophen eher Schelling als Fichte. Über die Frage der »symbolischen Mathematik« als einer Weise der Naturdeutung, welche ein Randproblem unserer Untersuchung darstellt, wird am Schluß der ganzen Abhandlung noch Einiges gesagt werden (§ 6 c IV).

Hier endet jedenfalls die logische Analyse. Sie erweist sich als unfähig, der Hilbertschen Analysis einen selbständigen Sinn zu erteilen und schiebt die Frage der tiefergehenden »ontologischen Analyse« zu. Vom »logischen« Gesichtspunkt aus bleibt nur die axiomatische Differenzierung der Mathematik A und B , derart, daß B als umfassenderes Gebiet A einschließt, so daß für zu B gehörige »Gegenständlichkeiten« und »Sätze« (welche Bezeichnungen, wie nunmehr feststeht, nur cum grano salis zu nehmen sind) die Möglichkeit besteht, vielleicht einmal zum Teil wenigstens zur Gruppe A zu gehören, wodurch sie vom bloßen »Gefühlsein« erst eigentlich zum »Sein« kommen würden. Diese Axiomatik höherer Ordnung ist auch ein positiv wissenschaftliches, von dem hier behandelten Grundlagenstreit unabhängiges Problem, vergleichbar mit dem der »reinen« Beweisführung in der projektiven Geometrie und der auf das archimedische Axiom, den Pascalschen und den Desargues'schen Satz bezüglichen axiomatischen Untersuchungen. Sie unterscheidet sich aber von jenen geometrischen Problemen durch ihre philosophische Bedeutung, obwohl sie für die philosophischen Fragen nur den Wert einer Voruntersuchung haben kann.

1) Vgl. Math. Zeitschr. 20, S. 150 und Symposion I, S. 31.

2) Vgl. unsere späteren Ausführungen über Leibniz in § 6 c III.

§ 5.

Ontologische Probleme des Intuitionismus.

Bei der Formulierung des Problems der mathematischen Existenz als eines philosophischen wurde von vornherein auf seinen ontologischen Charakter Gewicht gelegt. Die entscheidende Frage ging auf den Seinsinn der mathematischen Gegenstände. Es wurde ausgeführt, daß die beiden in dieser ganzen Untersuchung fortgesetzt betrachteten Grundauffassungen diesen Seinsinn von ihrem mathematischen Gesichtspunkt aus, die eine in der bloßen Eigenschaft der widerspruchsfreien Funktion im System der mathematischen Theorie, die andere in der eigentümlichen Zugangsmöglichkeit der Konstruktion sahen (§ 2). Indessen kann man mit diesen aus der positiven mathematischen Wissenschaft selbst erwachsenen Begriffen und Kategorien die eigentlich ontologische, d. h. spezifisch philosophische Fragestellung nicht in voller Sinnangemessenheit zum Ausdruck bringen.

Es ist allerdings leicht zu sehen, daß jene beiden in der positiven Mathematik zur Charakteristik der mathematischen Existenz benutzten Begriffe der »widerspruchsfreien Funktion« bzw. der »Konstruierbarkeit« eine enge Beziehung zu den auch gegenwärtig in der »Erkenntnistheorie« einander gegenüberstehenden Richtungen des »Realismus« und »Idealismus« haben. Das trat ja in unserer eigenen Darstellung dadurch hervor, daß wir das »Zugangsprinzip« im Anschluß an die in unserer früheren Arbeit (dieses Jahrbuch Bd. 6) gebrauchte Bezeichnungsweise auch »das Prinzip des transzendenten Idealismus« nannten. Auf der anderen Seite entspricht die grundfänglich »unerkennbare« (unzugängliche) aber doch widerspruchlos in ein »systematisches Weltbild« einzuordnende Gegenständlichkeit der »realistischen« metaphysischen Grundhaltung. (Man denke etwa an N. Hartmann, Die Metaphysik der Erkenntnis, Berlin 1921). — Trotzdem ist auf diesen Tatbestand kein entscheidendes Gewicht zu legen, weil die Problematik der »Erkenntnistheorie« nicht für irgend ein philosophisches Problem als entscheidend angesehen werden kann. Entscheidend ist vielmehr die ontologische Problematik, in einem noch (in § 6a) zu erläuternden Sinn.

Ontologie geht danach auf die Seinsart jeglicher Gegenständlichkeit, letztlich bezogen auf das Dasein des Menschen als ausgezeichnetes Sein. Es wird nun die Aufgabe der folgenden Untersuchung sein, die für die Charakterisierung der mathematischen Gegenstände sinnangemessenen ontologischen Kategorien zu entwickeln.

Für diese Absicht ist ein Rückgang auf die Geschichte der Mathematik wie auch der Philosophie unvermeidlich. Denn nur in einem solchen Rückgang kann der Sinn-Ursprung der heute üblichen zur Kennzeichnung der »mathematischen Existenz« dienenden Kategorien erfaßt werden. Indessen wird das Nötigste in dieser Richtung geleistet werden können, wenn auf die Anfänge der mathematischen Begriffsbildung in der Geistesgeschichte bei den Griechen zurückgegangen wird, und dann noch die entscheidendsten Übereinstimmungen und Unterschiede in der geistigen Grundhaltung unserer »abendländischen« Mathematik gegenüber der antiken hervorgehoben werden¹.

Die eigentliche ontologische Problematik im strengen Sinn wird erst in § 6 entwickelt werden, die unmittelbar folgenden Ausführungen haben den Zweck, durch Betrachtung der entscheidenden Einzelprobleme im Anschluß an die historische Entwicklung das konkrete Material für die prinzipiellen Überlegungen zu liefern.

Der Abschnitt (a) des Paragraphen wird sich gleichwohl mit einer Begriffsbildung zu beschäftigen haben, die erst im 19. Jahrhundert, von G. Cantor geschaffen worden ist, nämlich mit der Reihe der transfiniten Ordnungszahlen. Denn sie ist zur Behandlung des an sich uralten »Kontinuumproblems«, wie es heute liegt, die sachliche Voraussetzung. Die historischen Bemerkungen folgen daher erst am Anfang des Abschnitts (b).

a) Der transfinite Progressus und seine ontologische Deutung.

1. Die Reihe der Cantorschen Transfiniten in der traditionellen Interpretation.

Betrachtet man die philosophischen Bemerkungen, die Georg Cantor, der Begründer der Mengenlehre, zu seinen bahnbrechenden Entdeckungen gemacht hat², so fällt auf, daß sie vor allem,

1) Die Rolle, die die arabische Mathematik und als ihre Quelle die indische bei der Entstehung der abendländischen gespielt hat, ist in ihren näheren Umständen noch zu wenig geklärt, um berücksichtigt werden zu können. Für die hier verfolgten Zwecke genügt eine einfache Gegenüberstellung der antiken und abendländischen Mathematik in ihrer Grundhaltung.

2) Über diesen am Anfang der Entwicklung stehenden »ontologischen« Ursprung der Mengenlehre ist die gegenwärtige Wissenschaft hinweggeschritten zu einer formalen Theorie, sei es mehr konstruktiven, sei es mehr axiomatischen Gepräges. Es ist aber, sofern man auf die philosophischen Grundlagen der »Mengenlehre« den Blick richten will, wichtig, die ursprüngliche in mathematisch-theoretischer Hinsicht noch manche Mängel aufweisende Fassung

ja fast ausschließlich von den transfiniten Ordnungszahlen handeln, von jener berühmten »Fortsetzung der ganzen realen Zahlenreihe über das Unendliche hinaus« und ihrem Zusammenhang mit der Stufenreihe der »Mächtigkeiten«.

Cantor hat bereits in der »Mannigfaltigkeitslehre« von 1883 sich darüber geäußert, wie er sich die philosophische Bedeutung des von ihm entdeckten »bestimmten Unendlichen« denkt.

Es heißt (Math. Ann. 21, S. 556) in § 5; daß »das wahre Unendliche oder Abolute, welches Gott ist, keinerlei Determination gestattet«. »Der Satz 'omnis determinato est negatio' steht für mich ganz außer Frage« dagegen: »... was ich behaupte, ... ist, daß es nach dem Endlichen ein Transfinitum (welches man auch Suprafinitem nennen könnte) d. i. eine unbegrenzte Stufenleiter von bestimmten Modis gibt, die ihrer Natur nach nicht endlich, sondern unendlich sind, welche aber wie das Endliche durch bestimmte wohl definierte von einander unterscheidbare Zahlen determiniert werden können.«

Und später (1887)¹ noch klarer: »Es wurde das Aktual-Unendliche nach drei Beziehungen unterschieden: erstens sofern es in der höchsten Vollkommenheit, im völlig unabhängigen außerweltlichen Sein, in Deo realisiert ist, wo ich es Abolutunendliches oder kurzweg Abolutes nenne; zweitens sofern es in der abhängigen, kreatürlichen Welt vertreten ist; drittens sofern es als mathematische Größe, Zahl oder Ordnungstypus vom Denken in abstracto aufgefaßt werden kann. In den beiden letzten Beziehungen, wo es offenbar als beschränktes, noch weiterer Vermehrung fähiges und insofern dem Endlichen verwandtes Aktual-Unendliches sich darstellt, nenne ich es Transfinitum und setze es dem Aboluten streng entgegen«.

Sehr merkwürdig ist der Ausdruck »noch weiterer Vermehrung fähig und insofern dem Endlichen verwandtes Aktual-Unendliches«. Man ist geneigt diese »Verwandtschaft mit dem Endlichen« in gewissem Sinne als eine Verwandtschaft mit einem werdenden (potentiellen) Unendlichen auszulegen. In der Tat scheint das ein

der Cantorschen Grundbegriffe wieder hervorzuheben. — Ich beziehe mich dabei auf die »Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre« [= Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten V. Math. Ann. Bd. 21, S. 545 ff. (1883)] und auf die Aufsätze »Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten«, Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, Neue Folge, Bd. 88 (1884), 91 (1887), 92 (1888).

1) Zeitschr. f. Phil. u. philos. Kritik, Bd. 91, p. 81 82.

mit Cantor korrespondierender »großer Theologe«¹ auch gefühlt zu haben, wenn er (l. c. S. 91) sagt: »aus Ihrem (Cantors) Aufsatz... ersehe ich..., wie Sie das Absolut-Unendliche und das, was Sie das Aktual-Unendliche im Geschaffenen nennen, sehr wohl unterscheiden. Da sie das letztere für ein »noch Vermehrbares« (natürlich in indefinitum, d. h. ohne je ein nicht Vermehrbares werden zu können) ausdrücklich erklären und dem Absoluten als »wesentlich Unvermehrbares« entgegenstellen..., so sind die beiden Begriffe des Absolut-Unendlichen und des Aktual-Unendlichen im Geschaffenen oder Transfiniten wesentlich verschieden, sodaß man im Vergleich beider nur das Eine als eigentlich Unendliches, das Andere als uneigentlich und aequivoce Unendliches bezeichnen muß.« Zu bemerken ist hierzu, daß Cantor sonst mit »Uneigentlich-Unendlich« das gewöhnliche potentielle Unendliche bezeichnet. Da er sich mit der Darstellung des zitierten Briefes im weiteren völlig einverstanden erklärt, so kann man vielleicht annehmen, daß auch Cantor selbst seinem Transfiniten zum mindesten einen »relativ« potentiellen Charakter zuspricht. Allerdings widersprechen dem viele Stellen bei Cantor ausdrücklich, an denen die Aktualität, das Sein, nicht Werden des Transfiniten mit aller Schärfe betont wird. Etwa l. c. S. 98 gegen Wundt: »Wundts Auseinandersetzung zeigt, daß er sich des fundamentalen Unterschiedes von Uneigentlich-Unendlichem = veränderlichem Endlichen = syncategorematische infinitum (ἄπειρον) einerseits und Eigentlich-Unendlichem = Transfinitem = Vollendetunendlichem = Unendlichseiendem = categorematische infinitum (ἀφωρισμένον)² andererseits nicht klar und deutlich bewußt ist...« Oder l. c. S. 108: »Unter einem Aktual-Unendlichen ist... ein Quantum zu verstehen, das einerseits nicht veränderlich, sondern vielmehr in allen seinen Teilen fest und bestimmt eine richtige Konstante ist, zugleich aber andererseits jede endliche Größe derselben Art an Größe übertrifft. Als Beispiel führe ich die Gesamtheit, den Inbegriff aller endlichen ganzen positiven Zahlen an; diese Menge ist ein Ding an sich und bildet, ganz abgesehen von der natürlichen Folge der dazugehörigen Zahlen, ein in allen Teilen festes bestimmtes Quantum, ein ἀφωρισμένον, das offenbar größer zu nennen ist, als jede endliche Anzahl«. — Man muß aber wohl unterscheiden zwischen der einzelnen transfiniten Zahl, und

1) Nach einer Bemerkung von Gutberlet in einer Rezension von H. Fraenkels »Mengenlehre« im Philosophischen Jahrbuch der Görres-Gesellschaft Bd. 32 ist es der Kardinal Franzelin gewesen.

2) Aristoteles, Physik III, c. 8 (p. 208 a 6): τὸ ἄπειρον οὐ μόνον δινύμει ἀλλ' ὡς ἀφωρισμένον.

z. B. »dem Transfiniten« im Ganzen, das sich zunächst in der stets vermehrungsfähigen Folge der Ordnungszahlen in ganz analoger Weise darstellt, wie das (als *δυνάμει ὄν* aufgefaßte) »Endlose« (nach der intuitionistischen Anschauung) in der stets verlängerungsfähigen Folge der endlichen Zahlen. — Es fragt sich nun, ob derartige endlosen Prozesse, wie sie sich in den Folgen der endlichen wie der transfiniten Ordnungszahlen darstellen, sich nicht schließlich doch auf ein — allerdings im eigentlichsten Sinn »im Unendlichen liegendes« — Ziel hinbewegen können. Von der Reihe der transfiniten Zahlen sagt Cantor (l. c. S. 109): »Das Transfinite mit seiner Fülle von Gestaltungen und Gestalten weist mit Notwendigkeit auf ein *A b s o l u t e s* hin, auf das »wahrhaft Unendliche«, an dessen Größe keinerlei Hinzufügung oder Abnahme statthaben kann und welches daher qualitativ als absolutes Maximum anzusehen ist. Letzteres übersteigt gewissermaßen die menschliche Fassungskraft und entzieht sich namentlich mathematischer Determination; wogegen das *T r a n s - f i n i t e* nicht nur das weite Gebiet des Möglichen in Gottes Erkenntnis erfüllt, sondern auch ein reiches, stets zunehmendes Feld idealer Forschung darbietet und meiner Überzeugung nach auch in der Welt des Geschaffenen bis zu einem gewissem Grade und in verschiedenen Beziehungen zur Wirklichkeit und Existenz gelangt, um die Herrlichkeit des Schöpfers, nach dessen absolut freiem Ratsschluß, stärker zum Ausdruck zu bringen, als es durch eine bloß »endliche Welt« hätte geschehen können«

In einem bestimmten Sinn kann man die erste transfinite Ordnungszahl ω , den Ordnungstypus der Reihe aller endlichen Zahlen, als »Grenze« (Ziel) des endlichen Zählprozesses ansehen, als Ziel des transfiniten Zählprozesses aber den »Ordnungstypus der Reihe aller Ordnungszahlen«, die berückichtigte »maximale« Ordnungszahl W . Diese identifiziert also Cantor in der obigen Stelle mit dem absoluten Unendlichen.¹ Es sei kurz die Paradoxie, die sich an dieses W knüpft, erinnert: W soll einerseits der Ordnungstypus aller Ordnungszahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge genommen sein, ist also unvermehrbar. Andererseits kann man doch grundsätzlich jede Ordnungszahl durch Anhängen eines Elementes (Addition der 1) vergrößern: $W + 1 > W$; ganz analog wie etwa $\omega + 1 > \omega$ oder sogar $n + 1 > n$.

1) Die Antinomie, die sich an die Menge W knüpft, wurde zwar erst 1897 von Burali-Forti publiziert (Rend. Circ. Math. Palermo XI), aber von Cantor bereits 1896 brieflich Hilbert mitgeteilt. (Angabe von F. Bernstein, Math. Ann. 60, S. 187.)

Dies ist ein offenkundiger Widerspruch¹.

Es stimmt dieser Umstand gut zu Cantors Behauptung, daß das Absolut-Unendliche (also \aleph) die menschliche Fassungskraft übersteige. Oder genauer gesagt: Der paradoxe Begriff der »maximalen« Ordnungszahl \aleph kommt dadurch zustande, daß man der transfiniten Zahlenreihe ein Ziel setzt, das selbst seinerseits nur transfinit sein soll, aber nicht – wie Cantor ursprünglich meinte – das Absolut-Unendliche, das »infinitum aeternum increatum sive absolutum«².

Nun bietet sich aber anscheinend bereits dieselbe Schwierigkeit auf einer viel früheren Stufe dar: nämlich bei der »Erzeugung« der ersten Transfiniten ω selbst. Betrachtet man die werdende Zahlenreihe $1, 2, 3, 4, \dots$, so gilt, daß jede einzelne, noch so große Zahl in sich konstant, fest bestimmt, seiend, nicht werdend ist; daß sie aber vermehrbar ist, etwa um 1, so daß also der Übergang $n \rightarrow n + 1$ möglich ist, wodurch die Zahlenreihe $1, 2, 3, \dots, (n - 1), n$ sich um ein Glied weiter entwickelt. Aber es ist anscheinend sinnlos von der Reihe aller ganzen Zahlen zu sprechen. Denn einerseits müßte, wenn dieser Reihe die bestimmte Zahl x entspräche, x die »letzte« aller Zahlen sein, andererseits könnte man die auf sie folgende $x + 1 > x$ leicht bilden. (Man sieht die genaue Analogie mit der Antinomie der Zahl \aleph !)

Wie entzieht sich Cantor diesem Dilemma? Er führt tatsächlich eine »auf alle Zahlen folgende« Zahl ω ein, aber verlangt von ihr nicht, daß sie die letzte ist, sondern läßt auf sie beliebige weitere Zahlen $\omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \dots$ folgen.

Man ist heutzutage an dieses Verfahren durch die langjährige Geschichte der Mengenlehre so gewöhnt, daß man sich das Außerordentliche dieses ersten Schrittes ins transfinite Gebiet kaum noch zum Bewußtsein bringt. Dazu kommt, daß man mit Hilfe von axiomatisch aufgebauten angeblich »exakten« Satz- und Beweisystemen sein Gewissen damit beruhigt, daß man ja vor Widersprüchen gesichert sei, – obwohl eine wirklich radikale Sicherung eigentlich erst die Hilbertsche Beweistheorie (und die ihr verwandte von J. König)³ in Aussicht stellt. Indessen, im Grunde ist es – ontologisch, d. h. »inhaltlich« angesehen – ein unerhörtes Vorgehen, auf alle Zahlen noch weitere »über das Unendliche hinaus« folgen zu lassen.

1) Vgl. z. B. Hessenberg, Grundbegriffe der Mengenlehre (Göttingen 1906), Kap. XXIV, insbes. §§ 98–99.

2) Cantor, Zeitschr. f. Phil. u. philos. Kritik 91, S. 105.

3) Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik u. Mengenlehre. Leipzig 1914.

Sieht man die Sachlage ontologisch an, so muß man notwendig weiter fragen: ist es möglich, diese Fortsetzbarkeit der Zahlenreihe über ω hinaus auf irgend einem Gebiet an irgend einem Beispiel konkret zu verfolgen?

Es scheint zunächst, als ob man etwa die einfachen Umordnungen der Zahlenreihe:

$$\omega: 1\ 2\ 3\ 4\ \dots; \omega + 1: 2\ 3\ 4\ \dots\ 1; \omega + 2: 3\ 4\ 5\ \dots\ 1\ 2;$$

$$\omega + \omega: 1\ 3\ 5\ 7\ \dots\ 2\ 4\ 6\ 8\ \dots; \text{ufw. ufw.}$$

verwenden könnte. Aber näheres Zusehen zeigt doch sofort, daß es sich hier um eine ganz unorganische äußerliche Hineinsetzung von gänzlich verschiedenen Reihen angehörigen Zahlen handelt. (1 2 3 ...), (2 3 4 ...), (1 3 5 ...), (2 4 6 ...) ufw. unterscheiden sich z. B. nur durch die willkürliche Bezeichnung.

Die 1 hinter alle Zahlen zu setzen: 1 2 3 ... 1; sie einfach zu wiederholen, leistet ontologisch gar nichts. Denn das Nebeneinanderschreiben von 2 und 3, von 17 und 18, allgemein von n und $n + 1$, hat einen Sinn; der durch $+ 1$ angedeutete Übergang von einer bestimmten Zahl zur nächstfolgenden $n \rightarrow n + 1$ ist das Grunderzeugungsprinzip der Zahlenreihe, des »Immer noch eins«. Aber etwas derartiges besteht zwischen den Punkten »...« und der »1« am Schluß nicht.

Man ist daher einigermassen ratlos und ontologisch scheinen die Zahlen ω , $\omega + 1$ ebenso wenig begreiflich, wie die Zahlen W , $W + 1$.

Freilich zu Widersprüchen kommt es bei ω nicht. Und Cantor stellt sich (in den entscheidenden Punkten, aber nicht durchaus) auf den Standpunkt: solange man Widersprüche vermeidet (und die Unnahbarkeit des Absoluten respektiert!), kann man auf alle Einwände mit der Bemerkung antworten: man dürfe eben nicht die im Endlichen »selbstverständlichen« Eigenschaften aufs Unendliche übertragen. Aber dieser Standpunkt schlägt den Forderungen der ontologischen Fragestellung ins Gesicht! Widerspruchsfreiheit – das wurde ja früher eingehend erörtert – befagt im ontologischen Sinn gar nichts Positives. Grundfänglich unerfüllbare Intentionen können durchaus widerspruchsfrei sein. Eigentliche »Existenz« – im ontologischen Sinn – erfordert phänomenale Gegebenheit, »Zugang«. Es »existieren« eben letzten Endes nur Phänomene.

Stellt man demgemäß die Frage so: »Gibt es transfinite Phänomene? Gibt es das Transfinite als Phänomen? Inwieweit und in welcher Gegebenheitsweise?«, so ist die so gefaßte »Existenz«

von ω ebenfowenig von vornherein gesichert wie die von W . Die Widerspruchsfreiheit von ω »erlaubt« zwar die phänomenale »Existenz« von ω , aber sie begründet sie keineswegs, sie ist eine notwendige, aber keineswegs eine hinreichende Bedingung dieser »Existenz«.

Es ist angesichts dieser Sachlage begreiflich, daß der radikale Intuitionismus Weyls, der sich ja philosophisch auf phänomenologischen Grundlagen aufbaut, die Existenz des aktual unendlichen ω ablehnt¹. In dem Aufsatz über die Grundlagenkrise heißt es:² »Kein Platz ist da in unserer Analysis für eine allgemeine Mengenlehre . . .« »Die Mathematik ist ganz und gar, sogar den logischen Formen nach, in denen sie sich bewegt, abhängig vom Wesen der natürlichen Zahl.« »In den hier gezogenen radikalen Konsequenzen stimme ich, soviel ich verstehe, nicht mehr ganz mit Brouwer überein. Beginnt er doch sogleich mit einer allgemeinen Funktionenlehre, . . . betrachtet Eigenschaften von Funktionen, Eigenschaften von Eigenschaften u. f. f. und wendet auf sie das Identitätsprinzip an. (Mit vielen seiner Aussagen gelingt es mir nicht, einen Sinn zu verbinden).« Positiv sagt Weyl³: »Ausgangspunkt der Mathematik ist die Reihe der natürlichen Zahlen, d. h. das Gesetz \aleph , das aus dem Nichts die erste Zahl 1 erzeugt und aus jeder schon entstandenen Zahl die nächstfolgende erzeugt; ein Prozeß, der niemals zu einer schon dagewesenen Zahl zurückführt.«

Der eigentliche Ernst der Frage nach der Existenz des Aktual-Unendlichen im Sinne des Transfiniten tritt also schon bei ω zutage. Auf diese Frage muß schon bei ω und dann weiter bei jeder bestimmten transfiniten Zahl:

$$\omega + 1, \omega + \omega, \omega \cdot \omega, \omega^\omega \dots, \omega^{\omega^\omega} \dots, \omega^{\omega^{\omega^\omega}} = \varepsilon, \dots \Omega_1$$

(Ω_1 ist die 1. Zahl der 3. Zahlenklasse), usw. usw. eine bestimmte

1) Vgl. etwa Math. Zeitschr. 10, p. 57. Noch schärfer ist die Kritik gegen die Cantorsche »Mächtigkeiten«, die als mathematisch völlig bedeutungslos angesehen werden. Siehe l. c. S. 67 unten: »Der Zweifel an der Lückenlosigkeit der Cantorschen \aleph greift nach unserer Auffassung nicht erst bei \aleph_1 , auch nicht erst bei \aleph_0 Platz, sondern schon am ersten Beginn der Zahlenreihe; die Behauptung, daß 1 die kleinste auf 0 folgende Kardinalzahl ist, muß als grundlos zurückgewiesen werden. Mir scheint daraus die mathematische Wertlosigkeit dieses Mächtigkeitsbegriffes hervorzugehen. Natürlich behalten die endlichen Kardinalzahlen ihr altes gutes Recht, wo sie nicht auf eine »definite Menge« bezogen werden, sondern auf den Inbegriff einzelner gegebener Elemente (Zahlbegriff des täglichen Lebens).«

2) l. c. p. 70. 3) l. c. p. 57.

»inhaltliche« (in der Hilbertschen Redeweise »metamathematische«) Antwort gegeben werden. Die üblichen gegen die »negativen Argumente« gewendeten Gegenargumente Cantors genügen hier nicht. Cantor macht den Versuch, sich der Beweislast für die phänomenale Aufweisbarkeit der transfiniten Zahlen mit der Bemerkung zu entziehen, auch die größeren endlichen Zahlen seien nicht »uno intuitu« aktuell zu denken. Er fährt fort: »Und trotzdem haben wir das Recht, die endlichen Zahlen, auch wenn sie noch so groß sind, als Gegenstände der diskursiven, menschlichen Erkenntnis anzusehen und sie wissenschaftlich nach ihrer Beschaffenheit zu untersuchen; dasselbe Recht steht uns auch in bezug auf die transfiniten Zahlen zu«¹.

Bekannt sind die Forschungen über die primitiven Zahlaufassungen (der Naturvölker², des Kindes, des täglichen Lebens), die

1) Zeitschr. f. Phil. u. philos. Kritik, Bd. 91, S. 261. — Cantor erwähnt kurz vorher (l. c. S. 260), daß Augustinus (De civitate Dei, l. XII, cap. 18) sagt: »profecto et omnis infinitas quodam ineffabili modo Deo finita est, quia scientiae ipsius incomprehensibilis non est«, und fährt nun nach der oben zitierten Stelle fort: »... Nach unserer Organisation sind wir nur selten im Besitz eines Begriffes, von dem wir sagen können, daß er ein »conceptus rei proprius ex propriis« wäre, indem wir durch ihn die Sache adäquat, ohne Hilfe einer Negation, eines Symbols oder Beispiels, so auffassen und erkennen, wie sie an und für sich ist. Vielmehr sind wir beim Erkennen zumeist auf einen »conceptus rei proprius ex communibus« angewiesen, welcher uns befähigt, ein Ding aus allgemeinen Prädikaten und mit Hilfe von Vergleichen, Ausschließungen, Symbolen oder Beispielen derartig zu bestimmen, daß es von jedem anderen Ding wohl unterschieden ist. ... Ich gehe nun so weit, unbedingt zu behaupten, daß diese zweite Art der Bestimmung und Abgrenzung von Dingen für die kleineren transfiniten Zahlen (z. B. für ω oder $\omega + 1$ oder ω^ν , bei kleiner endlicher ganzer Zahl ν) eine unvergleichlich einfachere, bequemere und leichtere ist, als für sehr große endliche Zahlen, bei denen wir gleichwohl auch nur auf daselbe, unserer unvollkommenen Natur entsprechende Hilfsmittel angewiesen sind.«

Es liegt bezüglich der Erfassung der großen endlichen Zahlen in der Tat ein wichtiges Problem vor, dem wir noch einige Bemerkungen widmen werden. Vgl. dazu Hufferl, Philosophie der Arithmetik (Halle 1891) Bd. I, S. 211–216 (Rolle der symbol. Vorstellung in der Arithmetik. Über Gauß' Ausspruch $\delta \theta \epsilon \delta \varsigma \acute{\alpha} \rho \iota \theta \mu \eta \tau \iota \varsigma \epsilon \iota$); S. 218 (Aufassung der erhellichen Mengen); S. 221–223 (Symbolisierung durch Vermittlung des vollen Prozesses der Einzelauffassung); S. 240–242, 244–245 (große endliche Mengen); S. 246–250 (unendliche Mengen). — Vgl. auch Math. Anb. zu § 3, Nr. III.

2) Vgl. z. B. Levy-Brühl, Das Denken der Naturvölker. Wien und Leipzig 1921; Wertheimer, Drei Abhandlungen zur Gestalttheorie. Erlangen 1925. (»Über das Zahlendenken der Naturvölker«). — Bekanntlich haben selbst die Griechen erst durch Archimedes und Apollonius eine Zahlen-

Hufferl, Jahrbuch f. Philosophie. VIII.

festgestellt haben, daß ursprünglich nur ein kleines Stück der endlosen Zahlenreihe differenziert und deutlich gegeben ist, daß aber von einer gewissen, von den jeweiligen Umständen abhängigen Stelle ab alle größeren Zahlen in eine unvorstellbare »ungeheure« Zahl zusammenfließen. Erst allmählich erobern sich die Völker im Verlauf ihrer Geistesgeschichte (wie jetzt noch das Kind: man denke an das Rechnen in den begrenzten, sich stufenweise vergrößernden »Zahlenräumen« auf der Volksschule!) die Kenntnis der endlosen Folge der ganzen Zahlen, und es lag so für Cantor die Auffassung nahe, daß dieser Eroberungsprozeß in seinen transfiniten Zahlen einen legitimen Fortgang fände. Aber durch die Tatsache der Eroberung der endlosen Zahlenreihe für die Erkenntnis, die etwa durch das dekadische Positionssystem oder die Archimedischen Oktaden in der »Sandrechnung«¹ geleistet wurde, ist noch nichts ausgemacht über die Weise der Erfassung der großen Zahlen als Phänomene². Ehe über diese Frage nicht Klarheit herrscht, wird man auch nicht beurteilen können, inwiefern vielleicht Cantors Bezeichnungsweise der Transfiniten für diese hinsichtlich der Zugänglichkeit daselbe leistet, wie etwa das dekadische Positionssystem für die endlichen Zahlen. Denn man wird zugeben müssen, daß eine solche Zugänglichkeit, also in gewissem indirekten Sinn eine Erfassung des Zahlenphänomens, bei den gegebenen endlichen in der Wissenschaft und Praxis verwendeten Zahlen wirklich geleistet ist.

Nun ist die Frage der Auffassung großer Mengen schon von Hufferl in seiner »Philosophie der Arithmetik« (II. Teil) eingehend erörtert worden. Es heißt dort (S. 212): »Die Voraussetzung, von der wir zunächst als wie von einer selbstverständlichen ausgingen, nämlich, daß jedes arithmetische Operieren eine Betätigung mit und an den wirklichen Zahlen sei, kann nicht der Wahrheit entsprechen. Allzu voreilig ließen wir uns von der gemeinüblichen und naiven

benennung und schriftliche Bezeichnung erhalten, die beliebig große Zahlen zu bezeichnen gestattet. (Andererseits die Inder, die schon sehr früh sehr hoch hinaufreichende Zahlwörter und später das dekadische Positionssystem besaßen).

1) *ψαμμίτης* (arenarius). Archimedes, ed. Heiberg, Vol. II.

2) Man könnte daran denken, aus der Verwendung beliebiger hoher Zahlen in der Astronomie usw. Schlüsse auf ihre Gegebenheit zu ziehen. Aber wenn man etwa an die Weise denkt, wie in der Inflationszeit die großen Geldziffern im faktischen Leben in die Erscheinung traten, so erkennt man, wie leicht sich in solchen Fällen gewisse Erfassungsphänomene vor die nominell gegebenen Ziffern z. B. der Geldscheine (Milliarden, Billionen usw.) schieben. So wirkte doch z. B. die Billion einfach wie eine neue Geldeinheit, etwa als ob man von der Mark zum Taler oder dgl. übergegangen wäre.

Anficht leiten, die den Unterschied zwischen symbolischen und eigentlichen Zahlvorstellungen nicht beachtet und der fundamentalen Tatfache nicht gerecht wird, daß alle Zahlvorstellungen, die wir über die wenigen ersten hinaus in der Zahlenreihe besitzen, symbolische sind und nur symbolische sein können; eine Tatfache, welche Charakter, Sinn und Zweck der Arithmetik ganz und gar bestimmt¹. Weiterhin (S. 218): Bei der Erfassung sinnlicher Mengen geht »unser ursprüngliche Intention auf die Bildung einer Inbegriffsvorstellung, welche jede der Teilanschauungen (der Menge) für sich auffaßt und mit den anderen einheitlich zusammen begreift. Darauf geht unsere Intention, aber ihr Vollauf zu genügen, fehlt es bei den erheblicheren Mengen an einer entsprechenden Leistungsfähigkeit unseres Geistes. Wohl ist noch die sukzessive Einzelauffassung der Mengenglieder möglich, aber nicht mehr ihre zusammenfassende Kollektion², und sofern wir in derartigen Fällen doch von einer Menge oder Vielheit sprechen, kann dies offenbar nur in symbolischem Sinne geschehen.« Auch dann, wenn wir noch eine eigentliche Mengenvorstellung bilden könnten, unterlassen wir häufig »die wirkliche Auffassung aller einzelnen Glieder, vollführen nur ganz wenige, wenn überhaupt irgendwelche Schritte und begnügen uns mit einer noch viel uneigentlicheren Subsumption unter dem Vielheitsbegriff als sonst«³.

1) Vgl. die weiteren Ausführungen Hufferls, l. c. S. 213–215.

2) Man vgl. dazu, was Kant in der Kritik der Urteilskraft § 26, »Von der Größenschätzung der Naturdinge« sagt. (S. 104–105 Kehrach): »Nun gibt es zwar für die mathematische Größenschätzung kein Größtes (denn die Macht der Zahlen geht ins Unendliche); aber für die ästhetische Größenschätzung gibt es allerdings ein Größtes...« »Anschaulich ein Quantum in die Einbildungskraft aufzunehmen, ... dazu gehören zwei Handlungen dieses Vermögens: Auffassung (apprehensio) und Zusammenfassung (comprehensio aesthetica). Mit der Auffassung hat es keine Not; denn damit kann es ins Unendliche gehen; aber die Zusammenfassung wird immer schwerer, je weiter die Auffassung fortrückt und gelangt bald zu ihrem Maximum, nämlich dem ästhetisch-größten Grundmaße der Größenschätzung. Denn wenn die Auffassung so weit gelangt ist, daß die zuerst aufgefaßten Teilvorstellungen der Sinnenanschauung in der Einbildungskraft schon zu erschöpfen beginnen, indeß daß diese zur Auffassung mehrerer fortrückt, so verliert sie auf einer Seite ebenso viel als sie auf der andern gewinnt, und in der Zusammenfassung ist ein Größtes, über welches sie nicht hinauskommen kann.«

3) Hufferl bemüht sich auf den folgenden Seiten um die schwierige Analyse der momentanen Mengenauffassung; eine gewisse Lösung wird schließlich erreicht durch Einführung der »figuralen Einheitsmomente«. Dieses Problem kümmert uns hier nicht.

Es erhebt sich allerdings angeichts dieser Sachlage die Frage »worin die Gewähr für die Vollständigkeit der durchlaufenden Einzelauffassung der Menge liegt« (S. 240) oder anders ausgedrückt, die Frage nach der »Möglichkeit einer vollständigen Durchzählung« (S. 241). Hier ist entscheidend der Aufweis der sog. »figuralen Momente«¹ gewisser gestalthafter Eigentümlichkeiten der Mengen, die der Succession der Einzelauffassungen »einen geregelten und sicheren Gang erteilen«.

Für den gegenwärtigen Zweck genügt es, den einfachsten Fall ins Auge zu fassen, daß die Glieder der Menge in einer Reihe etwa räumlich oder auch in der Zeit vorliegen bzw. nacheinander ablaufen. Es sind alsdann die »Verknüpfungen der elementaren Reihenrelationen, die uns anleiten.« Wir gehen vom ersten Glied zum zweiten, von da zum dritten, allgemeiner vom $(n-1)^{\text{ten}}$ zum n^{ten} und vom n^{ten} zum $(n+1)^{\text{ten}}$ über. »Indem uns so stets zwei aneinandergrenzende Verknüpfungen zugleich und zwar als wohlgeordnete gegenwärtig sind, kann die neue als solche erkannt werden, und der Fortschritt wird zu einem eindeutig bestimmten. Diese Eindeutigkeit gewährleistet aber die Vollständigkeit der durchlaufenden Einzelauffassung« (S. 241).

Wir sind also auf die beschriebene Weise in der Lage, auch große, als Ganzes unübersehbare Mengen, bei genügender Zeitaufwendung vollständig zu durchlaufen bzw. uns vermöge der eigentümlichen Verkürzung, die Zeitstrecken in der »uneigentlichen« Vorstellung erleiden², auch noch so große Mengen derart »durchlaufen

1) Näheres bei Hufferl, l. c. S. 227 ff. — Die dort gegebenen Descriptionen sind allerdings keineswegs streng phänomenologische, sondern psychologische. Es bietet aber dem Kenner der phänomenologischen Methode keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, den phänomenologischen Kern jener Descriptionen rein herauszuschälen. — Nur auf einen Punkt sei hingewiesen: Der Gedanke, die uneigentliche Gegebenheit einer Menge, Zahl usw. als »symbolisch« aufzufassen in dem Sinn, daß an Stelle des eigentlichen Gegenstandes als »Repräsentant« ein »Zeichen« figuriere, ist nach den späteren Forschungen Hufferls unhaltbar. Es hat an ihre Stelle vielmehr die grundsätzliche Einführung der Begriffe der »leeren Intention« und ihrer »Erfüllung« zu treten. Siehe die bezüglichen Ausführungen der »Logischen Untersuchungen«, besonders in der I. und VI. Untersuchung.

Ebenso darf der fundamentale Unterschied, der zwischen Kollektion (Menge) und sinnlichem Einheitsmoment besteht, nicht außer Acht gelassen werden: eine Kollektion ist das Korrelat einer kategorialen Anschauung, das sinnliche Einheitsmoment (figurales Moment) der sinnlichen Anschauung. Vgl. VI. Log. Unterf., 2. Abschnitt, bes. § 91, S. 161.

2) Die Rolle der Zeit bei der Erfassung mathematischer Gegenständlichkeiten wird in § 6 b erörtert.

zu denken«. Diese diskreten linearen Mengen können nun offenbar die Auffassung der Zahlen begründen; an ihnen kann der Zahlencharakter als abstraktes Moment herausgehoben werden. Wie das geschieht, ist für die gegenwärtige Untersuchung nicht von Belang.

So kann man also die Frage nach der phänomenalen Gegebenheit größerer Zahlen dahin beantworten, daß sie auf Grund einer »gedachten« vollständigen Durchlaufung, deren Eindeutigkeit durch die Art der zählenden Bewegung gesichert ist, in einer gewissen Weise »selbst gegeben« sind. Und aller Wahrscheinlichkeit nach gibt es gar keine noch erfülltere Weise der Gegebenheit dieser Zahlen oder wenigstens genügend hoher Zahlen dieser Art. Es würde dann also sogar die einzige Weise der originären Gegebenheit vorliegen, deren sie fähig sind. — Wie steht es nun aber mit unendlichen Mengen? Hierüber stehen auch schon in der »Philosophie der Arithmetik« (S. 246—60) erstaunlich tiefgehende Bemerkungen, die ganz und gar der heutigen »intuitionistischen« Auffassung und zwar in ihrer radikalsten (Weyl'schen) Form entsprechen.

Es wird zunächst gesagt, daß die unendlichen Mengen sich dadurch von allen noch so großen endlichen Mengen grundsätzlich unterscheiden, daß sie als wirkliche Kollektion auch für ein »idealiertes Erkenntnisvermögen« nicht anschaulich sind. »Der Gedanke, daß irgend eine Erweiterung unseres Erkenntnisvermögens dieses zu der wirklichen Vorstellung oder auch nur der sinnlichen Ausschöpfung solcher Mengen befähigen könnte, ist unausdenkbar. Hier hat selbst unsere Kraft der Idealisierung eine Schranke« (S. 247). Gegeben ist lediglich »die symbolische Vorstellung eines unbeschränkt fortsetzbaren Prozesses der Begriffsbildung«, mit Rücksicht auf dessen Ergebnisse sukzessive (endliche) Mengenvorstellungen gebildet werden, die sich stets erweitern. Sofern dieser Prozeß nun als eindeutig bestimmt vorausgesetzt wird¹, erhält auch der Begriff »ein mögliches Resultat dieses Prozesses« einen bestimmten, faßbaren Sinn².

1) Bedenklich ist es allerdings, wenn H u f f e r l (S. 247) sagt: »Es ist a priori durch scharfe begriffliche Momente bestimmt, was diese stetig auszuwehnende Menge umfaßt oder umfassen kann, d. h. von einem jeden vorgegebenen Denkobjekt läßt es sich unzweideutig entscheiden, ob es Glied dieses Prozesses bzw. dieser Mengenbildung sein könne, oder nicht.«

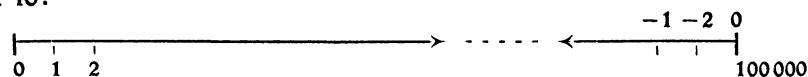
Dies gilt offenbar nur für gesetzmäßige Folgen und auch für die Urfolge & selbst, nicht aber für »frei werdende Wahlfolgen«, die in gewissem Sinn doch auch unendliche Mengen sind.

2) Man beachte, wie der Begriff des »Möglichen«, des Spielraumes der Variablen, erst durch den Begriff des bestimmten Prozesses seinen Sinn erhält, nicht umgekehrt!

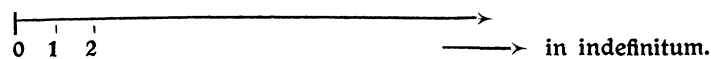
Das »begriffliche Prinzip«, das dem Prozesse seine Bestimmtheit gibt, tritt an die Stelle des figuralen Momentes, das bei der sukzessiven Durchlaufung der Glieder der endlichen Mengen den Leitfaden abgibt.

Soweit die Ausführungen Hufferls. Man kann ihnen i. A. noch heute zustimmen, nur ist der Unterschied zwischen einem begrifflichen Moment und dem »figuralen« (also rein sinnlichen) Moment einigermaßen irreführend. Es handelt sich bei der endlichen Kollektion, wie Hufferl später in den »Logischen Untersuchungen« eingehend gezeigt hat, nicht um eine rein sinnliche Erfüllung, sondern das eigentliche Kolligieren ist eine Leistung der sog. »kategorialen Anschauung«. Andererseits ist das »und so weiter« des endlosen Prozesses zwar wohl kategorial durchformt, aber doch auch fundiert auf das »sinnliche Moment« des »offenen Horizonts«. Denn auch die Sinnlichkeit ist schon durchaus von Intentionalitäten durchherrschet, wie die Phänomenologie der Wahrnehmung zeigt.

Zieht man diese Bemerkungen in Erwägung, so ergibt sich, daß auch die unendlichen (endlosen) Mengen in einem gewissem Sinne originär gegeben sind, wenn man nur den Sinn von »originär« entsprechend geschmeidig auffaßt. Die eigentümliche Anschaulichkeit des »offenen Horizonts« kann wirklich dem »figuralen Moment«, das etwa in der Form einer linearen Anordnung die Auffassung großer Zahlen ermöglicht, zur Seite gestellt werden. Im Grunde spielt sogar dieser »offene Horizont« bei der Auffassung sehr großer endlicher Mengen eine Rolle: denkt man sich etwa 100 000 Pflastersteine in linearer Anordnung, so hat man doch eben nur den Beginn der Reihe, dann, geleitet vom figuralen Moment den offenen Horizont und dann das Ende der Reihe, also etwa so:



So angesehen ist die »Vorstellung« der unendlichen Zahlenreihe sogar in gewissem Sinne einfacher, indem sie nur das Anfangsstück und dann den »offenen Horizont« enthält:



So kommen wir in gewissem Sinne zu Cantors Behauptung zurück, daß die einfachen transfiniten Zahlen leichter zu erfassen seien, als sehr große endliche Zahlen. Und es könnte sogar einen Augenblick lang scheinen, als ob von dem gewonnenen Standpunkt

nämlich die Herstellung bzw. die Aufweisung eines Motivationszusammenhangs, der zur Fortleitung des begonnenen Prozesses »ins Transfinite« antreibt.

II. Transfinite Strukturkomplikationen des Bewußtseins.

An zwei im Typus in mancher Hinsicht unterschiedenen Beispielen sei nun die konkrete Möglichkeit der Unterbauung des Schemas der transfiniten Zahlen durch Phänomene gezeigt:

A. Die Stufen der Relativierung von Aussagen.

Man kann aus irgendwelchen Motiven sich gegen eine Aussage, gegen viele Aussagen – vielleicht gegen alle konkret erfolgten naiven Aussagen skeptisch verhalten. Man kann das etwa ausdrücken, indem man sagt: »Die Wahrheit des Satzes p_0 ist nur relativ.« (Dieser Satz werde kurz mit p_1 bezeichnet.) Wenn man konkreter sein will, kann man sagen: relativ auf das urteilende Individuum, seine geistesgeschichtliche Lage u. dgl. Dabei ist impliziert, daß die Wahrheit des Satzes p_1 absolut gelte¹.

Man kann nun aber weiter gehen und mit einer gesteigerten Skeptis auch diesen Satz p_1 bezweifeln, ihn also irgendwie für relativ erklären. Also etwa: »Die Wahrheit von p_1 ist relativ«. Analog kann man fortfahren: »Die Wahrheit von p_2 ist relativ«. [p_3] usw., wodurch man eine endlose Folge von Sätzen $p_0 p_1 p_2 \dots p_n p_{n+1} \dots$ erhält.

Man hat dann also etwa konkret die folgende Reihe: »Es läßt sich bezweifeln, daß es sich bezweifeln läßt, usw. usw. in endloser Folge.« (Kurz zu bezeichnen mit p_ω).

Kann man für diesen Satz rein in abstracto die absolute Wahrheit in Anspruch nehmen? Aus den hier allein in Anspruch zu nehmenden formalen Gründen gewiß nicht. Denn: Es läßt sich wiederum bezweifeln, daß diese in indefinitum eingeschachtelte Reihe einen letzten Standpunkt ausdrückt, d. h. man kann den Satz bilden: »Es läßt sich p_ω bezweifeln« oder »die Wahrheit von p_ω ist relativ«. Diese letzte Aussage ist nun offenbar in demselben Sinn ihrem Range nach p_ω nachgeordnet², wie p_{n+1} dem p_n , d. h. sie muß mit $p_{\omega+1}$

1) Diese Überlegung ist diejenige, auf Grund welcher man vom *circulus vitiosus* im radikalen Skeptizismus zu sprechen pflegt.

2) Hölder (Die mathematische Methode, Berlin 1924, S. 544) sagt bei der Einführung der transfiniten Zahlen über die Ordnungsbeziehung des Vorangehens: »Da nun dieses Vorangehen einen Rang und nicht notwendig das Fortschreiten in einer Reihe bedeutet, auch keine Beziehung zum Zeitbegriff haben soll, so ist es kein Widerspruch, wenn

bezeichnet werden. Hier treten also die transfiniten Zahlen als Indizes auf. Die möglichen Stufen von Relativierung lassen sich formal darstellen durch den Ausdruck p_α wo α eine transfinite Zahl ist¹.

Dieses Beispiel hat gewisse Nachteile. Man wird nämlich geneigt sein zu verlangen, daß für die schrittweise Steigerung des Zweifels oder der Relativierung Motive aufgezeigt werden. Nun kann man allerdings sagen, daß hier jenes berühmte Argument vom Widerfönn jedes radikalen Skeptizismus im Spiele sei und also ein »erkennnistheoretisches« Interesse vorliege. Die Rückbezüglichkeit (*περιτροπή*) der Leugnung oder Bezweiflung aller Wahrheit auf diese einzelne, jene Leugnung oder Bezweiflung ausdrückende »Wahrheit« soll den radikalen Skeptiker in einen Widerspruch mit sich selbst hineintreiben. Aber differenziert man die Aussagen nach Stufen (Typen)², so schlägt diese Argumentation fehl. Die Aussage: »Alle Aussagen erster Stufe sind unwahr« ist selbst von zweiter Stufe, fällt also nicht unter sich selbst und kann deshalb wohl wahr sein. Damit ist einem gewissermaßen raffinierteren, aber eigentlich nicht minder radikalen Skeptizismus »2. Stufe« die Tür geöffnet, der seinerseits die Aussagen 2. Stufe bezweifelt. Indessen kann man diesem Skeptizismus (oder negativen Dogmatismus) 2. Stufe den Einwand machen, das Urteil 3. Stufe: »Alle Aussagen 2. Stufe sind unwahr« sei sicher falsch, denn von den beiden kontradiktorisch entgegengesetzten Urteilen 2. Stufe »Alle Aussagen 1. Stufe sind falsch« und »Nicht alle Aussagen erster Stufe sind falsch« muß eines wahr sein.

wir zunächst eine nicht abbrechende Reihe von Elementen, deren Rangordnung der Reihenfolge entspricht, und dann noch ein einzelnes Element denken, das in seinem Rang nach den sämtlichen in der Reihe enthaltenen Elementen kommen soll.«

Hier wird offenbar die Rangordnung ganz künstlich definiert (Hölder sagt selbst, l. c. S. 544 oben, von dieser Begriffsbildung, daß sie »sehr künstlich ist«), aber nicht irgendwie phänomenologisch auf eine einheitliche konkrete Rangordnungsrelation begründet, wie bei uns auf die Relation der »Einschachtelung« der Sätze. Denn in unserer Bezeichnungsweise heißt p_{n+1} : » p_n ist relativ wahr«.

1) Vgl. die von W. Ackermann für die mathematische Komplikation möglicher logischen Formen für »transfinite Axiome« eingeföhrten Rangordnungszahlen. (S. Math. Anh., zu § 3, Nr. II.)

2) Vgl. die »theory of logical types« von B. Russell und die ähnliche Theorie von J. König. — Bei Russell und Whitehead (Principia Mathematica, Vol. I, p. 65) eine dem Textbeispiel ähnliche Analyse der Aussage »I am lying«, die allerdings dann anders gewandt wird.

Also sind nicht alle Auslagen 2. Stufe falsch, denn jene kontradiktorischen entgegengesetzten Urteile sind doch alle beide solche 2. Stufe.

Man kann diese Art Argumentation noch weiter fortsetzen und wird sich dann der Leere derartiger Spekulationen in peinlicher Weise bewußt. Es besteht daher ein starkes Motiv, Argumente dieser Art so umzugestalten, daß sie mehr Inhalt bekommen. Man könnte das etwa so versuchen: Geht man von der bekannten Behauptung aus, alle konkreten in der Geistesgeschichte der Menschheit in der Form von Urteilen geäußerten Meinungen seien nicht »absolut wahr«, sondern abhängig von der jeweiligen historischen Situation, so kann man diese konkreten Urteile als »Auslagen 1. Stufe« (A_1) auffassen und jene Behauptung als eine »Auslage 2. Stufe« (A_2). Nun wird doch jene Auslage A_2 auch im Verlauf der Geistesgeschichte, also etwa jetzt, im Abendland, tatsächlich gefällt, sie gehört also auch zu den geschichtlich-konkreten Auslagen im weiteren Sinn. (Das ist nicht mehr eine bloße leere Spielerei: Die Entwicklung der Geschichtsschreibung, des historischen und »kulturphilosophischen« Bewußtseins sind selbst geistesgeschichtliche Vorgänge). Die eben gemachte Betrachtung ist eine über eine Auslage 2. Stufe, also selbst von 3. Stufe. (Kritik des historischen Bewußtseins). Damit hört es aber nicht auf: man kann auf verschiedene Weise zu Auslagen 4. Stufe übergehen. (Etwa: Kritik der Kritik des historischen Bewußtseins, oder Geschichte der Geschichte des historischen Bewußtseins usw.) Man hat also hier eine anscheinend¹ inhaltssvolle Iterationsmöglichkeit. Die größere »Inhaltlichkeit« bei diesem letzten Beispiel wird erreicht durch die Rückwendung auf das konkrete historische, d. h. letztlich das eigene Dasein, so wie es jeweilig ist. Führt man diese Rückwendung auf das eigene faktische Dasein durch, so gelangt man zu der Betrachtung eines dem Beispiel der Relativierung nebengeordneten Beispiels der transfiniten Iteration der Reflexion auf sich selbst. – Zuvor sei jedoch noch ein anderes besonders anschauliches Beispiel einer transfiniten Stufung angegeben.

B. Die Stufen der Bildgegebenheit.

Wie andere Modi des vorstellenden (imaginativen) Bewußtseins, läßt sich auch die Bildvorstellung iterieren. Ähnlich wie man von iterierten Vergegenwärtigungen (Erinnerung an Erinnerungen u. dgl.) sprechen kann, kann man auch ineinandergeschachtelte Bildintentionen

¹) Das Wahre und das Scheinbare an jener »Inhaltlichkeit« der Iteration wird später noch genauer untersucht werden.

betrachten: Man kann etwa ein Bild nochmals abbilden und hat dann ein Bild von einem Bild¹. Man kann diese Komplikation der Intentionalität beliebig oft wiederholen und offenbar leicht endliche Stufenindices einführen. (Bild eines Bildes eines Bildes = Bild 3^{ter} Stufe usw.) Es fragt sich aber nun weiter, ob auch diese Art der intentionalen Iteration sich bis zu einer Stufe mit transfinitem Index erheben kann. Und ferner liegt die weitere Frage nahe, ob man eine solche transfinite Iteration (wenn sie möglich ist) nicht in dem Falle des Bildes besonders anschaulich vor Augen führen kann, vielleicht sogar durch geeignete Figuren.

In der Tat sind beide Fragen zu bejahen, wie im folgenden gezeigt wird.

Man nehme ein konkretes Beispiel:

a) Auf dem Deckel eines Bilderbuches für Kinder sei ein Kind abgebildet, das ein Exemplar eben des Bilderbuches, worauf die Abbildung sich befindet, in der Hand hält, in der Weise, daß das Deckelbild sichtbar ist. Dann wird offenbar auf diesem abgebildeten Deckelbild wiederum ein gleiches Kind mit Buch zu sehen sein, auf dessen Umschlag wiederum ein gleiches Kind mit dem gleichen Buch (in kleinerem Maßstab natürlich) erscheint; usw. usw. in indefinitum.

b) Oder: man denke an das alte Deutsche Reichswappen (1871 bis 1918), wie es auf Münzen usw. abgebildet war. Das Wappen zeigte einen Adler mit Brustschild, das seinerseits einen (sehr ähnlichen) Adler enthielt, der dann allerdings in seinem Brustschild eine schachbrettartige Figur trug. Man kann sich diese Darstellung leicht so abgeändert denken, daß 1. die Adler eine genaue Verkleinerung von einander sind und 2. jeder Adler im Schild wieder einen Adler trägt.

c) Oder: man denke an einfache geometrische Figuren; etwa die folgenden² (Fig. 2 – 4):

1) Vgl. Hufferl, Ideen zu einer reinen Phänomenologie, z. B. § 100, S. 211. – Hufferl betont bereits »die ideale Möglichkeit beliebiger Fortführung der Ineinanderfachtelungen«.

2) Andere Beispiele finden sich für mengentheoretischen Zwecke z. B. bei W. H. und G. C. Young, The theory of sets of points (Cambridge 1906), p. 169, 230, 243 ff. usw. und (wo die Abbildung allerdings nicht geometrisch ähnlich ist) bei F. Klein, (Autographierte) Vorlesungen über die Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie (Leipzig, 2. Abdruck, 1907) Seite 218, 225, 242 – 43, 281 – 307.

Diese Vorlesungen erschienen jetzt auch im Druck in der Courant'schen Sammlung (Springer-Verlag, Berlin).

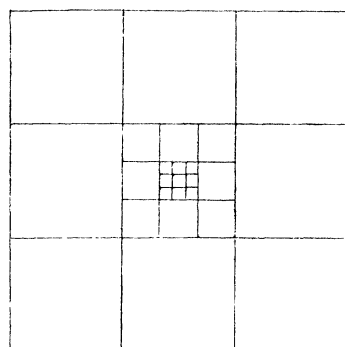


Fig. 2.

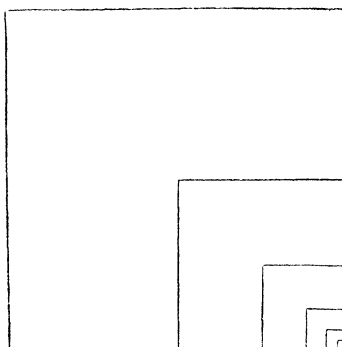


Fig. 3.

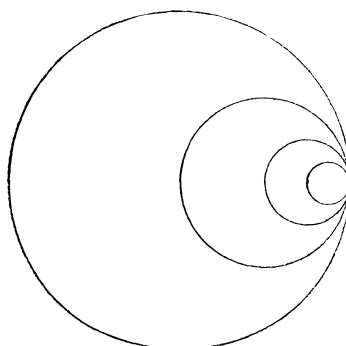


Fig. 4.

Alle diese Beispiele zeigen gewisse Gestalten (Konfigurationen), die sich unendlich oft in der Figur wiederholen. Man kann (wie im ersten Beispiel (a) evident ist) diese ineinandergeschachtelten Konfigurationen als Bilder von einander auffassen und kommt dabei auf Stufencharakteristiken von beliebiger endlicher Höhe.

Bisher ist eine transfinite Stufung noch nicht erreicht. Aber, wenn man sich ein Bild der Typen (a), (b), (c) nochmals abgebildet denkt und diese Abbildung nochmals usw., so erhält man Bilder ω^{ter} , $(\omega + 1)^{\text{ter}}$, usw. Stufe¹. Damit hat man also wirklich, wenigstens für die ersten Transfiniten ω , $\omega + 1$, $\omega + 2 \dots$ eine anschau-

1) Um ein konkretes Beispiel zu haben, nehme man das Bild (a) und denke es sich photographiert und dann diese Photographie etwa im Druck reproduziert. Man könnte dies durch ein- oder mehrmalige Umränderung des Bildes andeuten. Dabei ist allerdings etwas störend, daß der Fortschritt der intentionalen Stufung beim inneren Bild nach innen zu geht, während er bei den Ränderungen nach außen zu stattfindet. Dieser Richtungswechsel findet aber nur in der, natürlich symbolischen, Figur statt, die Bild-Intentionen bauen sich ständig in ein und derselben Richtung aufeinander.

liche, in gewissem Sinne sogar durch eine Zeichnung wiederzugebende Darstellung erreicht.

Noch eine Bemerkung sei hinzugefügt: Es ist klar, daß in einer wirklichen Zeichnung nur eine endliche (und zwar recht kleine) Anzahl Bilder ineinander geschachtelt werden kann. Auch wenn man sich ideale Zeichnungen denkt, die bei immer stärkerer Vergrößerung immer feinere Einzelheiten zeigen würden¹, könnte man doch diesen Vergrößerungsprozeß de facto nicht unbegrenzte Zeit hindurch fortsetzen. Es ist aber doch so, daß die ersten Einschachtelungen den unendlichen Fortgang der reinen idealen Möglichkeit nach einsichtig werden lassen. Diese »idealiter« unendliche Verwicklung der Einschachtelung der Bilder bildet man symbolisch in einer der beschriebenen Figuren ab. Und auf diese, in gewissem Sinn symbolische Abbildung wird dann das weitere (ω^{te} , $[\omega + 1]^{\text{te}}$ usw.) Abbildungsverfahren angewandt. Diese »Symbolik« ist aber keineswegs abstrakt-gedanklich, sondern anschaulich; – vergleichbar etwa der malerischen Darstellung der »unendlichen« Raumtiefe in gewissen Bildern Claude Lorrains oder der klassischen holländischen Landschaftsmalerei.

In anderer Hinsicht muß aber zugestanden werden, daß nur eine endliche Komplikation im wörtlichen, unsymbolischen Sinn im Bilde »vorhanden« ist, – während die Verwicklung der Intentionalität transfinit ist. Wir werden dieser eigentümlichen Erscheinung wieder begegnen (s. u. S. 106 ff.) und sie dann in ihrer Bedeutung würdigen².

C. Die Stufen der Reflexion auf sich selbst.

Der Gedanke der Iteration der Reflexion spielt wie der der Iteration überhaupt in Hufferls »Ideen zu einer reinen Phänomenologie« eine nicht unwichtige Rolle³. Es findet sich auch dort schon der Begriff der »Stufencharakteristik«, einer Art »Index, mit dem jedes Charakterisierte sich als zu seiner Stufe gehörig bekundet«.

1) Wir haben solche Gebilde bei der Betrachtung der verschiedenen Arten von räumlichen Limiten (»Beharrungs«-, »Entfaltungs«-Limiten usw.) in unserer Arbeit im 6. Bd. dieses Jahrbuches (§ 9, B u. C, § 10) beschrieben.

2) Im Math. Anh., Erg. zu § 5, Nr. V ist ein geometrisches Beispiel genauer durchgeführt.

3) Vgl. l. c. § 38 (S. 67); § 77 (S. 146 unten); § 78 (S. 148) über Iteration der Reflexion; § 107 (S. 119 ff.) über iterierte Modifikationen überhaupt; § 112 (S. 226 ff.) Iterierbarkeit der Phantasiemodifikation; § 100 (S. 210 ff.) Stufenbildungen der Vorstellungen in Noesis und Noema; § 101 (S. 211 ff.) Stufencharakteristiken.

(S. 212)¹. Ganz ähnlich wurde oben die Stufe mit dem Index an das *p* oder *A* bezeichnet.

Wenn von Hufferl auch bereits alle abstrakten Möglichkeiten durchdacht und auch für beliebig hohe endliche Iterationen anschauliche Beispiele gegeben sind (s. bef. S. 211), so wird doch über die offen endlose Iteration niemals hinausgegangen und es ist auch für diesen Fortschritt ins Transfinite bei seiner Betrachtungsweise kein konkretes Motiv aufzuweisen.

Dagegen kann man einen derartigen transfiniten Progressus aus einem wirklich lebendigen Motiv herleiten, wenn man auf eine besondere Art der Iteration der Reflexion aufmerksam wird, die Karl Löwith in seiner Dissertation über Nietzsche² betrachtet und als »Parenthesen-Reflexion« bezeichnet hat. Im Anschlusse an Dostojewskijs Erzählung »Die Stimme aus dem Untergrund«³ wird dort die Möglichkeit entwickelt, über das eigene Tun und letztlich die eigene Weise da zu sein in iterierender Weise zu reflektieren.

In dieser Erzählung wird eine Art Selbstgespräch eines mit sich zerfallenen Menschen gegeben, der über sich selbst nachdenkt und alle seine faktischen Lebensäußerungen. Auch dies, daß er in dieser unfruchtbaren Weise über sich nachdenkt, ist ein Gegenstand seines Nachdenkens. Ferner, daß er über diese seine Reflexion auch noch nachdenkt und nachdenken kann, wird zum Thema weiterer Reflexion. Aber auch die Iterationsmöglichkeit selbst wird nach einigen der-

1) Die wichtige Stelle lautet in extenso: »In allen derartigen Stufengebilden, die in ihren Gliederungen iterierte Vergegenwärtigungsmodifikationen enthalten, konstituieren sich offenbar Noemen entsprechender Stufenbildung. Im Abbildungsbewußtsein zweiter Stufe ist ein »Bild« an sich selbst als Bild zweiter Stufe, als Bild eines Bildes charakterisiert. . . . Jeder noematischen Stufe gehört eine Stufencharakteristik zu, als eine Art Index, mit dem jedes Charakterisierte sich als zu seiner Stufe gehörig bekundet. . . . Denn zu jeder Stufe gehören ja mögliche Reflexionen in ihr, so z. B. hinsichtlich der in der zweiten Erinnerungsstufe erinnerten Dinge Reflexionen auf die derselben Stufe angehörigen (also in 2. Stufe vergegenwärtigten) Wahrnehmungen von eben jenen Dingen«.

2) »Auslegung von Nietzsches Selbstinterpretationen und von Nietzsches Interpretationen« Münchener Philos. Dissert. 1923 (Maschinen-Schrift-Exemplar in der Münchener Universitäts-Bibliothek).

3) »Die Stimme aus dem Untergrund. Aus den Papieren des Untergrundmenschen.« Neu übersetzt von Konrad Praxmayer (Berlin, der weiße Ritter-Verlag 1923). – Dies ist die getreueste Übersetzung. In der Piper'schen Gesamtausgabe Dostojewskijs heißt die Erzählung »Aus dem Dunkel der Großstadt«.

artigen Anfangsgliedern der wiederholten Reflexion erkannt und wird selbst zum Gegenstand der Reflexion¹.

Das Wichtige ist nun, daß diese wiederholte (iterierte) Reflexion hier nicht nur ad hoc angestellt, zum Zwecke der Demonstration gewisser komplizierter Strukturmöglichkeiten des Bewußtseins erfunden ist, sondern dem lebendigen Motiv entstammt, der Bodenlosigkeit und Leere des eigenen Daseins zu entfliehen, einen inneren Halt durch aufrichtige, schonungslose Selbstbefinnung zu finden. Freilich schlägt gerade bei dieser iterierten Parenthesen-Reflexion die Absicht fehl und führt im Gegenteil nur zu dem immer trostloseren Bewußtsein der völligen Haltlosigkeit².

Dadurch unterscheidet sich das hier vorliegende konkrete Phänomen von den von Hufferl beschriebenen, die ihre Komplikation nur einer Art kombinatorischer Phantasie verdanken. Man kann wohl in der Art, wie es Hufferl beschreibt, derartige Stufenbildungen gelegentlich ein Stück weit beobachten und dann, darüber theoretisierend, ihr Bildungsgeß erfassen. Aber es besteht kein konkretes, nicht rein erkenntnismäßiges Motiv, die Iteration ins Endlose oder gar ins Transfinite weiter zu verfolgen. Dagegen ist es im Falle der »Parenthesen-Reflexion« die gewaltige Macht des Fluchtimpulses vor dem eigenen eigentlichen Dasein, vor der Notwendigkeit, sich selbst ins Angesicht sehen zu müssen, die die Fortsetzung der Reflexion auf jeder bereits erreichten Stufe erzwingt³.

1) Es heißt beispielsweise l. c. (Praxmarer) S. 67: [am Ende einer Wiedergabe eines Tagestraumes.]: »... Aber wenigstens ist doch alles am Comersee gewesen. Übrigens, jedoch Sie haben ganz recht; es ist wirklich abgeschmackt und auch gemein. Das Gemeinste ist aber, daß ich nun vor Ihnen angefangen habe, mich zu rechtfertigen. Und noch gemeiner ist, daß ich jetzt diese Bemerkung mache. Und genug übrigens jetzt, denn sonst höre ich überhaupt nimmer auf: es wird immer noch eins gemeiner als das andere sein«. — [von mir gesperrt]. Hier hat man also wirklich eine Reflexion auf einen unendlichen Prozeß, also eine Reflexion ω ter Stufe. Die $(\omega + 1)$ te Reflexion findet sich allerdings nicht bei Dostojewskij. —

2) K. Löwith stellt a. a. O. diese unfruchtbare »Parenthesen-Reflexion« (so von ihm genannt nach den im Text von Dostojewskij in sehr charakteristischer Weise auftretenden Parenthesen, in denen die Reflexionen höherer Stufen jeweils ihren Platz finden) der echten »existentiellen« Reflexion gegenüber, bei der schon die erste Stufe ernstgenommen wird, und nicht die Intention der Selbstbefinnung sich in der Betrachtung der psychologischen Verwicklungsmöglichkeiten verliert und damit sich auf der Flucht vor ihrem ursprünglichen Ziele befindet. Man vergleiche die später im Text im Anschluß an Lask gemachte Bemerkung. (S. 105 f.)

3) Dieser Gegensatz des faktischen Lebens in der Alltäglichkeit der »Welt« und des eigentlichen Daseins ist von Heidegger einer eingehenden phäno-

Zugleich – und das ist ebenfalls wichtig – besteht eine vollendete Kontinuität zwischen dem Schritt von n auf $n+1$ und dem von irgend einem endlichen s zu ω , von da zu $\omega+1$ usw. Es ist jedes Mal genau derselbe Schritt – phänomenologisch gesehen –, der ausgeführt wird.

Man kann dies ganz klar einsehen, wenn man eine Überlegung heranzieht, die E. Lask in seiner »Logik der Philosophie« (Tübingen 1911, S. 112) angestellt hat. Lask macht bekanntlich den Unterschied zwischen einem bestimmten, gewissermaßen als Thema dienenden »Inhalt« und einer ihn »umgreifenden« kategorialen Form. »Alle unfinnliche Form ist Geltungsgehalt, d. h. geltendes, von der Kategorie »Gelten« umkleidbares Material.« Dieses Umkleiden des Materials mit Form ist offenbar etwas Ähnliches, wie die Reflexion auf ein bestimmtes Erlebnis »material«. Dieses Umkleiden kann nun ebenso wie die Reflexion iteriert werden. Wie alles Unfinnliche, so ist auch jede logische Form Geltungsgehalt, in der Kategorie »Gelten« stehendes Unfinnliche. Und wie jede logische Form, so steht auch die logische Form »Gelten« selbst in der Kategorie »Gelten«. Es liegt also hier eine Rückbezüglichkeit (*περιτροπή*) vor. Aber Lask fährt fort: »Das ist in keiner Hinsicht paradox. Im oberen Stockwerk sind Form wie Material beide unfinnlich, und es kann deshalb die Form dieser unfinnlichen Form der Form nicht anders lauten als die Form der untersten Form. Es ist in keiner Weise zirkelhaft, wenn die Kategorie des Geltens auf die Kategorie des Geltens wiederum angewandt und vom Gelten selbst behauptet wird, es sei ein kategorialer Geltungsgehalt, ein logisch Geltendes. Man ist hierbei lediglich gleichsam ein Stockwerk des theoretischen Sinnes höher gestiegen¹ und bemerkt dabei, daß es in diesem dritten Stockwerk keine neue Kategorie mehr gibt. Die Form der Form der Form kann ebenso wie die Form der Form nur »Gelten« heißen. Damit wird allerdings der regressus in infinitum zugestanden. Aber er besagt nichts anderes, als daß die Kategorie ins Unendliche Material der Kategorie zu werden vermag. Und es ist auch ganz in der Ordnung, daß die Kategorie des Geltens ins Unendliche in der Kategorie des Geltens steht, da ja die Form der Form ins Unendliche unfinnlich ist. Vom zweiten Stockwerk an gibt es eben in dieser Hinsicht

menologischen Analyse unterzogen worden (teilweise in Freiburger Vorlesungen mitgeteilt, vergl. jetzt die Abhandlung »Sein und Zeit«).

1) Was hier Lask »Stockwerk« nennt, entspricht genau dem von uns früher mit »Stufe« Bezeichneten.

nichts Neues mehr. Die Kluft zwischen Sinnlich und Unsinnlich liegt im untersten Stockwerk, zwischen Urmaterial und unterster Form. Das unterste und das obere Stockwerk zeigen uns die letzten Gegenfälligkeiten in der Rolle des Kategorienmaterials. Mit dem Material des zweiten Stockwerks ist die Kluft bereits überschritten. Die übrigen Stockwerke dürfen deshalb von der Kategorienlehre vernachlässigt werden. Ins Unendliche eine Logik der Logik zu fordern, ist allerdings überflüssig.“

Aus diesen Lask'schen Darlegungen geht hervor, daß im Falle von Form-Inhalt die Iteration zwar möglich, aber belanglos ist, schon die 4. Stufe »Form der Form der Form« bringt nichts Neues gegenüber der 3. Stufe »Form der Form«.

Wie verhält es sich damit bei der Reflexion? Analog wie bei Lask zwischen »Urmaterial« und »unterster Form« besteht ein grundlegender Unterschied (»eine Kluft«) zwischen dem naiven, unreflektierten, geraden Erleben und dem reflektierten. Geht man dann weiter, so ist das Reflektieren auf die Reflexion (1. Stufe) ebenfalls vom Typus des reflektierten Erlebens überhaupt. D. h. die Reflexionserlebnisse aller Stufen stehen gemeinsam in einem bestimmten Gegensatz zum ursprünglichen, naiven Erleben¹. Nach der Erkenntnis dieser Sachlage gibt es zwei Möglichkeiten, für die das Leben sich entscheiden kann. Entweder: Die Eitelkeit der iterierten Reflexion überhaupt wird erkannt: man bleibt bei der Reflexion erster Stufe stehen und sucht diese wirklich mit vollem Ernst zu vollziehen, dem Anblick des eigenen Selbst nicht auszuweichen. Man stellt sich gewissermaßen der Selbstprüfung. Oder: man scheut den Ernst des echten Vollzugs der Reflexion und flüchtet sich, diesem Vollzug immerfort ausweichend, in immer neue Iterationen. – Im ersten Fall kommt es offenbar überhaupt zu keiner höheren Stufenbildung. Im zweiten aber tritt nun folgende eigentümliche Wendung ein: Bei wiederholter Iteration wird die Einförmigkeit der konkreten, aufeinanderfolgenden Iterationsstufen erkannt. Diese führt zu dem Gedanken, die unbegrenzte Iterationsmöglichkeit ins Auge zu fassen, Zahlbegriffe einzuführen,

1) Das ist es ja auch, was die Umwendung von der unechten und unfruchtbaren »Parenthesen-Reflexion« zur eigentlichen und echten »existentiellen« Reflexion ermöglicht. In dieser Wesensgleichheit der Reflexionen aller Stufen zeigt sich eben die Leere der Iteration der Reflexion. Die Aufmerksamkeit, besser die Sorge oder die Bekümmernis muß sich der ursprünglichen »Kluft« zwischen geradem und reflektiertem Erleben zuwenden.

von der Iteration n^{ter} Stufe zu reden usw. Indem man aber dies tut, wird die Gefahr drohend, daß man »stecken bleibt«, zu einem festen Standort gelangt, daß die »Flucht vor der Faktizität« ein Ende hat. Der Fluchtimpuls treibt also weiter — »über das Unendliche hinaus«! Denn: Die Stufe der Reflexion auf die Möglichkeit der unbegrenzten Iteration der Reflexion ist die ω^{te} , die von dem Fluchtimpuls vor der Stilllegung auf jener eben genannten Stufe weitergetriebene Reflexion die $(\omega + 1)^{\text{te}}$.

So kommt man also tatsächlich in dem Beispiel der Parenthesen-Reflexion aus konkreten, »historischen« Lebensmotiven zu einer transfiniten Iteration der Reflexion.

Man kann gegen die soeben dargelegte ontologische Interpretation des transfiniten Prozesses einen Einwand erheben, der auf den ersten Blick viel für sich hat¹, der aber doch, wie wir meinen, widerlegt werden kann, wobei sich ein tieferer Einblick in die phänomenologische Struktur des transfiniten Progressus ergibt.

Betrachten wir den Vorgang der Iteration der Reflexion auf sich selbst genau, d. h. ganz konkret, so beobachten wir folgendes:

Ich reflektiere auf meine soeben vollzogene Reflexion, dann wiederum auf diese soeben vollzogene Reflexion zweiter Stufe usw. usw. Nachdem ich so eine bestimmte endliche Anzahl, sagen wir n , ineinandergeschachtelter Reflexionen vollzogen habe, erhebe ich mich — indem ich mit der Weiterverfolgung der sich immer öfter ineinanderlegenden Reflexionsakte aufhöre — auf eine Stufe der Betrachtung, die über allen diesen ins Endlose sich umschließenden Akten liegt. Auf dieser Stufe, der ω^{ten} , ist das Objekt (das Thema oder die Materie) meines aktuellen Reflexionsaktes, in dem ich jetzt lebe, die gesamte endlose Folge der früher vollzogenen Reflexionen. — Zähle ich nun die wirklich vollzogenen, soeben einzeln genannten Reflexionen ab, so habe ich erstens die n ersten nacheinander vollzogenen und jeweils auf den unmittelbar vorhergehenden Akt bezogenen Akte und dann zweitens als $(n + 1)^{\text{ten}}$ Akt die zuletzt genannte Reflexion von angeblich ω^{ter} Stufe. Ich habe also im ganzen keineswegs ω (oder \aleph_0), sondern nur $n + 1$ Reflexionen wirklich vollzogen. Das geht auch ganz klar aus der Bemerkung hervor, daß doch jeder Reflexionsakt eine gewisse Zeit braucht, also in endlicher Zeit auch nur endlich viele Akte nacheinander aktuell

1) Ich verdanke die Kenntnis dieses Einwandes Herrn Dr. Fritz Kaufmann.

vollzogen werden können. — Daraus kann man schließen, daß der letzten Reflexion die Stufen-Charakteristik ω zu Unrecht zugeschrieben wurde, es kommt ihr bloß der Index $n + 1$ zu. Das heißt: Die gesamte geschilderte Lebens- (oder Bewußtseins-) Struktur ist gar nicht transfinit, sondern nur finit: unsere ontologische Unterbauung des transfiniten Progressus erweist sich als eine Illusion.

Man kann diesen sehr ernst zu nehmenden Einwand nicht mit der billigen Bemerkung widerlegen, die Zeit gehöre nicht in die Phänomenologie, sondern in die Psychologie; hier handele es sich um überzeitliche, rein intentionale Strukturen u. dgl. Derartige Lehren halten wir für grundfalsch. In unserem Falle ist es wesentlich, daß die Reflexionen nacheinander vollzogen werden, denn sie beziehen sich jeweils auf das soeben vom Bewußtsein Geleistete. Es ist in der Tat richtig, daß nur endlich viele Reflexionen nacheinander in der endlichen Zeitspanne, in der unsere Betrachtung vollzogen oder verstanden (d. h. mitvollzogen) wird, wirklich »geschehen« können. Und die Zählung ergibt ja auch einwandfrei, daß es gerade $n + 1$ sind. Also ist es auch richtig, daß die ganze Betrachtung eine finite Struktur (vom Index $n + 1$) besitzt.

Sollte also der Einwand Recht behalten? Wir meinen nicht, trotz allem.

Denn es ist im Vorhergehenden eine wichtige Unterscheidung nicht beachtet worden: Man muß die Struktur der Betrachtung über die Ineinanderschachtelung der Intentionalitäten sorgfältig unterscheiden von der Struktur dieser Ineinanderschachtelung selber. Die erste Struktur ist von finiter, die zweite von transfiniter Komplikation. Nicht jede einzelne Intentionalität, die »vorhanden ist«, d. h. im Sinn des Phänomenzusammenhanges notwendig liegt, muß auch einzeln betrachtet werden. Sind unendlich viele Intentionalitäten in einem Phänomenzusammenhang »vorhanden«, — so können sie gar nicht einzeln betrachtet werden.

Dies erscheint vielleicht auf den ersten Blick erstaunlich, aber die gleiche Sachlage liegt bei jedem Horizontphänomen vor. Nach einer grundlegenden Erkenntnis Hufferls ist es gerade das Wesen des endlosen »offenen Horizontes«, des »und so weiter«, daß unendlich viele Glieder »vorliegen«, die aber mit einem Blick überschaut werden. Die Beherrschung des Unendlichen durch einen endlichen »Gedanken«, das ist der Sinn jedes »Horizonts«¹.

1) Mathematisch entspricht diesem Horizontphänomen nicht die Wahlfolge, sondern die gesetzmäßige Folge.

In unserem Falle ist nun in der Folge der zuerst betrachteten n Reflexionen ein Horizontphänomen zugleich mitgegeben. Wir hatten ja schon vorhin (S. 105) dargelegt, daß gerade das Bewußtsein des gleichförmigen weiteren Fortgangs das Motiv für das Unterlassen der Weiterverfolgung dieses Fortgangs ist. Sobald die Anwendbarkeit der Kategorie »Und so weiter« gesichert ist, ist eine Weiterverfolgung in concreto in der Tat überflüssig und langweilig. (Hegels »schlechtes Unendlich«.) Das heißt: Die in der »Betrachtung« $(n+1)^{\text{te}}$ Reflexion kommt nur zustande, insofern die Endlosigkeit der Kette der früher vollzogenen und der in Fortsetzung der ursprünglichen Vollzugstendenz weiter vollziehbaren Reflexionen eingesehen wird. Der Übergang von der in der »Betrachtung« n^{ten} Reflexion zur $(n+1)^{\text{ten}}$ ist ein feinem intentionalem Sinn nach *toto coelo* anderer Schritt als der Übergang von der entsprechenden $(n-1)^{\text{ten}}$ zur n^{ten} Reflexion. Die transfinite Komplikation der intentionalen Strukturen bleibt durchaus bestehen¹.

Aber trotzdem ist die Erwägung des Einwands nicht ohne Nutzen. Denn sie hat auf die neue, bisher nicht beachtete, phänomenologische »Schicht« (oder »Dimension«) der sogenannten »Betrachtung der Reflexion« aufmerksam gemacht. Diese neue Schicht hat die grundsätzliche Bedeutung, daß sie den finiten Mechanismus ans Licht zieht, der die transfiniten Strukturen in ihrer eigentümlichen Bewegtheit gewissermaßen steuert, der dem endlichen Menschengeist ihre Beherrschung ermöglicht². Das Gesetz, das den transfiniten Progreß regelt, ist seinem Inhalt nach finit, wie jeder Inhalt des Bewußtseins finit ist. Das ist gewissermaßen die Kehrseite der anderen von uns immer wieder hervorgehobenen Tatsache, daß

1) Auf eine ganz ähnliche Sachlage stießen wir bei dem Beispiel der ineinandergeschachtelten Bilder, das früher verwandt wurde (s. oben S. 98 ff.). Wir wiederholen nochmals den entscheidenden Punkt: Es ist natürlich unmöglich, unendlich viele ineinandergeschachtelten Bilder wirklich zu zeichnen. Aber der »Logik der Sache« nach müssen unendlich viele Bilder vorhanden sein. Wenn z. B. der kleine Junge auf dem Deckel des Bilderbuches ein genaues Bild eben dieses Bilderbuchs in der Hand halten soll, so muß sich diese Beziehung ihrem eigenen Sinn nach endlos fortpflanzen. Wir »sehen« da deutlich die unendliche Stufung der Bilder ihrer Idee nach, dem Sinne ihrer Intention entsprechend. Aber ebenso deutlich sehen wir – mit den Augen –, daß nur eine ganz kleine Zahl von Stufen, vielleicht 4 oder 5, wirklich körperlich vorliegt. Beides widerspricht sich keineswegs.

2) Man könnte diesen »Mechanismus« mit O. Hölder (Die mathematische Methode, Berlin 1924, §§ 116, 117) als »Überbauung« bezeichnen.

phänomenal das Unendliche immer ein offener Horizont, ein endloser Prozeß ist¹. (Vgl. Math. Anh. zu § 5, IV. [Über Brouwer.])

Nachdem der Einwand gegen unsere ontologische Interpretation des transfiniten Progresses nunmehr erledigt ist, wollen wir die Tragweite und die Fruchtbarkeit dieser Interpretation erörtern.

Zu diesem Zwecke stellen wir folgende beiden Fragen:

Führt die geschilderte Motivation nun wirklich zu allen Cantorschen Transfiniten? Und wie verhält es sich mit der paradoxen Ordnungszahl W ?

1. Um die erste dieser Fragen zu beantworten, liegt es nahe, auf die beiden »Erzeugungsprinzipien« Cantors hinzuweisen. Diese sind gegeben darin, daß

1. zu einer vorhandenen schon gebildeten Zahl eine Einheit hinzugefügt wird,
2. »wenn irgend eine bestimmte Sukzession definierter ganzer realer Zahlen vorliegt, von denen keine größte existiert, auf Grund dieses zweiten Erzeugungsprinzips eine neue Zahl geschaffen wird, welche als Grenze jener Zahlen gedacht, d. h. als die ihnen allen nächstgrößte Zahl definiert wird«².

Diese beiden Erzeugungsprinzipien sind nach Cantor derart, »daß durch ihre vereinigte Wirkung jede Schranke in der Begriffsbildung realer ganzer Zahlen durchbrochen werden kann.«³)

Man sieht nun leicht, daß diesen beiden Erzeugungsprinzipien bei dem Vorgang der Reflexion im Grunde derselbe Schritt der Zurückbiegung der Intention auf sich selbst (das ist ja eben re-flexio!) entspricht: einmal, beim Fortschreiten von der β^{ten} zur $(\beta+1)^{\text{ten}}$ Stufe, durch Reflexion auf das soeben vorhergegangene »geradeaus gerichtete« Erlebnis, das andere Mal, beim Fortschreiten von einer endlosen Reihe von ineinander geschachtelten Reflexionen zur Grenze dieser

1) Mathematisch drückt sich dieser eigentümliche Sachverhalt in der bei der Kritik der Ackermannschen Theorie besprochenen Tatsache aus, daß die Reihe der transfiniten Ordinalzahlen gewissermaßen in der Richtung nach rückwärts finit ist, d. h. man kann von jeder transfiniten Zahl rückwärts in endlich vielen Schritten zur Eins zurückgelangen, weil dabei eben alle Limesübergänge gewissermaßen »übersprungen« werden, während sie nach vorwärts durch den Grenzprozeß »überklettert« werden müssen. Diesen Umstand will Ackermann benutzen, um seine eigentlich transfiniten Betrachtungen als finit auszugeben. Aber finit daran ist nur die »Überbauung«, nicht die betrachtete Materie selbst. Vgl. Math. Anh. zu § 3, II.

2) G. Cantor, Math. Ann. XXI, S. 577. Weiteres über sich hier anschließende mathematischen Fragen s. § 5 a IV und Math. Anh. zu § 5, II u. VI.

3) l. c. S. 547.

Reihe, durch Reflexion auf den Vollzug der Erfassung der Gesetzmäßigkeit dieses endlosen Prozesses. Man kann also mit Recht sagen, daß das geschilderte konkrete und konkret motivierte Phänomen der »Reflexion« als phänomenologischer Unterbau beider Cantorscher Erzeugungsprinzipien dienen kann. (Vgl. Math. Anh. zu § 5, I).

Es ist vielleicht noch ein weiterer Schritt möglich: Versucht man sich in die Cantorschen Gedankengänge selbst (wie sie in der »Mannigfaltigkeitslehre« im XXI. Band der »Mathemat. Annalen« niedergelegt sind) hineinzudenken, so erkennt man, daß das, was man eigentlich vollzieht, eine Art »Reflexion auf das soeben Getane« ist — soweit wenigstens das zweite Erzeugungsprinzip in Frage kommt. Denn um zur »Grenze« überzugehen, muß man sich die Gesetzmäßigkeit des reihenbildenden Prozesses, der die Reihe konstituiert, deren Limes man sucht, vor Augen halten. Das ist aber nur möglich durch Reflexion. Ist diese Auffassung richtig, so ist die phänomenologische Analyse der Reflexion nichts anderes als ein analysierendes Bewußtmachen dessen, was in der mathematischen Limesbildung eigentlich schon latent vorhanden war.

II. Die zweite Frage war nach der Paradoxie der Menge W . In der Tat ist diese Frage für die gegenwärtige Betrachtung von entscheidender Bedeutung und keineswegs nur die spielerische Beschäftigung mit einem spitzfindigen Sophisma. Denn, wenn es wirklich gelungen ist, der Reihe der Cantorschen Transfiniten ein konkretes Phänomen unterzulegen, müssen Widersprüche innerhalb dieser Gegenständlichkeit unmöglich sein. Ein abstrakt durch bestimmte Annahmen postuliertes bzw. konstruiertes Gegenstandsgebiet kann an Widersprüchen leiden, ihm gegenüber hat daher der Nachweis seiner Widerspruchsfreiheit einen guten Sinn, — aber eine phänomenologisch aufweisbare Entität ist eo ipso widerspruchsfrei. Wenn sich also die Antinomie von Burali-Forti nicht aufklären und zum Verschwinden bringen ließe durch einfache konkrete Verfolgung der phänomenalen Gegebenheiten, so wäre das ein sehr triftiger Grund, die Richtigkeit der in Frage stehenden phänomenologischen Analyse anzuzweifeln.

Die beiden Cantorschen »Erzeugungsprinzipien« durchbrechen jede Schranke bei der Erzeugung der transfiniten Zahlen. Das 2. Prinzip scheint zur größten Ordnungszahl W (dem Ordnungstypus der Menge aller Ordnungszahlen) zwangsläufig zu führen. Hat man aber einmal W eingeführt, so ermöglicht das 1. Erzeugungsprinzip den Fortschritt zu $W+1$, womit die angeblich »größte« Ord-

nungszahl W überschritten ist. Dies ist, nochmals wiederholt, die Burali-Fortische Antinomie.

Geht man nun zurück auf die konkreten Phänomene der »Reflexion«, die den beiden abstrakt-formalen Erzeugungsprinzipien Cantors untergelegt wurden, so ist offenbar die entscheidende Frage: Welches konkrete Reflexions-Phänomen entspricht der Ordnungszahl W ? Es müßte dies diejenige Reflexion $R(W)$ sein, die auf alle möglichen Reflexionsstufen zurückblickt, sich auf sie »zurückbiegt«. — Gibt es eine solche Reflexion d. h.: Ist sie als ein konkretes Phänomen aufweisbar?

Es muß daran erinnert werden, daß jede Reflexion sich bezog auf den jeweils vollzogenen geraden Akt, das jeweils unmittelbar vorher vollzogene Erleben. Dieses Erleben konnte von zweierlei Art sein:

1) Entweder war es ein einfacher gerader Akt, ein einfaches schlicht vollzogenes Erlebnis. (Dem entspricht formal die Anwendung des ersten Erzeugungsprinzips, der Übergang von α zu $\alpha + 1$).

2) Oder: es war die Erfassung einer bestimmten gesetzmäßigen Reihe möglicher Einschachtelungen von Erlebnissen (nicht unmittelbar einander umschließender Einschachtelungen, sondern einander irgendwie, in irgendwelchen »Abständen«, durch irgendwelche Vermittlungen einschließender Einschachtelungen.) Diese offene, in ihrem möglichen »Werden« erfaßte Reihe wurde durch die Reflexion zu einem Gesamterlebnis zusammengefaßt. (Dem entspricht formal die Anwendung des zweiten Erzeugungsprinzips, der Übergang von der Reihe $\alpha_\beta \dots \alpha_\gamma \dots \alpha_\delta \dots$ zu ihrem Limes.)

Auch im zweiten Fall bezieht sich aber die Reflexion auf ein ins Auge gefaßtes bestimmtes Reihengesetz,¹ für das keine obere Schranke existiert: in dem Sinn, daß keine ins Auge gefaßte Reihenentwicklung die letzte ist, daß die fortgesetzte und stets fortsetzbare Reflexion immer auf neue weiter reichende Reihengesetze führt. (Dies äußert sich in der Cantorschen Symbolik in dem Auftreten immer neuer Verknüpfungssymbole und der Einführung immer neuer Buchstaben wie $\omega, \varepsilon, \Omega \dots$ usw. usw.)

Aber niemals kann die Reflexion sich auf alle in dieser Weise »möglichen« Reihengesetze überhaupt beziehen. Diese fügen sich nicht zu einem »Gesamt-Reihengesetz« zusammen. Oder vielmehr: genauer ausgedrückt verhält sich die Sache so: die nacheinander

1) »Reihengesetz« bedeutet hier und im folgenden nicht ohne weiteres daselbe wie »Funktionsgesetz«. S. Math. Anb. zu § 5, II (Bem. zu Hilbert).

eingeführten Reihengesetze verhalten sich wie Anfangsstück und Fortsetzung, die früher eingeführten Gesetze sind in allen nachfolgenden aufgehoben, d. h. bewahrt (Hegel), sie bilden das Gesetz des Anfangsstücks der nach dem höheren Gesetz gebildeten Zahlenreihe. So fügen sich allerdings alle nacheinander zu Tage tretenden Gesetze zu einem einzigen zusammen, aber dieses ist niemals in seiner Vollendung gegeben, sondern immer im Werden begriffen (*δυνάμει ὄν*).

Das ist nun freilich auch bei den einzelnen konkreten Gesetzen der Fall, aber es besteht folgender entscheidende Unterschied: das jeweils neu eingeführte Reihengesetz, das durch eine neu eingeführte transfinite Zahl bezeichnet wird, ist seinem Charakter nach eben durch diese Bezeichnung eindeutig gekennzeichnet (wobei natürlich diese Bezeichnung jeweils die Beziehung zu schon früher eingeführten Zahlen eindeutig festlegen muß). Der Fortschritt zu immer neuen, erweiterten Reihengesetzen ist nur möglich durch die Einführung immer neuer Symbole und immer neuer (rekurrent definierter) Verknüfungsprinzipien zwischen ihnen. Um einen solchen Fortschritt zu erzielen, ist es also notwendig, gewissermaßen immer neue Mannigfaltigkeitsformen einzuführen. (Wie das sehr deutlich aus Veblens und Mahlos Arbeiten¹ über die Fortsetzung der Reihe der Transfiniten hervorgeht. Solche Arbeiten wären ja gar nicht sinnvoll, wenn ein mechanisch zu errechnendes Gesetz für alle möglichen derartigen Bezeichnungen existierte².) Es gelingt also prinzipiell nicht, ein Universal-Gesetz aufzufinden, das die gesamte Reihe der transfiniten Zahlen, wie sie durch die beiden »Erzeugungsprinzipien« zustande kommt, beherrscht. In der Terminologie der Intuitionisten ausgedrückt: Die Folge der sukzessive einzuführenden formalen Reihengesetze ist eine werdende Folge, deren »Zukunft« nicht voraussehbar ist.

In Anbetracht dieses Tatbestandes hat es keinen Sinn, von der Möglichkeit einer konkreten phänomenalen Unterbauung der Zahl W zu reden.

Dieser Zahl W entspricht nur der gänzlich unbestimmte »freie« Horizont des von den beiden Er-

1) Trans. Am. Math. Soc. 9; Lpz. Ber. (math. Kl.) 63, 64, 65. (Zu Veblen vgl. Math. Anhang zu § 5, VI B.)

2) Es liegt also auch hier wieder der schon früher (in § 4 a) besprochene Fall vor, daß die Mathematik die Kunst ist, frei werdende Folgen gesetzlich zu beherrschen oder das Unendliche mit endlichen Mitteln auszudenken.

zeugungsprinzipien ins Endlose weitergetriebenen transfiniten Prozesses.

Man errät, daß die philosophisch (d. h. ontologisch) letzte Bedeutung dieses so zur Gegebenheit gebrachten transfiniten Prozesses darin bestehen wird, daß in ihm das Phänomen des Endlosen, des Vorstoßes in die unbekannte Zukunft zu seiner zugespitztesten begrifflichen Gestalt kommt, — daß in ihm das formal-anzeigende Schema des wahrhaft Unendlichen in Erscheinung tritt, das niemals — wie Hegel so oft eindringlich auseinandergesetzt hat — mit der durch die gewöhnliche Zahlenreihe schematisierten »schlechten Unendlichkeit« verwechselt werden darf. (Dies wird erst später näher untersucht werden.)

Es ist offenbar widersinnig, diesen so verstandenen »freien« transfiniten Prozeß »fortsetzen« zu wollen. Die Stufe der Reflexion über diesen Prozeß, die man mit dem Index W zu bezeichnen versucht ist, steht nicht auf der gleichen Linie mit irgend einer anderen Reflexionsstufe. Der W -Prozeß kann nicht vollzogen werden, wie sonst ein α -Prozeß oder β -Prozeß.

Es ist daher fehlerhaft, diese Stufe durch einen Index W in Analogie mit dem Index α oder β zu bezeichnen. Wenn man dies doch tun wollte, so wäre es unvermeidlich, auch über diese Reflexion, über ihre Möglichkeit usw. zu reflektieren und man käme unweigerlich zu einer »supra-transfiniten« (ultrafiniten) Reflexionsstufe mit dem Index $W+1$. Aber damit hätte man eben den W -Prozeß zu einem endlich charakterisierten α - oder β -Prozeß umgebogen, seinen »freien« Grundcharakter zu einem gesetzmäßigen denaturiert — d. h. den Grund Sinn des durch W symbolisierten Phänomens mißverstanden.

Bezieht man diese Betrachtung auf die konkrete Lebens-Bedeutbarkeit der »Parenthesen-Reflexion« zurück, so erscheint das W als Symbol der vollendeten, radikalen »Bodenlosigkeit«¹ des so in »Parenthesen« reflektierenden Lebens. Das eigentümliche Gefühl des Schwindels, das den einsichtigen Betrachter hier ergreift, dessen Ausdruck in gewissem Sinne die Antinomie von Burali-Forti ist, ist echt, es beweist die Unmöglichkeit, daß das Leben wahrhaft vor sich selbst entfliehen kann, — daß es auf dem Wege der iterierten Reflexion jemals zur Ruhe kommt.

1) Der Begriff der Bodenlosigkeit ist vom Grafen Paul Yorck in die Philosophie eingeführt worden; vgl. den Briefwechsel Dilthey-Yorck (Halle, Niemeyer, 1923) und die demnächst in diesem Jahrbuch erscheinende Arbeit von F. Kaufmann: »Die Philosophie des Grafen Yorck«.

Anmerkung.

Es ist von historischem Interesse, auf zwei Äußerungen Schellings aus seiner ersten Periode aufmerksam zu machen, die mit bewunderungswürdigem Scharfſinn den Grundgedanken der transfiniten Iteration der Reflexion auf ſich ſelbſt und zugleich damit die weſenhaft hier auftretende Antinomie, die wir heute mit dem Namen Burali-Fortis bezeichnen, vorausahnen.

1. Ideen zu einer Philoſophie der Natur, Einleitung zur 1. Auflage (1797) [Gef. Werke, Abt. 1, Bd. II, S. 16]: »Indem ich frage: wie kommt es, daß ich vorſtelle, erhebe ich mich ſelbſt über die Vorſtellung; ich werde durch dieſe Frage ſelbſt zu einem Weſen, das in Anſehung alles Vorſtellens ſich urſprünglich frei fühlt, das die Vorſtellung ſelbſt und den ganzen Zuſammenhang ſeiner Vorſtellungen unter ſich erblickt. Durch dieſe ganze Frage ſelbſt werde ich ein Weſen, das, unabhängig von äußeren Dingen, ein Sein in ſich ſelbſt hat.«

2. Briefe über Dogmatismus und Kritizismus, [Werke, Abt. 1, Bd. I, S. 320, Anm. 1; S. 60 der Originalausgabe]: »Daß wir unſers eigenen Ichs nie los werden können, davon liegt der einzige Grund in der abſoluten Freiheit unſers Weſens, kraft welcher das Ich in uns kein Ding, keine Sache ſein kann, die einer objektiven Beſtimmung fähig iſt. Daher kommt es, daß unſer Ich niemals in einer Reihe von Vorſtellungen als Mittelglied begriffen ſein kann, ſondern jedesmal vor jede Reihe (!) wiederum als erſtes Glied tritt, das die ganze Reihe von Vorſtellungen feſthält: daß das handelnde Ich, obgleich in jedem einzelnen Falle beſtimmt, doch zugleich nicht beſtimmt iſt, weil es nämlich jeder objektiven Beſtimmung entflieht, und nur durch ſich ſelbſt beſtimmt ſein kann, alſo zugleich das beſtimmte und das beſtimmende iſt«. (Die ganze Sätze betreffenden Sperrungen ſind von mir, einzelne gesperrte Wörter ſtehen ſchon ſo im Original.)

Dieſe Stellen, von denen die zweite, zeitlich frühere (1795) die klarere iſt, zeigen, daß Schelling die Idee einer transfiniten Iteration der reflexiven Intentionalität bereits lange vor G. Cantor klar vor ſich ſah, natürlich ohne ſie mathematiſch zu erfaffen. Denn, wenn das Ich »jedesmal vor jede Reihe wiederum als erſtes Glied tritt« bedeutet das (in ſpiegelbildlicher Verkehrung gewiffermaßen, ſodaß alſo die Inverſen wohlgeordneter Typen ${}^*\omega$, $1+{}^*\omega$

ufw. erzeugt werden) offenbar nichts anderes, als den Fortschritt von dem einer Transfiniten vorausliegenden Abschnitt zu dieser selbst, ein Fortschrittsprinzip, welches die beiden C a n t o r'schen Erzeugungsprinzipien in eins zusammenfaßt¹.

Befonders interessant ist aber der im letzten Satz liegende Hinweis auf die Burali-Forti'sche Antinomie: das Ich ist zwar »in jedem einzelnen Falle bestimmt«, nämlich als unmittelbar »vor« der ganzen jeweiligen Reihe seiner Vorstellungen unsichtbar (nach H u f f e r l s Ausdruck »anonym«) stehend. D. h. jede Transfinite folgt ihrem Abschnitt oder jedem Abschnitt folgt unmittelbar eine eindeutig bestimmte Transfinite. Trotzdem ist es doch – vom einzelnen Falle abgesehen – nicht ein für alle Mal »objektiv« bestimmbar, es entflieht ständig, d. h. zu jeder Reihe von Ordnungszahlen gibt es eine größere, die Reihe aller Ordnungszahlen kann nicht als Objekt festgelegt werden. Vielmehr ist das Ich letztlich »zugleich das bestimmte und bestimmende«, d. h. wollte man dem Ich absolut genommen, die maximale Ordnungszahl W entsprechen lassen, die allen übrigen Ordnungszahlen nachfolgt, es also rein »bestimmend« sein lassen, so ergäbe sich sofort, daß es eben durch diese Gedankenwendung auch schon zum Gegenstand der Betrachtung gemacht, also »bestimmt« wäre, sodaß das »anonyme«, es bestimmende Ich bereits wieder »vor« es getreten wäre – entsprechend dem Fortschritt von W zu $W + 1$.

Die Antinomie von Burali-Forti löst sich also ontologisch dahin, daß ihre latente Voraussetzung, es ließen sich alle Ordnungszahlen überhaupt zu einem Abschnitt zusammenfassen, irrtümlich ist; es läßt sich nur jede beliebige Ordnungszahl zusammen mit sämtlichen ihr vorhergehenden in einem Abschnitt zusammennehmen. Die Transfiniten zählen eben nicht Reihen von D i n g e n (»Objekten«, »Sachen«) ab, sondern Reihen reflektiver Ichakte und es ist ontologisch durchaus nicht paradox, sondern geradezu evident, daß die Gesamtheit derartiger Ichakte nicht einen bestimmten starren Umfang hat. Denn die Annahme einer »umfangsdefiniten Mannigfaltigkeit« von Ich-Reflexionen würde die »Freiheit« des Ich aufheben.

Die Betrachtung S c h e l l i n g s geht natürlich auf K a n t's Begriff der transzendentalen Apperzeption zurück (»Das »Ich denke« muß alle meine Vorstellungen begleiten können«), aber das eigentüm-

1) Vgl. dazu v. N e u m a n n, auf dessen Arbeit im Math. Anhang, zu § 5, Nr. I näher hingewiesen ist.

liche Prinzip der Überschreitung jeder (auch unendlichen) Vorstellungsreihe findet sich nur bei Schelling.

Das Vorstehende zeigt, daß der Grundgedanke des transfiniten Prozesses in den Grundanschauungen des deutschen Idealismus tief verwurzelt ist. (Es gibt allerdings schon in der antiken Philosophie eine Iteration des Seinsbegriffs [am frühesten wohl bei Plato, Parmenides 142 B – 143 B], die zu einer transfiniten Wiederholung ausgestaltet werden könnte.)

III. Die mathematischen Theorien über die Menge W .

Nach dieser Abschweifung ins eigentlich philosophische Gebiet kehren wir jetzt zu den mathematischen Theorien zurück. Es ist nämlich offenbar von Wichtigkeit, die soeben gegebene »Erklärung« des Paradoxes der Zahl W mit den in der mathematischen Wissenschaft hervorgetretenen »Auflösungen« dieser Antinomie in Beziehung zu setzen.

Da ist nun zunächst eine Äußerung anzuführen, die schon vor den eigentlichen »Lösungs«-Theorien« der mengen-theoretischen Antinomien getan wurde: Heffenberg (Grundbegriffe der Mengenlehre § 99) sagt nämlich: »Das Paradoxon der Menge W erinnert an diejenigen Antinomien, die nach Kant entstehen, wenn wir die Natur als abgeschlossenes Ganze betrachten. Nach Fries entspringt ferner die Unendlichkeit des Raumes, der Zeit und der Zahlen auch daraus, daß sie als formale Bedingungen der Erfahrung deren unvollendeten Charakter widerspiegeln müssen Die Menge aller Dinge ist kein abgeschlossenes Ganze, weil unsere Erkenntnis jederzeit unabgeschlossen ist, und die Menge W ist als formales »Gerippe« des unvollendbaren Prozesses der Bildung wohlgeordneter Mengen selbst unvollendbar«¹. Heffenberg hat mit dem scharfen Blick des an Kant geschulten Forschers das Wesentliche bereits gesehen, wenn er auch nicht den Mut hatte, daraus die notwendigen Konsequenzen zu ziehen, vielmehr ausdrücklich ablehnt den eben angeführten Gedanken für eine »Lösung« des Paradoxes zu erklären.

Auch alle späteren »Lösungen« der Antinomie von Burali-Forti haben das Gemeinsame, daß sie die rechtmäßige Existenz der Menge W leugnen. Zum Teil wird das erreicht durch eine axiomatische Begründung der Mengenlehre, bei der gleich bei der impliziten Definition des Mengenbegriffes durch die Axiome

1) l. c. S. 147/48 (633/34).

dafür gefordert wird, daß W keine zulässige Menge darstellt (Z e r m e l o, F r a e n k e l, v. N e u m a n n). Zum andern Teil stützt man sich auf eine Theorie der logischen Typen (B. R u s s e l l und in etwas abweichender Weise auch J. K ö n i g). Diese zweite Art der »Lösung« (denn die erste ist ja nichts als eine Vermeidung des gefährlichen Gebiets überhaupt) hat viel Ähnlichkeit mit den im vorigen ausführlich betrachteten Ineinanderschachtelungen von Aussagen, mit den Stufencharakteristiken usw. In der Tat ist der Begriff der »Stufe« im wesentlichen derselbe wie der des »logischen Typus« im Sinne Russells. (Husserl bezieht sich nicht auf Russell, da er von ganz anderen, viel allgemeineren Motiven her, nämlich phänomenologischen, auf die »Stufencharakteristik« geführt wurde).

Russells und Königs (frühere) Theorien unterscheiden sich dadurch, daß der erstere nur endliche Ordnungszahlen (Indizes) der Typen zuläßt, der zweite auch transfinite (wie wir oben auch).

Die Formulierung Russells ist so eigenartig, daß sie angeführt zu werden verdient¹. Der Hauptpunkt ist, daß es zwar »dieselbe Behauptung« in allen Typen (auf allen Stufen) geben kann, aber daß keine Möglichkeit besteht, diese Tatsache in Form einer Behauptung auszudrücken. So werden z. B. die logischen Grundaxiome(!) der Reihe nach, je nach Bedarf, in immer höhere »Typen« eingeführt: »Wir können von jedem neuen Funktionstypus (= Satzstufe) handeln, ohne die Tatsache in Rücksicht zu ziehen, daß es spätere (höhere) Typen gibt. Durch die symbolische Analogie »sehen« wir, daß der Prozeß unbegrenzt oft wiederholt werden kann«. — »Wenn wir in irgend einem Stadium von einer Klasse zu handeln wünschen, die definiert ist durch eine Funktion vom 30000sten Typus, so werden wir unsere Schlußweisen und Annahmen 30000 Mal zu wiederholen haben. Aber es besteht immer noch keine Notwendigkeit, von der Hierarchie (der Typen) als von einem Ganzen zu sprechen, oder vorauszusetzen, daß Aussagen gemacht werden können über 'alle Typen'«.

Befonders merkwürdig ist die (an verschiedenen anderen Stellen sich wiederholende) Ausdrucksweise: »wir sehen«, wo doch dieses »Sehen« nicht legitim ausgedrückt werden kann. Russell zeigt zwar, daß man bei konkreten Beweisen immer schrittweise vorgehen kann und also die Aussagen über jenen »gesehenen« Sachverhalt nicht

1) B. Russell und A. N. Whitehead, Principia Mathematica, Vol. II, p. XI, XII, XIII, XV; das Zitat steht auf p. XI (von mir übersezt).

braucht, — aber wenn auch der mathematische Logiker auf diese Weise die »gefährliche« Zone vermeiden kann, so bleibt das in ihr liegende Problem doch bestehen und ihm kann von dem tiefer Forschenden nicht ausgewichen werden.

Die Lösung von Burali-Fortis Antinomie wird von Russell folgendermaßen ausgedrückt¹: » eine Reihe ist eine Relation und eine Ordinalzahl ist eine Klasse von Reihen Daher ist eine Reihe von Ordnungszahlen eine Relation zwischen Klassen von Relationen und ist vom höherem Typus als irgend eine der Reihen, welche Glieder der fraglichen Ordnungszahl sind (die ja eine Klasse ist). B.-F.s »Ordnungszahlen aller Ordnungszahlen« muß die Ordnungszahl aller Ordnungszahlen eines bestimmten Typus sein, und muß daher von höherem Typus sein, als irgend eine dieser Ordnungszahlen und es liegt kein Widerspruch darin, daß sie größer als jede beliebige von ihnen ist.« Obwohl unsere Stufenbildung auf einem anderen Prinzip als die Russells beruht, so ist doch diese Formulierung ganz analog der unfrigen: auch bei uns konnte der Ordnungszahl W kein Stufenindex zugeordnet werden. —

In seinem letzten Werk »Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre«² (das eigentlich den Titel »Synthetische Logik« tragen sollte!) hat J. König eine abweichende Lösung derselben Antinomie gegeben (S. 254 ff.) Besonders wichtig ist Anmerkung 3 zu S. 254, wo es heißt: »Wenn wir »die Menge der Ordnungszahlen« W genau betrachten, sehen wir, daß die Erlebnisse, die dem die Menge W definierenden Denkbereich (W) angehören, durchweg Mengen- und Ordnungsrelationen sind In diesen Erlebnissen findet sich aber keine Spur der Tatsache, daß die Menge alle Ordnungszahlen als Elemente enthält. Erst wenn wir diesen Denkbereich selbst objektivieren, als Ding betrachten, dessen Eigenschaften in einem höheren Denkbereich beschrieben werden, kann diese Tatsache in Evidenz treten³. In diesem Sinne ist die Eigenschaft der Menge, alle Ordnungszahlen zu enthalten, kein Erlebnis, das dem Denkbereich (W) angehört, sondern eine Anschauung, die an dem »fertigen« Denkbereich erlangt wird. . . Allerdings können wir diese Tatsache selbst mit anderen für jene Anschauung notwendigen zusammen axiomatisieren, gelangen

1) Principia mathematica, Vol. I, p. 66.

2) Leipzig 1914.

3) Von mir gesperrt!

aber dadurch zu einem höheren Denkbereich $(W)'$, der von (W) wesentlich verschieden ist. . . . Die Verwechslung der Denkbereiche (W) und $(W)'$, die offenbar nicht gestattet ist, führt zur sogenannten Antinomie der W -Menge. Es soll sogleich näher auseinandergelegt werden, wie das »Anhängen eines Elementes« an W als Erweiterung des Denkbereiches (W) ausgeführt wird und nachträglich dieses »Anhängen« als Erweiterung des Denkbereichs $(W)'$ aufgefaßt wird. In dem einen Falle ist diese Erweiterung ausführbar, in dem andern unmöglich. Die Verwechslung, eine quaternio terminorum, ergibt die Antinomie«

Diese Ausführungen stimmen mit unseren entsprechenden durchaus überein; die Wendung »Objektivierung des Denkbereichs« ist genau das, was in unserer Darlegung das konkrete Erfassen der gesetzmäßigen Reihenbildung ist. — Im Einzelnen sind die Stufenbildungen bei uns anders (verwickelter, mit transfinitem Index), aber das Wesentliche ist doch die Auffassung, daß der »transfinite Prozeß im ganzen« gar nicht verglichen werden kann mit seinen konkreten Teilprozessen (daß der Denkbereich $(W)'$ von (W) gänzlich verschieden ist).

Die Ausführungen Ruffells und Königs bestätigen also nur die im vorigen dargelegte Interpretation des transfiniten Prozesses.

Im ganzen kann man sagen, daß die Betrachtung der iterierten Reflexion imstande ist, sogar die am weitesten vorgetriebene Bezeichnung der transfiniten Zahlen zu erfassen, also die Theorie der transfiniten Zahlen weit über das von Ruffell z. B. zugelassene Maß hinaus sichert. Dieses Ergebnis ist in Anbetracht des »intuitionistischen« Ausgangspunktes sehr merkwürdig und unerwartet. Es hat seinen Grund darin, daß der Gedanke neu ist, die Verwirklichung der »großen« Mengen nicht in irgendwelchen objektiven »Gegenständen« von bestimmter Bauart, mit parataktisch geordneten »Elementen« zu suchen, sondern in der Komplikation der Struktur des Bewußtseins selbst, am konkretesten in der Iteration der Reflexion auf sich selbst. Diese Gedankenwendung enthält aber ein ferneres Problem, zu dessen Behandlung wir nunmehr übergehen.

IV. Die transfinite Komplikation des Bewußtseins und die Mengenlehre.

A. Die transfinite Progression und der überlieferte Mengenbegriff.

Die ontologische Unterbauung des transfiniten Progressus, wie sie in Abschnitt II vermittle der Analysen der sogenannten Bewußt-

feinststufen gelungen war, ist in philosophischer Hinsicht sicherlich von einer erheblichen Tragweite. Insbesondere war ja die letzte analysierte Bewußtseinsstruktur, die iterierte Reflexion auf sich selbst, nicht nur eine in der relativ abstrakten Weise der isolierten Deskription erfaßbares Phänomen, sondern war einer hermeneutischen Explikation, einer Auslegung auf den Sinn des konkret lebendigen Daseins, des Lebens (nicht des reinen abstrakten Bewußtseins) fähig und zu ihrem tieferen Verständnis auch bedürftig. Die transfinite Komplikation der Struktur der Reflexion erwies sich als ein besonders zugespitzter Ausdruck der radikalen Bodenlosigkeit des umweltlichen alltäglichen Daseins. Damit ist es gelungen den Cantorschen transfiniten Progreß im eigentlichsten Sinn ontologisch zu interpretieren, ihm eine ganz genau bestimmte Bedeutung für den Sinn der Faktizität selbst zu geben.

Es bleibt indessen bei aller dieser gewonnenen Aufhellung der Natur des transfiniten Progreßes doch noch die Frage nach seiner mathematischen Tragweite und Bedeutung ungelöst. Insbesondere erhebt sich das Problem: Ist mit der erwähnten ontologischen Interpretation des transfiniten Progreßes (d. h. des Prozesses, der von einer transfiniten Zahl, streng als Ordnungszahl genommen, nämlich als Indexbezeichnung der Stufencharakteristik gewisser Bewußtseinskomplikationen, zur anderen führt) schon die mathematische Existenz der entsprechenden wohlgeordneten transfiniten Mengen bewiesen? Ist also der Teil der Cantorschen Mengenlehre, der von den wohlgeordneten Mengen handelt, gesichert und kann man von dieser Basis aus vielleicht zu einem intuitiven Begreifen auch weiterer Cantorscher transfiniter Mengen vorzudringen versuchen?

Hier muß nun davor gewarnt werden, in den in Abschnitt II gegebenen Darlegungen bereits eine intuitive Sicherstellung der Existenz der wohlgeordneten Mengen zu sehen.

Denn, von anderen noch zu erwähnenden Schwierigkeiten abgesehen, involviert der Begriff der Cantorschen Mengen eine Nebenordnung (Parataxe) sämtlicher formal gleichberechtigter Mengenelemente. Die Mengenelemente sind zunächst einmal da, dann erst werden sie »wohlgeordnet«; »dieselben« Elemente können auch anders geordnet werden; umgekehrt kann (vielleicht) eine beliebige Menge wohlgeordnet werden.

Dagegen ist es offenbar sinnlos, die Komplikationsstufen eben der iterierten Reflexion, deren Stufencharakteristiken (Indizes) transfinite Zahlen sind, anders anordnen zu wollen, oder sie

sich erst ungeordnet vorhanden zu denken, um sie dann erst »wohlzuordnen«. Sofern also das ontologische Fundament der transfiniten Zahlen (nach der Betrachtung des Abschnitt II) lediglich darin liegt, daß sie als Stufencharakteristiken der Reflexionsstufen fungieren können, ist eine Freiheit der Anordnung der Elemente der »Menge« jener Stufen durchaus nicht gewährleistet. Oder, anders ausgedrückt: Sofern man in dem Begriff der Menge die Möglichkeit der verschiedenartigen Anordnung der Mengenelemente gleich mit aufnimmt, bilden die »sämtlichen« Stufen (bzw. ihre Indizes) gar keine Menge. Von allen Stufen im Sinne einer Menge zu reden ist sinnlos. Aber nicht nur das: es ist auch schon unmöglich, von einer transfiniten Teilmenge von »einigen« Stufen zu reden, sofern man sich diese Stufen irgendwie abstrakt und ungeordnet nebeneinandergelegt denkt, gewissermaßen in einem homogenen Medium ausgebreitet.

Dazu kommt noch ein zweites: Auch als von Haufe aus geordnete Mengen kann man die transfiniten Indizes nicht ohne weiteres fassen. Zwar kann man wohl unterscheiden zwischen konkreten Fällen transfiniter Komplikation (etwa zwischen der iterierten Bildintention oder der iterierten Reflexion auf sich selbst) und dem diesen Fällen gemeinsamen, von ihnen abstrahierten Ordnungstypus der Folge der transfiniten Indizes; aber die eben genannten konkreten Fälle stellen doch keineswegs aktual-unendliche wohlgeordnete Mengen dar, sondern potentiell-unendliche Prozesse. Man kommt zwar mit der Annahme aktueller wohlgeordneter Mengen nicht auf einen Widerspruch, aber eine positiven, kategoriale Aufschauung ist nicht mehr möglich. Die ontologische Fundierung des transfiniten Progressus qua pro-gressus (genauer als das (verbale) progredi, procedere selbst) ist nicht übertragbar auf die entsprechenden transfiniten, wohlgeordneten Mengen. Der Progressus »existiert« im ontologischen Sinn, die wohlgeordnete Menge nicht. (Jedenfalls existiert sie nicht auf Grund des Progressus). Wenn man also alle Sätze über transfinite wohlgeordnete Mengen als solche über pure transfinite Ordnungszahlen (denen gar nichts »Mengenhaftes« anhaftet und die auch nicht selbst zu »Mengen« zusammengefaßt werden können) deutet, dann kann man von einer ontologischen Fundierung der Lehre von den transfiniten Zahlen reden. Aber keineswegs ist das berechtigt, wenn man – wie gerade in den neueren Darstellungen der »Mengenlehre« allgemein üblich ist – die Theorie der wohlgeordneten Mengen zur Grundlage der Lehre von den transfiniten Zahlen macht.

Wir kommen also gerade zur alten Cantorschen Idee der »Fortsetzbarkeit der Zahlenreihe über das Unendliche hinaus« zurück, eine Idee, in der der dynamische Prozeß-Charakter im Vordergrund steht¹. Es ist also gerade diejenige (ältere) Betrachtung, der man heute im allgemeinen nur mehr einen heuristischen Wert beimißt, die sich vom philosophisch-ontologischen Gesichtspunkt aus als die fundamentale und die Existenz begründende erweist. Dagegen entbehren die axiomatisch-formalen Betrachtungsweisen durchaus des ontologisch faßbaren Hintergrundes. Es ist dies ein Beispiel von vielen für die (i. a. unbewußte) Abwendung der modernen Mathematik von ihrer philosophisch-ontologischen Basis. (Vgl. dazu § 6a).

[Es ist wichtig, sich darüber klar zu werden, ob von dieser Einschränkung der Tragweite unserer ontologischen Begründung des Transfiniten die Anwendung der transfiniten Induktion getroffen wird, die der Metamathematik W. Ackermanns zugrunde liegt. (Vergl. Math. Ann. z. § 3, II.) Man sieht leicht, daß das nicht der Fall ist. Die Anwendung, die Ackermann vom Transfiniten macht, benützt nur den transfiniten Prozeß als solchen, nicht die statische, simultane Menge der Komplikationsstufen. D. h.: Es ist notwendig und hinreichend für die Ackermannsche Theorie, die Reihe der transfiniten Zahlen als ein bestimmtes Gesetz des Fortschreitens aufzufassen, durch das die immer komplizierteren transfiniten Formeln eine nach der anderen formal konstruiert werden können (was aber natürlich noch nicht besagt, daß auch die in jenen Formeln gemeinten mathematischen Gegenständlichkeiten oder Pseudo-gegenständlichkeiten konstruiert werden können²).]

Die so gewonnene Aufklärung über das Transfinite Cantors macht auch verständlich, daß die ontologische Fundierung aller überhaupt irgendwie bezeichnbaren transfiniten Zahlen gelingt, d. h.

1) Man erinnere sich der Darlegungen in Abschnitt I; besonders der Diskussion Cantors mit dem Kardinal Franzelin, wobei besonders der Kardinal das *δυνάμει* *ὄν* der ganzen Reihe der Transfiniten mit großem Scharfsinn schon damals betont hat.

2) Eine weitere merkwürdige Bestätigung des Gefagten bildet der letzte Hilbertsche Aufsatz »Über das Unendliche« (Math. Ann. 95, S. 161 ff.), der mir zur Zeit der Niederschrift des Textes noch unbekannt war. — In diesem Aufsatz wird (zum Zwecke der Lösung des Kontinuumproblems) der transfiniten Prozeß als formales Abbild der möglichen Komplikationsstufen der Funktionen einer Zahlenvariablen (d. h. der Zahlfolgen) aufgefaßt. (Näheres darüber in § 5 b). Es wird also das Transfinite de facto »inhaltlich« und ganz in unserem Sinne gebraucht: als Index, nicht als Ordnungstypus einer aktuell unendlichen Menge.

soweit die Kraft der Erzeugungsgefeße reicht; andererseits aber die intuitive Erfassung schon viel weniger »reicher« (»großer« im populären Sinn) Mengen mißlingt. Die Stufenreihe, die die Mengen nach ihrer »Größe« (also etwa ihrer Mächtigkeit und der Komplikation ihres Ordnungstypus) und nach der Möglichkeit ihres Existenzbeweises auf Grund bestimmter Existenzialaxiome in der traditionellen Mengenlehre bilden¹, ist nicht die maßgebende im Sinne unserer Ontologie. Die formalistische Mathematik ist hier nicht einfach das weitere »Gebiet B«, das das engere intuitiv erfaßbare »Gebiet A« umschließt. Vielmehr bleibt die Merkwürdigkeit (die aber nunmehr wohl nicht mehr paradox erscheinen dürfte) bestehen, daß von der intuitiven Grundposition aus ein Vorstoß in Gebiete vorgetrieben werden kann, die von den üblichen formalen Existenzialaxiomen aus nicht erreicht werden könnten. Eine Paradoxie liegt aber deshalb nicht vor, weil das durch jenen »intuitionistischen« Vorstoß Erreichte nicht eine Theorie der betreffenden »riesigen« transfiniten Mengen ist, sondern nur gewisser rein ordinaler Indizes, die einer eigentlich mengentheoretischen Auffassung nicht ohne weiteres zugänglich sind. Der vorliegende Tatbestand macht auch andererseits den Gang der geschichtlichen Entwicklung verständlich, im Verlauf welcher ja die Auffassung der transfiniten Zahlen als rein ordinaler Indizes zuerst auftrat, als Erweiterung einer Beobachtung von nur durch solche Indizes charakterisierbaren Strukturen an abstrakten Mengen und der Reihe ihrer »Ableitungen«². Alle derartigen »mengentheoretischen« Beispiele gaben aber immer nur den ersten Anfang der Reihe der Transfiniten, gingen jedenfalls nie über die »zweite Zahlenklasse« hinaus.

Als nach diesem Vorstadium dann (in der klassischen Abhandlung Cantors von 1883 im 21. Band der Math. Ann.) die beiden »Erzeugungsprinzipien« der transfiniten Zahlen gefunden wurden, durch die die Reihe der Transfiniten eine Unendlichkeit im echten Sinne gewann (nicht nur im Sinne von Hegels »schlechter Unendlichkeit«), war mit erstaunlichem Scharfblick der ontologisch entscheidende Vor-

1) Für die Möglichkeit verschiedener zugrunde zu legender Existenzialaxiome vgl. man die Darstellung H. Fraenkels, »Einleitung in die Mengenlehre«, § 13; ferner: v. Neumann, Journ. f. Math. 154, S. 219 ff.

2) Cantor, zuerst Math. Ann. 17, S. 358 (1880); vgl. dazu Schönflies-Hahn, Entwicklung der Mengenlehre I (Leipzig und Berlin 1913), S. 92, Anm. 1; ferner Schönflies, Enzyklopädie der math. Wiss., Bd. I; I 5 (»Mengenlehre«) Nr. 1; Young, The theory of sets of points (Cambridge 1906), § 12–14.

stoß ins Transfinite gemacht und zwar genau in der Weise, wie er ontologisch haltbar ist. Unglückseligerweise verließ Cantor später¹ (1897) selbst diese freischöpferische Begründungsweise und ging zur Theorie der wohlgeordneten Mengen über, und dadurch erst wurde – indem nunmehr die aktual-unendliche Menge für alle Teile der Theorie des Unendlichen grundlegend wurde – die Möglichkeit der ontologischen Begründung preisgegeben.

Allerdings sind doch auch positive mathematische Motive vorhanden, die zur Theorie der wohlgeordneten Mengen geführt haben, nämlich erstens die großen Schwierigkeiten, die sich einer »konstruktiven«, nur auf die Cantorschen Erzeugungsgeetze gestützten Theorie der transfiniten Zahlen in mathematischer Hinsicht entgegenstellen. Darüber werden wir noch zu reden haben. Zweitens aber die nicht geringeren Schwierigkeiten des Übergangs von einer rein ordinalen Theorie der transfiniten Zahlen zur allgemeinen Lehre von den unendlichen, auch nicht-wohlgeordneten Mengen. Wir sehen, daß eine Menge, auch eine geordnete, ontologisch eine ganz andere Struktur hat als ein unendlicher Prozeß; nur durch eine Art nivellierender Reduktion gelangt man von dem »gestuften« Aufbau des Prozesses zur »Menge«, in der alle Transfiniten streng parataktisch auftreten. Will man also den Vorstoß auf ganz schmaler Front ins Gebiet des Unendlichen, den man auf Grund der transfiniten Komplikation der Bewußtseinsstrukturen wagen kann, verbreitern zu einer Okkupation eines ganzen abgerundeten Gebiets, so muß man vielleicht notgedrungen den ontologischen Unterbau zum mindesten teilweise im Stich lassen und nur noch mit rein formalen Analogien arbeiten.

Dieses merkwürdige Verhängnis ist tief verankert in dem Wesen des Formalen überhaupt. Und von dieser Seite aus gewinnt die eigentümliche soeben geschilderte Sachlage eine philosophisch, genauer gesagt logisch grundsätzliche Bedeutung. Es handelt sich nämlich um den Übergang von der von einem konkreten Lebensphänomen (das als solches der hermeneutischen »Auslegung« zugänglich ist) in beinahe wörtlichem Sinne »abgezogenen« Form zu einer nivellierten, in gewissem Betracht »allgemeinen«, aber deshalb auch in ganz bestimmter Hinsicht »verblaßten« Formalität. Sind bei dem ersten formalen Charakter die kategorialen Eigentümlichkeiten des konkreten Phänomens voll erhalten, – was man daran erkennen

1) Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre II, S. 208. (Math. Ann. 49.)

kann, daß sie rückwärts wieder beinahe unmittelbar durch eine Art konkreter Deutung (»Entformalisierung«) zum lebendigen Phänomen zurückführen¹ –, so ist bei der zweiten Art des Formalen diese kategoriale Struktur »eingeebnet«. Das heißt: der Übergang von der ersten zur zweiten Weise des Formalen kann bezeichnet werden als die Nivellierung der spezifisch kategorialen Differenziertheit des ursprünglichen formalen Charakters des Phänomens.

Das Mathematisch-Formale der traditionellen Art ist durch eben jene Nivelliertheit der kategorialen Differenzen gekennzeichnet gegenüber dem »Formal-Anzeigenden«² (Heidegger), das sich wie ein dünnes Gewand der plastischen Eigentümlichkeit des Phänomen-Körpers anschmiegt. Andererseits ist auch dieses Formale der »anzeigenden Art« unter gewissen Umständen einer gewissermaßen mathematischen Behandlung fähig. Dies ist einigermaßen überraschend, wenn man bedenkt, daß das Formale der anzeigenden Art eigentlich die methodische (»begriffliche«) Grundlage der interpretierenden Geisteswissenschaften (Philologie, Geschichte usw.) ist. Allerdings ist zu betonen, daß diese Möglichkeit der mathematischen Explikation formal-anzeigender Charaktere nicht allgemein besteht, sondern ihren Grund im vorliegenden Falle in der iterativen Struktur des Phänomens hat. Hier eröffnet sich die Möglichkeit eines tiefen Einblicks in den Wesenscharakter des Mathematischen überhaupt, bei dem die Iteration, die »Wiederholung« des in irgend einem

1) Denn, genau besehen, ist das Verständnis jenes formalen Charakters nur möglich im Vollzug eines Lebensbezugs von der Art des entformalisierten Bezugsinns des konkreten Phänomens. Am »Beispiel« der transfiniten Reflexion auf sich selbst gezeigt: das Verständnis der Wirkungsweise der Cantorschen Erzeugungsprinzipien involviert im Grunde stets den Vollzug von Reflexionen auf das eigene Tun, also – in einer bestimmten Zu-spitzung auf das gerade jeweilig lebendige Tun – eben nichts anderes als die konkrete Reflexion auf sich selbst. (Vgl. oben S. 110.)

Daraus ergibt sich allerdings, daß, genau besehen, das angebliche »Beispiel« von der iterierten Reflexion auf sich selbst im Grunde gar kein beliebiges Beispiel ist – sondern die Sache selbst. Keine andere transfinite Stufung des Bewußtseins ist jener letzten Konkretion fähig wie die Reflexion auf sich selbst. Etwa transfinite Iterationen von Erinnerungen, Phantasien u. dgl. sind doch immer nur künstliche, abstrakte, analogische Bildungen nach dem Muster der iterierten Reflexion und ohne deren Hilfe in concreto gar nicht »auszudenken«, d. h. der phänomenologischen »Anschauung« nicht zugänglich.

2) So genannt, weil es auf das jeweilig gemeinte konkrete Seiende gleichsam hinzeigt, es anzeigt, aber nicht wie eine leere Form »umgreift« (Lask).

Betracht Gleichen (bzw. Identischen) eine entscheidende Rolle spielt. (Vgl. § 6 b u. c.)¹.

B. Phänomenologie und mathematische Theorie der Transfiniten.

Nach den vorangehenden ontologischen Bemerkungen muß nun das Verhältnis zur mathematischen Theorie noch genauer beleuchtet werden. Die phänomenologische Unterbauung des transfiniten Progressus mittels der iterierten Reflexion auf sich selbst und dergleichen beabsichtigt nicht, einen Erfas für die mathematische Theorie der transfiniten wohlgeordneten Mengen bzw. Ordinalzahlen zu bieten. Sie ist überhaupt nicht in der früher üblichen Weise auf die philosophische Begründung einer als sakrosankt angesehenen mathematischen Theorie eingestellt. (Die Marburger neukantische Schule hatte bekanntlich die Philosophie gewissermaßen zur ancilla scientiarum [praecipue mathematicarum] erniedrigt. Demgegenüber ist es die unverkennbare philosophische Tendenz der Hufferlischen Lehre von der phänomenologischen Reduktion, daß die phänomenologische Philosophie nicht nur von den positiven Wissenschaften unabhängig sein soll, sondern daß sie auch die Grundlegung, die jene sich selbst gegeben haben, einer (vor allem ontologischen) Kritik zu unterwerfen hat). Was unsere phänomenologische Unterbauung beabsichtigt und auch leistet, ist dies, daß ein »fachlich existierendes«, d. h. konkret aufweisbares Phänomengebiet aufgezeigt wird, zu dessen Analyse wirklich transfinite Prozesse benötigt werden.

Man könnte mit einem gewissen Recht sagen, die in diesem Sinne »fachliche« Mathematik der transfiniten Ordnungszahlen sei angewandte Mathematik. Die eigentümliche Struktur des Anwendungsgebiets, die jenes von Hause aus wesentlich besitze, sei es, die die Einführung der transfiniten Ordnungszahlen zu seiner Beherrschung erzwungen habe. Zu vergleichen wäre etwa die Art, wie die Faradaysche zunächst ganz unmathematische Konzeption des elektrischen Feldes die Vektoranalysis (und später die Tensoranalysis) hätte entstehen lassen, die ja auch in ihren Anfängen durch die Physiker (Maxwell, Gibbs, Heaviside usw.) und nicht durch die Mathematiker geschaffen worden sei.

1) Historisch ist noch anzumerken, daß die Problematik der kategorialen Nivellierung zuerst bei Aristoteles, im I. Buch der Physik auftritt, welche Erkenntnis uns durch die eindringende Interpretation dieses Textes durch M. Heidegger (in seiner Freiburger Vorlesung im Sommer-Semester 1922) wiedergegeben wurde.

An dieser Stelle kann darauf nicht näher eingegangen werden.

Aber freilich ist doch noch ein wesentlicher Unterschied zwischen jenen physikalischen »Anwendungen« einer mathematischen Theorie (mögen sie auch mitunter historisch der systematischen Entwicklung der reinen Theorien vorangegangen sein) und jener in manchem Betracht analogen Beziehung der Theorie der transfiniten Ordinalzahlen zu der Iterationsmöglichkeit von Intentionalitäten im »reinen Bewußtsein«. Denn während jene »physikalischen« Entitäten transzendente Gegenständlichkeiten sind, handelt es sich hier um *transzendente* Gegebenheiten, d. h. um solche Phänomene, in denen sich Gegenstände im eigentlichen Sinne überhaupt erst konstituieren. Dies äußert sich in evidenter Weise vor allem darin, daß jene iterierten Intentionalitäten bei der konkreten Konstitution des rein mathematischen Begriffs der transfiniten Ordinalzahlen selbst die schlechthin entscheidende Rolle spielen. G. Cantors geniale Konzeption der beiden Erzeugungsprinzipien für die transfiniten Zahlen ist ja konkret genommen nichts anderes als die transfinite Iteration einer Intentionalität.

An dieser Stelle entsteht aber eine entscheidende Schwierigkeit, die eine weitere Betrachtung unbedingt erfordert. Die Begründung der Lehre von den Transfiniten mittels der Erzeugungsprinzipien, wie sie Cantor in seiner »Mannigfaltigkeitslehre« (Math. Ann. 21) zuerst andeutungsweise gab, ist von ihm selbst später (in den »Beiträgen zur Begründung der transfiniten Mengenlehre; Math. Ann. 46 u. 49) als undurchführbar angesehen worden. Notgedrungen trat dafür die Begründung mittels des Begriffs der wohlgeordneten Menge ein, die, wie soeben gezeigt wurde, ontologisch schweren Bedenken unterliegt.

Die Schwierigkeit liegt darin, daß der Zweifel berechtigt erscheint, daß die Cantorsche Erzeugungsprinzipien, sobald man sie scharf zu formulieren versucht, gar nicht zu allen transfiniten Zahlen führen, ja vielleicht nicht einmal zu allen Zahlen der II. Zahlenklasse! Was mit dieser paradoxen Behauptung gemeint ist, ist folgendes: Cantor hat schon selbst die »ersten« Transfiniten, von ω ab, konkret

und lückenlos benannt, bis zur ersten »Epsilonzahl« $\varepsilon = \omega^{\omega^{\omega^{\dots}}}$ und darüber ein Stück hinaus. Man hat es früher als selbstverständlich angesehen, daß diese lückenlose Benennung auf die ganze II. Zahlenklasse ausgedehnt werden kann. Damit ist gemeint, daß zwar nicht alle Transfiniten der II. Klasse durch ein bestimmtes finites Bezeichnungssystem benannt werden können (denn das ist ja nach dem bekannten »Satz von der endlichen Bezeichnung« für jede nichtabzählbare Menge ausgeschlossen), daß aber nur eine endliche Anzahl neuer Zeichen

erforderlich ist, um zu jeder beliebigen Zahl der II. Klasse zu gelangen. »Es ist also jede Zahl der II. Klasse einer endlichen Bezeichnung fähig, die ganze Klasse selbst dagegen nicht«¹.

Für diese im allgemeinen stillschweigend gemachte Annahme gibt es bis jetzt keinen Beweis. Charakteristisch ist, daß Brouwer, dem wir die bisher einzige streng durchgeführte konstruktive Theorie der Transfiniten verdanken², keineswegs eine Angabe über die Grenze oder Unbegrenztheit seiner Konstruktionen macht. Er gibt eine systematische Theorie bis zur zweiten Epsilonzahl $\varepsilon_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\varepsilon \cdots \varepsilon}$ (ν Buchstaben ε) und zeigt

dann nur, daß man auch noch größere Zahlen bezeichnen kann. Keineswegs aber zeigt er, daß die so oder sonstwie bezeichnbaren Zahlen jede Zahl der II. Zahlenklasse übertreffen können. Es wäre also die Möglichkeit denkbar, daß der transfinite Prozeß sich schließlich an einer oberen Grenze festläuft, was zunächst verborgen bleibt und nur dann zu Tage kommt, wenn man ihn exakt zu fassen sucht³.

Aber auch nach der üblichen Auffassung wird die Reihe der Transfiniten, sobald man über die II. Klasse hinauskommt, immer unbestimmter. So ist z. B. keinesfalls die lückenlose Bezeichnung aller Transfiniten bis zur Anfangszahl der III. Klasse Ω_1 möglich, selbst wenn jede Transfinite unter Ω_1 von einer geeigneten Bezeichnungsweise erreicht werden könnte. Vollends die Transfiniten, die Mahlo definiert hat⁴ (die über Ω_ω weit hinausgehen) sind in ihrer Existenz von gewissen hypothetischen Postulaten abhängig.

Angeichts dieser unleugbaren Unsicherheiten und Schwierigkeiten innerhalb der mathematischen Theorie der Transfiniten fragt es sich, ob unserer ontologisch-phänomenologischen Deutung wirklich eine reale Bedeutung zukommt. Man könnte meinen: Wenn die transfiniten Zahlen wirklich formale Strukturen an kon-

1) Heffenberg, Grundbegriffe der Mengenlehre, § 94 (S. 138).

2) Verhandl. d. K. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, I. Serie; Deel XII, Nr. 5, S. 22 ff., vgl. besonders den Schluß S. 41—43.

3) Auf diese ganze Schwierigkeit hat mich Herr Professor Weyl brieflich hingewiesen. Jede einzelne Definitionsweise, die auf Grund schon definierter Transfiniten größere Transfinite bestimmt, verläuft schließlich. (Phänomen des »Einholens« oder der »kritischen Zahlen« Beispiel: ε , wo $\omega^\varepsilon = \varepsilon$ ist.) Es sei möglich, daß nicht nur jede einzelne derartige Definitionsweise verläuft, sondern daß es sogar eine Grenze »innerhalb der II. Zahlenklasse« gäbe, unterhalb welcher bereits alle möglichen Definitionsweisen verläuft hätten. — Dieses Problem wird im Math. Anh. zu § 5, VI B näher erörtert.

4) Leipziger Berichte, math.-phys. Klasse, Bd. 63, 64, 65.

kreten Phänomenen darstellen, dann müssen sie auch selbst durchaus bestimmt und ohne jede Unklarheit und jeden Widerspruch sein. Aber diese Forderung ist übertrieben: Gewiß müssen die Unklarheiten der Theorie der Transfiniten beseitigt werden, aber dieses kann nicht durch einen phänomenologischen Machtspruch geschehen. Wir sehen ja gerade, daß die phänomenologische Betrachtung nichts tut, als die (rein ordinale) mathematische Untersuchung getreu nachzuzeichnen. Sie zeigt, daß die mathematische Theorie eine sachliche, ontologisch faßbare Bedeutung hat, — auch da, wo sie noch problematisch oder von Hypothesen abhängig ist. Die Probleme der mathematischen Theorie sind sachliche Probleme, ihre Hypothesen solche über echte mögliche »Sachverhalte«, ihre Fortschritte sachliche Fortschritte! Wir sind imstande jedes (auf »intuitionistischer« Grundlage, d. h. ohne schrankenlose Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten gewonnene) Ergebnis der mathematischen Theorie sachlich zu deuten, was noch sehr deutlich bei der folgenden Betrachtung des Kontinuumproblems (§ 5b) sich zeigen wird. Aber wir können natürlich nicht mathematische Schwierigkeiten und Unsicherheiten durch phänomenologische Betrachtungen umgehen oder wegdeuten.

Der Grundgedanke unserer sachlichen Deutung der Transfiniten bleibt von jenen Schwierigkeiten unberührt; ganz sicher ist die Theorie und sachliche Deutung der »ersten« Transfiniten, bis in die ersten Epsilonzahlen hinein; diese genügen auch für alle praktisch vorkommenden Bedürfnisse der Hilbert-Hiermannschen Beweistheorie, also für die praktisch notwendigen metamathematischen Verwendungen. Im Übrigen muß das Ergebnis der im Gange befindlichen mathematischen Untersuchungen abgewartet werden. Aber, wie es auch ausfallen möge, es wird einer völlig bestimmten phänomenologisch-ontologischen, d. h. sachlichen Interpretation fähig und bedürftig sein.¹

b) Untersuchungen zum Kontinuumproblem.

Vorbemerkung.

Im folgenden wird unter der Bezeichnung »Kontinuumproblem« lediglich das mathematische Problem der Klassifikation aller »Zahlfolgen« (Irrationalitäten) und analog aller höheren Funktionen

1) Einige weiterführenden Bemerkungen zum jetzigen Stand der mathematischen Theorie der Transfiniten sind im »Mathematischen Anhang« zu § 5 vereinigt (siehe besonders Nr. VI).

(etwa der unstetigen Funktionen einer Variablen) verstanden. Es ist also nicht gemeint das Problem der mathematischen Bemeisterung des anschaulichen Kontinuums, welches vom Verhältnis der Morphologie räumlicher Gestalten und der eigentlichen Geometrie abhängt. Für die Behandlung dieses Problems verweisen wir auf den I. Teil unserer Abhandlung »Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendungen« (dieses Jahrbuch Bd. VI., S. 398 ff.).

I. Die geschichtlichen Wurzeln in der Antike.

A. Die antike Definition der mathematischen Existenz durch Konstruktion.

Es ist das bleibende Verdienst von H. G. Zeuthen die Prinzipien des Existenzbeweises bei den Alten aufgeklärt zu haben¹. Nach seinen Forschungen dient als alleiniges und stets angewandtes Mittel für den Existenzbeweis die Konstruktion. Und zwar, da die antike Mathematik nur Geometrie ist (auch die Arithmetik und Algebra erscheint im geometrischen Gewand), Konstruktion von Figuren. Als Grundlage dienen dabei zwei Fundamentalkonstruktionen: Die Verbindung zweier gegebener Punkte durch eine Gerade und das Schlagen eines Kreises um einen gegebenen Punkt mit gegebenem Radius. Daß diese Konstruktionen möglich sind oder, was daselbe bedeutet, daß die durch sie gelieferten Figuren »existieren«, ist der Inhalt zweier Postulate (*ἀσκήματα*) des Euklid. Es wird weiter gefordert die eindeutige Existenz der Verlängerung einer begrenzten Geraden (unter der Form, daß alle rechten Winkel gleich sind) und die Existenz des Schnittpunktes zweier nicht-parallelen Geraden (das Parallelenaxiom). Die Schnittpunkte von Kreisen werden nicht in einem besonderen Postulate gefordert, ergeben sich aber aus der Definition des Kreises als einer geschlossenen Figur. (Euklid, Elemente I, 15)².

1) Vgl. »Die geometrische Konstruktion als Existenzbeweis in der antiken Geometrie«, Math. Annalen, Bd. 47, S. 222–28 (1896), und »Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter«, Kopenhagen 1896, [im folgenden zitiert als »Geschichte«], bes. S. 88–91; 118–126; 148–49; 175–76; 191–99 (bes. S. 192); 212; 217.

2) Vgl. Zeuthen, Geschichte usw., S. 118–126. Nach S. 122 sind die Schnittpostulate von Kreis und Geraden nicht aufgeführt; lassen sich aber aus den einfachsten Sätzen (I, 1, 12, 22) ableiten. S. 123 wird gezeigt, daß die Definition des Kreises als geschlossene Figur und Ähnliches bei anderen geschlossenen Figuren das sog. Axiom von Pappus erfüllt, das nur vom Dreieck als einfachster geschlossener Figur handelt. Indessen betrachtet Pappus krumme Linien überhaupt nicht. Für den Griechen aber war der Kreis

Zeuthen äußert sich über die Bedeutung dieser Postulate folgendermaßen¹: »In Übereinstimmung damit, daß die Probleme der Alten im wesentlichen Sätze über die Existenz, und ihre Lösungen Beweise für die Existenz des Behandelten oder Gefuchten sind, sind die Postulate Behauptungen über dessen Existenz, deren Anerkennung ohne Beweis oder Nachweis verlangt wird.« Die hierin ausgesprochene Parallelisierung von Postulat (*ἀντίθεμα*) und Problem (*πρόβλημα*) einerseits und Axiom (*κοινὴ ἐννοία* bei Euklid, später *ἀξιωμα*) und Theorem (*θεώρημα*) andererseits ist schon in der Antike aufgestellt worden, wie wir von Proklos wissen².

Proklos berichtet von einem Streit zwischen der Akademie (vertreten durch Speusippos) und der Schule von Kyzikos (vertreten durch Menaimos, den Schüler des Eudoxos) über die Auffassung des eigentlichen Wesens der geometrischen Konstruktion. Dieser Streit ist für die Kenntnis des ontologischen Charakters der mathematischen Gegenstände in der Auffassung der Antike von Wichtigkeit und wird daher noch später (in § 6b) näher zu erörtern sein.

Für die gegenwärtige Problematik genügen folgende Bemerkungen:

Die Notwendigkeit, die mathematischen Gebilde durch die Art ihrer Konstruktion zu definieren und in ihrer Existenz zu sichern, wird zwar im Altertum allgemein anerkannt³. Aber bezüglich des näheren Charakters dieser Konstruktion gehen die Meinungen auseinander. Während die akademische Partei jedes eigentliche Werden und Entstehen geometrischer Gebilde ablehnt, rückt die kyzikenische Schule die konkrete Herstellung in den Mittelpunkt der Betrachtung. (Dabei scheint die Frage des ontologischen (»metaphysischen«) Charakters der mathematischen Gebilde für die »positivistischen« Eudoxos-Schüler keine entscheidende Rolle zu spielen, sondern

eine primitive Figur. — S. 124 über das Postulat der Gleichheit der rechten Winkel, wozu der Kommentar des Proklos zur Stelle (in Euclidem p. 188 Friedlein) zu vergleichen ist. — Die Zeuthensche Interpretation ist allerdings, was diesen Punkt betrifft, nicht allgemein anerkannt. Für das Ganze ist diese Einzelheit aber nicht von großer Bedeutung.

1) Geschichte usw., S. 120.

2) Proclus in Euclidem, p. 178, 12–179, 8 (Friedlein).

3) Diese Auffassung hängt auch mit der allgemeingriechischen Anschauung zusammen, die alle Dinge von der Seite ihres Werdens, sei es ihres Hergeleitetwerdens (*ἐξυνη*), sei es ihres Wachlens (*φύσις*), ansieht.

nur die eigentlich mathematischen Eigenschaften werden in Betracht gezogen^{1.)}

Der Streit um die Benennung der mathematischen Sätze, – ob man sie als Theoreme oder Probleme bezeichnen solle – rührt letzten Endes her von dieser verschiedenen Stellung zur Frage der Zeitlichkeit, der Genefis der mathematischen Gebilde. Ob die Gebilde vom Denken (Geist, *διάνοια*) geschaffen werden oder nur gefunden werden, das ist die Streitfrage. Ob sie an sich von Ewigkeit her »da sind« (man denke an Platons *ἀνάμνησις*-Lehre bezüglich des Mathematischen im »Meno«!), oder von der *διάνοια* »zuwege gebracht« werden (*πορίζεσθαι*), das ist die Alternative.

Man sieht, es ist im Keime schon die heutige Alternative, ob die axiomatisch-descriptive Haltung gegenüber dem transzendent liegenden Mathematischen recht hat (der Existenzbegriff Cantors, Dedekinds und Zermelos, in gewissem modifizierten Sinne auch Hilberts), oder ob der Zugang durch die Konstruktion, nicht bloß die abstrakt mögliche, sondern die wirklich ausgeführte, das Entscheidende ist. [Man denke an Brouwers Ausspruch: die Mathematik ist vielmehr ein Tun als eine Lehre – d. h. ein *ποιεῖν* bzw. *πορίζειν*, nicht eine *θεωρία*!]

Freilich, der Streit um die Benennung der mathematischen Sätze blieb unentschieden, keine der Parteien siegte: bei Euklid gibt es eine systematische Trennung beider Bezeichnungen Problem und Theorem [im wesentlichen allerdings gemäß der schon von

1) In diesem Sinn ist auch die Astronomie der kyzikenischen Schule rein mathematisch, ohne sich in Spekulationen über die Gestirnsseelen, den unbewegten Bewegten u. dgl. zu verlieren. Darin ist sie Vorläuferin der späteren »exakten«, ontologisch nicht mehr interessierten alexandrinischen Astronomie (Eratosthenes, Aristarch, Hipparch usw.). Analog ist in der reinen Mathematik Euklid durchaus nicht explizit ontologisch interessiert, wenn auch gewisse ontologische Momente bei ihm latent mitspielen (z. B. bei der Theorie der Irrationalitäten im X. Buch). Allerdings muß man sagen, daß er darin in gewissem Sinne Platons eigener Anweisung folgt, der es für die *διάνοια*, die mathematische Erkenntnisweise für charakteristisch hält, daß sie nicht über bestimmte »Hypothesen« hinausfragt. [Vgl. Staat, VI. Buch, p. 510B–511A.]

Über Eudoxos selbst ist noch zu bemerken, daß er in die innerakademische Diskussion über die Ideen eingriff [f. Aristot. Metaph. A 9 (991 a, 9–19); sehr ähnlich (Dublette) M 5 (1079 b, 12–23)]; in der er einer »Immanenz« der Ideen in den Dingen das Wort redete (»sie seien so, wie dem Weißen das Weiße beigemischt werden könnte«). Er scheint sich also an dem Beispiel der »reinen« Farben, die aus den empirischen Farben als phänomenale Komponenten herauszusehen sind, das Innewohnen der Ideen in den Sinnendingen (also die »μεθεξής«) auf »positivistische« Art klargemacht zu haben.

Menaichmos behaupteten *δίττη προβολή*, erstens des *πορίσασθαι τὸ ζητούμενον* und zweitens des *πεπορισμένον* (od. *περιωρισμένον*) *ἰδεῖν*. (Proclus in Eucl. p. 78, 10 – 11).] – Aber trotzdem ist in dem strengen Gefüge des Euklidischen systematischen Aufbaues der Mathematik durchgängig die Konstruktion zur Grundlage eines jeden Existenzsatzes gemacht. Dies ist von Zeuthen bis ins einzelne gezeigt worden.

B. Die antike Lehre von den irrationalen Verhältnissen.

Für den Griechen sind Zahlen nur die natürlichen Zahlen und in zweiter Linie die Brüche, nicht aber die Irrationalen. Es gibt nach griechischer Auffassung keine Zahl (*ἀριθμός*) die mit sich selbst multipliziert 2 gibt¹.

Dagegen läßt sich die »Existenz« der Quadratdiagonale, die, wenn die Seite s ist, nach dem pythagoräischen Lehrsatz $s\sqrt{2}$ beträgt, durch geometrische Konstruktion beweisen. Die irrationalen Größen (*μεγέθη* oder häufiger *εὐθεῖαι ἄλογοι* genannt – in der Frühzeit sagt man dafür *ἄρρητοι*) werden als Verhältnisse einer Strecke zu einer gegebenen Ausgangsstrecke gefaßt. Euklid gibt im V. Buch (Def. 4 u. 5) eine ganz allgemeine Definition des Verhältnisses (*λόγος*) oder genauer gesagt, der Verhältniseinheit:

Def. 4: *λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύνανται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.*

Def. 5: *ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκεις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκεις πολλαπλασίων καθ' ὁποιοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκατέρου ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχη, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ἐλλείπη, ληφθέντα κατὰλληλα.*

Zu deutsch:

Def. 4: Man sagt: Größen haben zu einander ein Verhältnis, wenn sie vervielfältigt einander übertreffen können.

(Dies ist, in der Form einer Definition, das sogenannte »archimedisches«, in Wahrheit von Eudoxos stammende Axiom.)

Def. 5. Man sagt: »Größen stehen in demselben Verhältnis, die 1. zur 2. und die 3. zur 4., wenn das gleich oft Vervielfache der 1. und 3. das gleich oft Vervielfache der 2. und 4. gemäß welcher Vervielfachung auch immer jeweilig entweder zugleich über-

1) Dafür geben schon die »Pythagoreer« einen sehr alten Beweis »aus dem Geraden und Ungeraden«, den Euklid X, 117 aus historischen Gründen aufbewahrt hat.

trifft oder ihm zugleich gleicht oder es zugleich unterschreitet, entsprechend genommen«.

(D. h. in modernen Zeichen: $a:b=c:d$, wenn für beliebige ganze Zahlen m und n , zugleich $ma > nb$ und $mc > nd$; bzw. $ma = nb$ und $mc = nd$; bzw. $ma < nb$ und $mc < nd$.)

Diese Definition ist nicht »entscheidungsdefinit« und daher im Sinne Kroneckers nicht zulässig¹.

Das zeigt sich in der charakteristischen Nebenbemerkung καὶ ὁποιοῦν πολλαπλασιασμόν. »gemäß was für einer Vervielfachung auch immer«. Die Definition gestattet offenbar nicht, unmittelbar bei 4 vorgelegten Größen a, b, c, d festzustellen; ob $a:b=c:d$ ist. Denn man kann nicht alle möglichen Paare ganzer Zahlen (m, n) durchprobieren, ob für jedes Paar ohne Ausnahme zugleich $ma > nb$ und $mc > nd$ ist usw. Denn es gibt unendlich viele voneinander verschiedene Zahlenpaare (m, n) .

Andererseits ist es leicht, durch eine kleine Änderung der Bezeichnungsweise, diese Euklidische Definition der Gleichheit der Verhältnisse in genauer Parallele zu setzen mit Dedekinds Definition der reellen Zahlen durch »Schnitte«². Man kann in der Tat aus den drei charakteristischen Relationen:

$$ma \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} nb \quad \text{zugleich mit} \quad mc \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} nd \quad \text{erhalten:}$$

$$\frac{a}{b} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \frac{n}{m} \quad \text{zugleich mit} \quad \frac{c}{d} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \frac{n}{m},$$

wobei offenbar $\frac{a}{b}$ irgendeine reelle und $\frac{n}{m}$ eine rationale »Zahl« (im modernen Sinn) ist. Bezeichnet man nun noch $\frac{a}{b}$ mit dem einen Buchstaben α , $\frac{c}{d}$ mit β und $\frac{n}{m}$ mit ϱ , so erhält man die Definition 5 in der folgenden Form:

Es ist $\alpha = \beta$ dann und nur dann, wenn zugleich α und β größer bzw. gleich bzw. kleiner als ϱ sind, was für jede beliebige Rationalzahl ϱ gelten soll.

Denkt man sich also sämtliche Rationalzahlen gegeben, so rufen α und β dieselben Einteilungen (»Schnitte«) in der Gesamtheit der Rationalzahlen hervor. Denkt man sich durch α bzw. β die Rational-

1) Vgl. meine Arbeit, dieses Jahrbuch, Bd. VI, S. 409, Anm. 3.

2) R. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1878.

zahlen in 2 Klassen geteilt, je nachdem sie größer oder kleiner (oder auch, wenn möglich, gleich) α bzw. β sind, so erhält man nach der Definition dieselben Klassen, wenn $\alpha = \beta$ ist und nur dann¹.

Das ist aber nichts anderes als die Dedekindsche Definition der reellen Zahlen durch »Schnitte« im »Gebiet« der rationalen Zahlen. —

Es ist erstaunlich, daß die Übereinstimmung der alten und der modernen Definition der »allgemeinen« reellen Größe so vollkommen ist. Für den gegenwärtigen Zusammenhang ist nun besonders wichtig, daß diese Definition durchaus gegen die konstruktive Definition der mathematischen Existenz bei den Alten zu sprechen scheint.

Aber bei tieferem Eindringen in die Sachlage erweist sich diese Übereinstimmung mit der modernen Dedekindschen Theorie als sehr oberflächlich. Während nämlich Dedekind die Existenz der Gesamtheit der reellen (rationalen und irrationalen) Zahlen durch seine Definition mittels des Schnittes für gesichert hält, wird bei Euklid die Existenz aller irrationalen Zahlen (Verhältnisse) nirgends angenommen, sondern jedes neue einzuführende Verhältnis wird konstruiert und damit in seiner Existenz gesichert. (Dies ist von Zeuthen und anderen bis in alle Einzelheiten nachgewiesen worden.)

Auf diese Weise, durch die Konstruktion mittels Lineal und Zirkel, gelangt man allerdings nur zu denjenigen Irrationalitäten, die wir heute durch eine Kombination von Quadratwurzelzeichen ausdrücken. Über dieses Größenmaterial geht Euklid nirgends hinaus. Die Zahl π wird z. B. nicht von ihm eingeführt, nur der Satz, daß sich zwei Kreise wie die Quadrate ihrer Radien verhalten, wird bewiesen (XII, 2).

Diese quadratischen Irrationalitäten werden bekanntlich im X. Buch von Euklid einer sorgfältigen Klassifikation unterworfen. Man hat sich in neuerer Zeit mitunter über die pedantische Sorgfalt Euklids gewundert und die moderne algebraische Bezeichnungsweise gelobt, die den gesamten Inhalt des X. Buches in ein paar Formeln fassen könne.

Die Auffassung, als ob es sich hier beim Übergang zur algebraischen Bezeichnungsweise und Darstellung um einen bloßen technischen Fortschritt handle, ist jedoch verfehlt. Sie verkennet durchaus die Absicht, die Euklid im X. Buch leitete².

1) Vgl. zum Ganzen etwa Zeuthen, Geschichte usw., S. 141.

2) Man muß sich auch erinnern, daß durch Euklids X. Buch die Lehre zweier Mathematiker ersten Ranges aus der Zeit Platons, nämlich des

Für ihn war die Konstruktion und Klassifikation der Irrationalitäten deshalb so wichtig, weil sie die Seinsweise dieser »Größen« herausstellte, in der Abstufung, in der sie sich schrittweise von den rationalen, durch »Zahlen« (*ἀριθμοί*) ausdrückbaren Verhältnissen entfernen. Den unerhörten Eindruck, den die Entdeckung des Irrationalen (des *ἄρρητον* oder *ἄλογον*, des »Unfagbaren«, »Unansprechbaren«) machte, ist bekannt; – mag auch die Sage, die Hippasos als Verräter dieses Geheimnisses der Pythagoreer durch göttliche Fügung im Meere umkommen läßt, eine späte Erfindung sein¹. Daß etwas »existieren« sollte, was mittels Verhältnisse ganzer Zahlen nicht ausdrückbar ist, was sich, wenn man es mittels ganzer Zahlen-Verhältnisse auszudrücken versucht, sich als unendlich (*ἄπειρον* unbegrenzt) erweist, schien die durchgehende Herrschaft der Form, des ordnenden Prinzips zu gefährden, und zwar nicht im Gebiet des sinnlichen, fließenden Werdens, sondern in dem des exakt konstruierbaren (mittels den *διάνοια* erfassbaren) Seienden. Die Schwierigkeit wurde überwunden eben durch die genaue Konstruktion und Klassifikation der Irrationalitäten selbst; ein neues Gebiet wurde dem Chaos entrissen und dem Kosmos eingegliedert¹. [Vgl. Plato, *Philebos* 16 C – 18 C²].

Theätet und des Eudoxos, zu einem systematischen (mindestens vorläufigen) Abschluß gebracht wird; während andererseits einer der berühmtesten nacheuklidischen Mathematiker, Apollonios von Perge, diese Lehre im Geiste Euklids erweitert (s. u.). Die Größten haben sich also um diese eigenartige Theorie der Irrationalitäten bemüht!

1) Vgl. hierzu Eva Sachs, die 5 platonischen Körper. Berlin 1917. (Philolog. Abhandl., her. v. Wilamowitz, Heft 24.) S. 38 u. 82 ff. Das Thema der »5 platonischen Körper« hängt mit dem gegenwärtigen aus folgendem Grunde zusammen: Die Tatsache, daß im Gegensatz zu den unendlich vielen konstruierbaren regulären Polygonen der Ebene nur 5 reguläre Polyeder im Raum »existieren«, ist ein schlagendes Beispiel des konstruktiven Sinnes der mathematischen Existenz. Dieses Beispiel hat daher auch bei den Griechen ein solches Ansehen genossen, daß das klassische System der griechischen Elementarmathematik, das Euklidische, in dem konstruktiven Existenz- und Einzigkeitsbeweis der 5 regulären Polyeder gipfelt (Buch XIII), wobei dann die Klassifikation der dazu notwendigen Irrationalitäten genau nach dem X. Buch durchgeführt wird.

2) Die Belege im Einzelnen würden zu weit führen und auch nur bei den Geschichtsschreibern der Mathematik (Hankel, Zeuthen, P. Tannery u. a.) Gefagtes wiederholen. – Hingewiesen sei nur auf den »goldenen Schnitt«, bei dem sich die Irrationalität durch das Nichtabbrechen des Euklidischen Verfahrens zur Herstellung des größten gemeinsamen Teilers sofort konstatieren läßt. Der goldene Schnitt ist bekanntlich dadurch gekennzeichnet, daß eine Strecke durch ihn so zerteilt wird, daß der größere Teil zum Ganzen

Dies scheint nun so aufgefaßt worden zu sein, daß gewissermaßen Stufen und Arten von Geformtheit, gewissermaßen von relativer

daselbe Verhältnis hat, wie der Rest (der kleinere Teil) zum größeren Teil. Mißt man nun (gemäß dem Euklidischen Teilerverfahren) den Rest am größeren Teil, dann den neuen Rest am 1. Rest, den 3. Rest am 2. usw. usw., so erhält man nach Definition immer daselbe Verhältnis. Das Verfahren kommt also nicht von der Stelle und geht daher ins Unendliche. (Ganz analog, wie etwa die Division $1,000 : 3$ niemals abbricht. — In der Tat entspricht auch in unserer modernen Schreibweise dem »goldenen Schnitt« der Kettenbruch mit lauter Einsen als Teilnennern:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

In diesem Fall führt also ein Verhältnis, das Figuren von höchster Harmonie der Form entstehen läßt (man denke an seine Rolle in der Kunst und für die Konstruktion des regulären 5- (Pentagramms!), 10-, 15-Ecks und der regulären 12- und 20-Flächner), wenn man es »ausprechen« will, zu einem unendlichen Prozeß.

Dies ist für den Griechen etwas Unerhörtes. Denn es zeigt sich schon in ihrer frühen Ornamentik, im Dipylonstil, dem sog. »geometrischen« Stil, daß die Figuren häufig mit dem Zirkel — der Zirkel ist nach Ovid, Metam. VIII, 247, eine Erfindung des Perdix, des Schwiegerohnes des Dädalus (was stets auf die Kunst des 7. und 8. Jahrh. zu deuten ist) — konstruiert sind und jedenfalls immer ganz elementar konstruierbar sind. 5-Ecke oder 5teilige Rosetten u. dgl. kommen nicht vor, wohl aber 4-, 8-, 6-Ecke u. dgl. Dagegen kommen 5- und 7teilige Figuren sowohl im kreisförmig-mykenischen wie im »organischeren« Stil des 7. Jahrh. (dem sog. »orientalisierenden« Stil) vor; doch gibt es in diesen Stilen keine Zirkelkonstruktion mehr.

In diese Tendenz der frühen Ornamentik auf völlige Durchsichtigkeit der Verhältnisse paßt die spätere Entwicklung in der Mathematik durchaus hinein. Daß hier zunächst mit ganzen Zahlen alles zustande gebracht werden sollte, ist naheliegend. (Im Einzelnen kann man sich das Problem der $\sqrt{2}$ verschieden entstanden denken: aus der Geometrie oder auch aus der Musik. Vgl. Zeuthen in »Kultur der Gegenwart«, III, Abt. I, 1. Lieferung, S. 36–37.)

Es kommen natürlich de facto schon in den einfachsten Figuren der primitiven Ornamentik (Quadrat, Sechseck) Irrationalitäten vor; aber das konnte man nicht wissen.

Interessant und zu wenig bekannt ist, daß die richtige mathematische Sechsteilung des Kreises als Ornament auf dorischen geometrischen Fibeln (die spätestens aus dem 8. Jahrh. stammen) vorkommt [Buschor], also nicht aus dem Orient stammt, wie Zeuthen meint. Allerdings entsteht diese Figur durch Spielen mit dem Zirkel gewissermaßen von selbst; immerhin ist merkwürdig, daß gerade mit so ziemlich dieser selben Konstruktion (nämlich der des gleichseitigen Dreiecks) noch Euklid seine Elementa beginnt. (I, 1).

»Ausprechbarkeit« unterschieden werden, die sich mehr oder weniger von dem völlig zu Ende »Ausprechbaren« entfernen. Man denke etwa an den eigentümlichen euklidischen Ausdruck »εὐθδεῖαι δυνάμει σύμμετροι« (X, Def. 3) und entsprechend »δυνάμει ὁηταί« (X, Def. 6), der befragt, daß wenigstens die Quadrate der Strecken kommenfurabel sind; ähnlich die sog. »doppelt irrationalen« Strecken usw.

Die Euklidische Klassifikation führte, wie schon gesagt, nur zu den quadratischen Irrationalitäten. In der späteren Entwicklung gab es Erweiterungen in verschiedener Richtung:

1. Durch die Betrachtung »körperlicher Örter« (Kegelschnitte), die kubische Irrationalitäten mit sich brachten (ausgehend von der Dreiteilung des Winkels und der Verdoppelung des Würfels) und bis zur allgemeinsten kubischen Gleichung führten. (Archimeds Kugelteilungsproblem).

Man kann an solchen Aufgaben, wie der Dreiteilung des Winkels sich gut die Weise der Erweiterung der Sphären der mathematisch existierenden Gegenstände vor Augen stellen:

Im Sinne Euklids sind nur durch Kreise und Geraden konstruierbare Gebilde existent, dazu gehören (von einzelnen Ausnahmen abgesehen) die einen gegebenen Kreisbogen drittelnden Teilungspunkte nicht. Indessen scheint andererseits durch den Augenschein evident, daß es ein genaues Drittel jedes Winkels gibt, ebenso wie etwa auch ein Siebentel (z. B. ein regelmäßiges Siebeneck usw.). Man erweitert nun den Kreis der zugelassenen Elementarkonstruktionen und führt als neue Konstruktionsmittel etwa die Kegelschnitte ein. Dabei gelingt es, dadurch, daß man sie als »körperliche Örter« auffaßt (dies tut nach Zeuthen zuerst Menaidmos) die Kontinuität mit den ursprünglich eingeführten Konstruktionsmitteln zu wahren. Es werden jetzt eben als Konstruktionsmittel Kreise und Geraden im Raum, als ihr Produkt Kreiskegel und deren Schnitte mit Ebenen, eben die »Kegelschnitte« verwendet. Dagegen tritt die praktisch leicht durchführbare, aber theoretisch nicht leicht (nur durch Konchoiden) zu beherrschende »Einschiebung« (νεῦσις) zurück¹.

Ähnlich liegt die Sache beim Problem der Würfelverdoppelung, wo sich die Entwicklung von Archytas über Eudoxos zu Menaidmos durchaus im Sinne der schärferen Beschränkung der Konstruktionsmittel und damit der strengeren Existenzbeweise abspielt².

1) Vgl. Zeuthen, Geschichte usw., § 8, S. 79 ff.

2) Zeuthen, l. c., § 9, S. 82 ff.

2. Durch Aufsteigen zu immer höheren Graden: a) durch Erforschung höherer Kurven, der sog. »linearen Örter«¹. Doch gelangten die Griechen auf diese Weise wohl zu Kurven höheren Grades, aber doch nicht zur Gesamtheit aller algebraischen Kurven². Es wäre aber wohl denkbar gewesen, daß sie dazu gelangt, etwa mittels der Graßmann'schen »linealen Mechanismen«³.

3. Durch eine Fortführung und Verallgemeinerung der Euklidischen Konstruktionen im X. Buch, die in des Apollonios verloren gegangener Schrift *περὶ ἀτάκτων ἀλόγων* (de irrationalibus inordinatis) vorgenommen wurde, die durch F. Woepcke⁴ aus einer arabischen (von Abu Othman herrührenden) Übersetzung eines Kommentars des Pappos⁵ zum X. Buche Euklids in ihrem Gedankengang rekonstruiert werden konnte. Danach bestehen die Erweiterungen des Apollonios in zwei Hauptpunkten a) in der Verallgemeinerung der in Euklids Klassifikation auftretenden Binomen zu Polynomen (nach moderner Ausdrucksweise), b) in der Betrachtung zum wenigstens μ^{ter} Wurzeln aus gewissen Potenzen, nämlich Ausdrücken von der Form:

$$\sqrt[\mu]{A^{\mu-\nu} B^{\nu}} \quad (\text{Woepcke, l.c., p. 713/14}).$$

Also auch hier kam man nicht zu der allgemeinsten algebraischen Zahl, ja nicht einmal zu der allgemeinsten durch Wurzelzeichen darstellbaren irrationalen Zahl. Man muß indessen bedenken, daß unsere von der algebraischen Zeichensprache ausgehende Problemstellung den Griechen notwendig schon als Frage fernliegen mußte, vielleicht sogar unerreichbar war. Man muß bedenken, daß Apollonios diese

1) Vgl. Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Kopenh. 1886, S. 226 ff.

2) Zeuthen, l.c., S. 489 – 90 (über den Irrtum Descartes' bezüglich des von Pappus, Coll. math., ed. Hultsch, p. 680 eingeführten »Orts zu $2n$ bzw. $2n - 1$ Geraden); vgl. Geschichte d. Math. im Altertum p. 237/38; Gesch. d. Math. im 16. u. 17. Jahrh., S. 208/9, 210.

3) Über diese vgl. z. B. F. Klein, Vorl. über Anwendung der Diff. u. Integr.-Rechnung auf Geometrie (autograph., 2. Abdr. 1907), p. 266 – 69.

4) Darüber vgl. Apollonius ed. Heiberg, Vol. II, p. 119 – 124, und vor allem F. Woepcke, »Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationnelles d'après des indications tirées d'un manuscrit arabe«. Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences de l'institut impérial de France, Sciences Mathématiques et physiques, Tome XIV. Paris 1856.

5) Woepcke selbst schrieb den Kommentar einem gewissen Vettius Valens zu; Heiberg (Literaturgeschichtliche Studien zu Euklid, Lpz. 1882) zeigte aber, daß Pappos der Verfasser ist.

Irrationalitäten ohne Zweifel alle geometrisch konstruiert hat¹, was einen ganz anderen Problemaspekt hervorruft.

Merkwürdig ist nun, daß sich in dem Kommentar des Pappos Gesichtspunkte finden, die mit der vorhin gegebenen ontologischen Interpretation der Euklidischen Konstruktionen im X. Buch übereinstimmen. Darin möchten wir geradezu einen Beweis unserer Auffassung erblicken, wie sogleich näher erläutert werden wird.

Zunächst findet sich in der Inhaltsübersicht des nicht übersetzten I. Buches des Kommentars Folgendes (Woepcke, l. c. § 19, p. 175):

Nr. 2. Du fini et de l'infini comme principes de la commensurabilité et de l'incommensurabilité.

Nr. 7. De l'existence réelle des quantités incommensurables dans les choses matérielles.

Nr. 8. Des principes métaphysiques (Dieu et la matière) de la commensurabilité et de l'incommensurabilité.

Nr. 9. Que les lignes rationelles existent par convention et non pas naturellement.

Dann kommen folgende wörtlich übersetzte Stellen in Betracht:

p. 693. (Über Euklid): »la droite des deux noms est la première des lignes formées par addition, parce qu'elle est la ligne qui a le plus d'affinité avec la ligne rationelle.

p. 701. (=Apollonius, ed. Heiberg, Vol. II, p. 124, fragm. 35):

»En premier lieu, Euclide nous a donné (la théorie de) celles d'entre elles qui sont ordonnées et homogènes aux fractionnelles; car les irrationnelles se divisent premièrement en inordonnées, c'est-à-dire celles qui tiennent de la matière qu'on appelle corruptible, et qui s'étendent à l'infini; et, secondement, en ordonnées, qui forment le sujet limité d'une science, et qui sont aux inordonnées comme les rationnelles sont aux irrationnelles ordonnées. Or Euclide s'occupa seulement des ordonnées qui sont homogènes aux rationnelles, et qui ne s'en éloignent pas considérablement; ensuite Apollonius s'occupa des inordonnées, entre lesquelles et les rationnelles la distance est très-grande.»

Es ist also von der »Verwandtschaft mit den rationalen Linien« die Rede, davon, daß »die ἄτακτοι ἄλογοι an der ἔλη φθαρτή teil-

1) Vgl. Euklid-Scholien (Elementa Vol. V, ed. Heiberg), p. 414, 15–16 [τῶν ἀπλουστάτων εἰδῶν], ὧν συντιθεμένων γίνονται ἄπειροι ἄλογοι, ὧν τινὰς καὶ ὁ Ἀπολλώνιος ἀναγράφει (aufzeichnet, konstruiert).

haben (μετέχειν)«, daß »die *τακταί* den Rationalen homogen sind und sich nicht beträchtlich von ihnen entfernen«, daß »die Entfernung (*διάστασις, διάστημα*) der *ἄτακτοι* und der *ῥηταί* sehr groß ist« usw.

Wir haben also das deutliche Bewußtsein der verschieden abgestuften Entfernung vom Rationalen (»nicht beträchtlich«, »sehr weit«) der größeren oder geringeren Verwandtschaft (*δμογενής, συγγενής*?) mit dem *ῥητόν*, endlich die Teilhabe am Vergänglichen seitens der *ἄτακτοι* (s. o. Nr. 7) und ebenfalls Beziehung zum Unendlichen, der *τακταί* zum Endlichen (vgl. Nr. 2).

Man könnte sich denken, dies seien erst neuplatonische Züge: Die Stufenreihe zwischen dem *ἀεὶ ὄν* und der *ἐκ γένεσιν* spricht dafür, und besonders, daß sie gemäß der Teilhabe am Vergänglichen bestimmt wird. Auch in manchen Scholien zu Euklid finden sich mit den Gedankengängen des Pappos-Kommentars verwandte Bemerkungen und zwar vorzugsweise an solchen Stellen, die einen neuplatonischen Eindruck machen¹ und z. T. sehr enge Beziehungen zu Proklos' Euklid-Kommentar zeigen. Andererseits kann man nicht leugnen, daß eine solche Stufenreihe doch schon in Platons diairetischer Hierarchie, die Stenzel neuerdings behandelt hat, vorbereitet ist². Man kann auch die Lehre des Speusippos von den Stufen des Seienden gemäß der Folge der idealen Zahlen vergleichen, wie sie von E. Frank auseinandergelegt worden ist³.

Endlich ist zu sagen, daß der in Rede stehende Kommentar des Pappos, wie Eva Sachs bemerkt, in seiner nüchternen Art sich von dem Tone der Scholia Vaticana zu Euklid X, die deutliche Verwandtschaft mit Proclus (in Euclidem I) zeigen, wesentlich unterscheidet⁴.

1) Vgl. Euclidis Elementa ed. Heiberg, Vol. V, in librum X, Nr. 1, 2, 133, 135, insbesondere: p. 414, 16–415, 4; 415, 11–12; 417, 11–20; 417, 21–418, 6; 484, 23–485, 7 (Nr. 1, 2, 135 sind aus den Scholia Vaticana); vgl. auch als Parallelfälle zu p. 417, 11–20: Jamblichus, Vita Pyth. § 247, ferner: Eva Sachs, l. c. p. 38–39 zur Stelle, und p. 71–75.

2) J. Stenzel, Zahl und Gestalt bei Plato und Aristoteles. (Leipzig u. Berlin 1924), p. 2–3, p. 7, p. 110ff., 119–120 und die bekannte Philebos-Stelle 16 D: »... πρὶν ἂν τις τὸν ἀριθμὸν αὐτοῦ πάντα κατὰ τὸν μετὰ τὸ αὐτοῦ ἀπείρου τε καὶ τοῦ ἑνός ...« und 17 H: »μετὰ δὲ τὸ ἐν ἀπειρῷ εὐθύς, τὰ δὲ μέσιν αὐτοῦς ἐκτρέφει ...«

3) Plato und die sogenannten Pythagoreer, Halle a. S. 1923, Beilage XVIII, bef. S. 244–251.

4) Eva Sachs (l. c., S. 71–75) sagt, daß die Scholia Vaticana zu Euklid auf die (verlorene) Fortsetzung des Kommentars des Proklos zurückgehen.

Aus diesen Erwägungen ergibt sich, daß die Auffassung der Irrationalen verschiedener Komplikationsstufe als Wesenheiten verschiedenen Seinscharakters, der sich stufenweise vom Sein der rationalen Gebilde, die den Ideen von allen mathematischen Gegenständlichkeiten am nächsten stehen, entfernt und damit sich der *οὐσία* der *ἐλγὴ φθαρτή* entsprechend annähert, im Grunde schon bei Plato zum wenigsten vorbereitet ist und in der frühen Akademie (Speusippos) wahrscheinlich schon geherrscht hat¹.

Man kann also die philosophische Bedeutung der exakten Konstruktion der Irrationalen, die durch den genauen Aufweis erstens der mathematischen Existenz überhaupt, zweitens des Grades an Komplikation der Synthese der Kreise und Geraden den Seinscharakter dieser Gegenständlichkeiten feststellt, schon für die frühe Akademie aufrechterhalten. —

4. Endlich gibt es in der Antike vereinzelte transzendente Zahlen (eigentlich nur π ; e wird explizit nicht erwähnt). Sie treten bei Archimedes durch Flächen und Rauminhalte gegeben auf.

Die Einführung dieser Größen erfolgt nicht im modernen Sinn als Limiten geradliniger oder ebenflächiger Figuren, sondern nach dem Axiom: Das Ganze ist größer als der Teil, vermittels dessen die Inhalte usw. zwischen gewisse Grenzen eingeschlossen werden, die beliebig wenig Spielraum haben.²⁾

(Vgl. Heiberg, der die Übereinstimmung mit Proklos auf die Benützung einer gemeinsamen Quelle, nämlich eben des Pappos-Kommentars, zurückführt.) Das sachliche Hauptargument ist eben die Verschiedenheit des Tones: sachlich bei Pappos, neuplatonisch-mythisch bei Proklos und den Scholien.

1) Es sei noch auf die Bemerkungen von E. Sachs (l. c., S. 176–177) zur Stelle Gesehe, Buch VII, p. 820E, hingewiesen. E. S. versteht die Stelle: *τὰ τῶν μετρητῶν καὶ ἀμετρώων πρὸς ἀλλήλα ἥτινι φύσει γέγονε* (»Die Sache mit den meßbaren und unmeßbaren Größen, in welchem Wie-Sein (*φύσις*) sie im Verhältnis zueinander geworden sind.«) so: »... wie sich rationale und irrationale Größen ihrer Natur nach zueinander verhalten« und leugnet, daß *φύσις* hier eine philosophische (ontologische) Bedeutung hat. (Gegen die Meinung H. Vogts, Bibliotheca mathematica (3) X, S. 139.) Sie meint, der Vergleich mit dem Brettspiel, der bei Plato dann folgt, gehe auf das kombinierende Verfahren bei der Klassifikation der Irrationalitäten durch Theätet und Euklid. Der dabei auftretende Ausdruck *διαγνώσκειν* (p. 850C) bedeute das »Herauserkennen und Unterscheiden der verschiedenen Klassen«. — Aber man muß eben gerade bei dieser Klassifikation die dabei festgestellte »φύσις« jeglicher Irrationalität ontologisch, als ihr spezifisches Wie-Sein in der Stufenleiter zwischen *ἐν* (dem Rationalen) und dem *ὑπερ* (modern etwa: der transzendenten Zahl) auffassen.

2) Es bedarf dazu bei krummen Längen und Oberflächen besonderer Axiome, vgl. Zeuthen, Gesch. d. M. i. Altertum, S. 175–77.

Diese Inhalte werden aber nicht definiert als Limiten, sondern, wohl auf Grund der anschaulichen Gestalt der einfachen Figuren wie Kreis und Kugel usw., als existent angenommen. Das Exhaustionsverfahren bestimmt bloß ihre Größe.

Darin liegt die Einführung des irrationalen Verhältnisses π (etwa zwischen Kreisfläche und Quadrat des Radius) ohne Konstruktion und daher ohne Beziehung zu der Klassifikation der anderen Irrationalitäten. π steht also ganz vereinzelt da und wird gewissermaßen »ursprünglich geschöpft«. Dies ist von der Antike aus gesehen nicht so erstaunlich wie für uns. Denn für sie war der Kreis eine einfache Figur, wie ja aus seiner Verwendung als elementares Konstruktionsmittel, d. h. als Beweismittel für die mathematische Existenz zusammengesetzter Figuren auf das klarste einleuchtet. Andererseits würde es der antiken Grundanschauung durchaus widersprechen, eine ins Unendliche fortzusetzende konvergente Näherungskonstruktion als Existenzbeweis gelten zu lassen. Es handelt sich bei antiken Existenzbeweisen stets um endliche Konstruktionen!¹

Sachlich liegt hier eine erste, allerdings nur »gefühlsmäßige« Erfassung der Transzendenz von π vor; π kann ja in der Tat auch heute nicht in die algebraischen Zahlen eingereiht werden.

C. Das Kontinuum in der Antike.

Aus den vorhergehenden Darlegungen läßt sich nunmehr leicht entnehmen, daß das Kontinuum in der Antike sämtliche *μεγέθη* oder

1) Vgl. zur ganzen Frage H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter (Leipzig 1874), S. 123 ff.; K. Laßwitz, Geschichte der Atomistik (Hamburg und Leipzig 1896), Band I, S. 177 f. — Hankel sagt (l. c., S. 123): »Der Gedanke, daß man, wie weit man auch in der Reihe der Vielecke gehen möge, jene Kreisfläche nie erreicht, obgleich man ihr immer näher und ganz beliebig nahe kommt, spannt das vorstellende Denken in dem Maße, daß es um jeden Preis diese Lücke, welche gleichsam zwischen der Wirklichkeit und dem Ideal liegt, auszufüllen strebt, und psychologisch gezwungen ist, den — unendlich kleinen oder unendlich großen? — Schritt zu machen und zu sagen: der Kreis ist ein Polygon mit unendlich vielen unendlich kleinen Seiten. Die Alten aber haben diesen Schritt nicht getan; solange es griechische Geometer gab, sind dieselben immer vor jenem Abgrund des Unendlichen stehen geblieben . . . *. — Auf denselben Sachverhalt spielt auch H. Weyl, Symposion I, S. 6–7 an. Indessen scheint für Weyl das antike Verfahren nicht legitim zu sein. Dieser Auffassung können wir nicht zustimmen. Es liegt eben nur eine andere, in gewissem Sinn primitivere Grundauffassung der mathematischen Existenz vor, die an die reine Gestalt (z. B. des Kreises) unmittelbar anknüpft.

λόγοι umfaßt haben muß, also die rationalen und irrationalen, soweit sie bekannt waren (also gewisse algebraische Irrationalitäten und dann als isolierte Größe noch π).

Trotzdem findet sich diese Auffassung nirgends explizit ausgesprochen. Dem stand schon der Unterschied zwischen *ἀριθμός* und *μέγεθος* entgegen, die man keineswegs unter eine gemeinsame Gattung (etwa *λόγοι* oder *ἐνθῆται* oder gar *σημεῖα*) explizit zusammenfaßte.

Das abstrakte Schema aller *λόγοι*, wie es sich aus den Eudoxischen Definitionen (Euklid, Elemente, V, Df. 3 – 5) ergeben würde, wird vollends niemals als Mannigfaltigkeit oder dgl. gefaßt. Alle derartigen »Mengenbildungen« waren der klassischen griechischen Mathematik fremd.

Man hatte allerdings auch gute Gründe für diese Scheu. Sie entsprang der Furcht vor dem Widerspruch oder zum wenigsten den hoffnungslosen Paradoxien, die der Eleate Zenon – in skeptischer Absicht – mittels des Aktual-Unendlichen zustande gebracht hatte. Das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte läßt sich (vgl. dazu P. Tannery¹ und B. Russell²) auf eine mengentheoretische Form bringen. Die Paradoxie läuft, so aufgefaßt, darauf hinaus, daß im Falle des Einholens der Schildkröte durch Achilles, der von diesem zurückgelegte, um ein Vielfaches längere Weg der von jener in derselben Zeit durchmessenen, viel kürzeren Strecke punktwise umkehrbar eindeutig zugeordnet werden kann, indem die gleichzeitig von beiden Läufern innegehabten Punkte einander entsprechen. Dies ist nichts anderes als die bekannte mengentheoretische Tatsache, daß zwei aktual unendliche Mengen gleichmächtig sein können, obwohl die eine ein echter Teil der andern ist, so wie hier der Weg der Schildkröte ein echter Teil des Wegs des Achilles ist.

Dabei handelt es sich hier um zwei verschieden lange kontinuierliche Strecken. Für das Paradoxon ist es gleichgültig, wie man die »Kontinuität« dieser Strecken sich dachte. Tatsächlich meinte man in der Antike und weiterhin bis auf Cantor mit »Stetigkeit« einfach, daß zwischen je zwei Punkten noch unendlich viele andere liegen. Man dachte sich dabei das Kontinuum durch fortgesetzte Teilung entstanden (etwa Aristoteles). Damit ist aber

1) »Le concept scientifique du continu: Zenon d'Élée et Georg Cantor,« *Revue philosophique*, XX, p. 385 ff. (octobre 1885).

2) *The Principles of Mathematics*, Vol. I, § 331 (p. 350) und §§ 340–41 (p. 358–60). Cambridge 1903.

ein neues geometrisches Moment bereits geltend gemacht, was der Entwicklung vorgreift.

Tatsächlich war (vermutlich ¹⁾ die Folge der Zenonischen Paradoxien eine Entwicklung in zweifacher Richtung: einmal zu einem atomistischen Finitismus und andererseits zur methodischen Vermeidung wenigstens des Aktual-Unendlichen unter Zulassung des endlosen Prozesses (*εἰς ἄπειρον ἔχειν* ²⁾).

Der mathematische Atomismus denkt sich nicht mehr die gerade Strecke aus aktual-unendlich vielen Punkten bestehend, sondern aus einer zwar großen, aber endlichen Zahl sehr kleiner Linienstückchen zusammengesetzt, die unteilbare Linien, «Linienatome» (*ἄτομοι γραμμαί*) heißen. Man braucht von dieser finiten Mathematik nicht gering zu denken, es gelang ihr, vermutlich gerade deswegen, weil sie eines Limesverfahrens entraten konnte, zum wenigsten eine große Entdeckung, die Volumenbestimmung der Pyramide und des Kegels ³⁾.

Der Atomismus behält also von Zenos aktual-unendlichen Mengen die »Aktualität« bei, aber nicht die Unendlichkeit. Umgekehrt verfährt die pythagoreische Richtung, die in die große klassische Entwicklung der griechischen Mathematik durch den Archytas-Schüler Eudoxos einmündet. Sie bewahrt das Unendliche, gibt aber die Aktualität preis. Dies Ende dieser Entwicklung läßt sich mit Aristoteles (Phys. III, 7; p. 207 b, 29–31) fo

1) Die historischen Quellen sind sehr dürftig, und es läßt sich keinerlei Entwicklung eindeutig konstruieren. Genau wissen wir nur, 1. daß Zeno das Aktual-Unendliche durch seine Paradoxa ad absurdum führte; 2. daß es eine atomistische finite Mathematik gegeben hat, die bei Plato und Xenokrates noch vorhanden ist. Die Vermutung, daß Demokrit (und vielleicht schon Leukipp) sie ausgebildet hat, liegt sehr nahe. (Sie wird bestritten von Sir Thomas Heath, *A history of Greek Mathematics*, Oxford 1921, Vol. I, p. 181; wie mir scheint, nicht mit durchschlagenden Gründen.) – Hingewiesen sei auf Stenzel (Zahl und Gestalt bei Plato und Aristoteles, S. 72 ff., der in Euklids beschreibenden Definitionen von Punkt, Linie, Gerade usw. atomistische Reste erblickt (l. c. p. 75, Anm. 2). – Vgl. auch O. Toeplitz, »Mathematik und Antike« (die Antike, Bd. I, S. 199); 3. daß Anaxagoras die unendliche Teilbarkeit lehrte; 4. daß die Pythagoreer das Problem der Irrationalen (wenigstens im Falle $\sqrt{2}$) aufwarfen. (Zu welcher Zeit ist sehr umstritten.)

2) Zeno selbst entwickelt als erster den Gedanken eines solchen Prozesses, s. in § 6 b, I C.

3) Demokrit entdeckte diese Volumenbestimmungen, wie wir jetzt aus Archimedes, ad Eratosth. Methodus, praefatio wissen. Eudoxos bewies sie dann streng, vgl. Archimedes, quadratura parabolae, praefatio.

charakterisieren: (οἱ μαθηματικοὶ) οὐδὲ νῦν δέονται τοῦ ἀπείρου, οὐδὲ χρῶνται, ἀλλὰ μόνον εἶναι ὅσῃ βούλονται πεπερασμένην. »Die Mathematiker bedürfen weder jetzt [mehr?] des Unendlichen noch gebrauchen sie es, sondern (sie brauchen) nur (die Tafel), daß es begrenzte Strecken gibt, so groß sie wollen« – d. h. die Mathematik braucht beliebig große (und auch kleine) Größen, aber keine aktual unendlichen. (Die außerordentlich tiefgehende Analyse des Unendlichkeitsbegriffs durch Aristoteles wird uns noch später (in § 6b IC) beschäftigen. Hier soll lediglich das auf das Kontinuum Bezügliche kurz dargestellt werden.)

Die Auseinandersetzung zwischen atomistischer und »stetiger« Mathematik spielt verschiedentlich eine Rolle bei Aristoteles und vor allem in der peripatetischen Schulschrift *περὶ ἀτόμων γραμμῶν* (Verfasser vermutlich Theophrast, gerichtet gegen Xenokrates.) Die mathematisch treffendsten Argumente gegen die »Linienatome« sind erstens, daß irrationale Verhältnisse in der atomistischen Mathematik unmöglich sind, da ja die unteilbare Strecke selbst als universelles Maß aller Strecken in ganzen Zahlen dienen kann, womit alle Verhältnisse rational werden. Zweitens, daß man mittels der bekannten geometrischen Konstruktion (Euklid I, 10) jede noch so kleine Strecke halbieren kann. Im Grunde gehen aber beide Argumente (was man zu wenig beachtet hat) auf eine Grundvoraussetzung zurück, die in der griechischen Grundvorstellung vom Mathematischen überhaupt tief verwurzelt ist.

Diese Grundvoraussetzung lautet: Es gibt absolut exakte einfache Figuren, wie den Kreis oder das Quadrat, – oder: es gibt reine elementare Grundgestalten. Der Elementaraufbau (die *στοιχείωσις*) der Mathematik zeigt, daß mit der Geraden und dem Kreis alle anderen reinen Gestalten gegeben sind. Sowohl der Nachweis der Existenz irrationaler Verhältnisse, wie auch die unbefränkte Anwendbarkeit der Halbierungskonstruktion beruht offenbar auf diesen »reinen« absolut exakten Figuren. Diese sind für die Griechen auch durchaus nicht Ergebnisse eines Grenzprozesses, sondern endliche Gegebenheiten. Das bedeutet einen wesentlichen Unterschied zur modernen Mathematik, wo die Irrationalzahl durch einen unendlichen Prozeß definiert wird.

Somit – von diesen Beweisen gegen den Atomismus abgesehen – wird das Irrationale in der aristotelischen Vorstellung des Kontinuums nicht berücksichtigt. Aristoteles macht sich keine Gedanken darüber, wie die irrationalen, durch Konstruktion gegebenen Punkte auf der Geraden sich »zwischen« die durch Teilung gegebenen ein-

schieben, wo doch schon diese für sich ein »Kontinuum« ausmachen.¹ Alle derartigen »mengentheoretischen« Fragen stellte die Antike nicht. Sie verlieren auch für eine konsequent »potentielle«, genetische Auffassung des Kontinuums sehr an Schärfe.

Das Kontinuum ist also für Aristoteles nichts aktual Unendliches. Es wird, bei Gelegenheit der Erörterung des Unendlichkeitsbegriffs selbst, oft betont, daß auch die endlose Teilbarkeit des Kontinuums keineswegs eine aktuelle Unendlichkeit impliziert². Allerdings wird ein Unterschied gemacht zwischen dem Unendlichen in der (endlosen) Zeit und dem in der endlosen Teilung des Kontinuierlichen³.

Das Unendliche ist zwar immer im Werden und Vergehen (*ἐν γενέσει καὶ φθορᾷ*), aber doch mitunter (bei der Zeit z. B.) in der Weise, daß das Gewordene oder das Erfaßte (*τὸ λαμβανόμενον*) wieder vergeht, während ständig etwas Neues entsteht (*ἄλλο καὶ ἄλλο*); – mitunter aber auch so, daß das Entstehende bleibt. (Dies ist bei der unendlichen Teilung des Kontinuierlichen der Fall.) D. h.: die Teilpunkte der früheren Teilungen bleiben bestehen; es kommen immer neue Zwischenpunkte hinzu, das Netz der Teilung wird immer dichter, die Teilpunkte häufen sich immer mehr, wenn auch ihre Zahl und Dichte in jedem konkreten Stadium des Teilungsprozesses endlich bleibt.

1) Solche Fragen treten schon innerhalb des rationalen Bereichs auf. Ist etwa durch fortgesetzte Dichotomie eine überall dichte Menge gegeben, wie reißt sich dann etwa der drittende Punkt ein? – Andererseits ist ja sogar die Menge aller algebraischen Zahlen mit der der ganzen gleichmächtig. Die gesamten Definitionsmethoden der Antike führten überhaupt nicht über die abzählbare Menge hinaus. Auch insofern war die mengentheoretische Uninteressiertheit der Antike berechtigt. Nur, wenn man den sämtlichen Eudoxischen *λόγοι* zugleich die mathematische Existenz zugesprochen hätte, wäre man zu einer nicht abzählbaren Menge gelangt, zu derselben, die wir heute Kontinuum nennen. Freilich, was diese Existenzsetzung *en bloc* eigentlich besagt, darüber sind wir uns heute noch nicht im klaren. Eine solche gewagte Existenzsetzung widersprach durchaus dem Geist der antiken Mathematik.

2) *Phyl. III, 6 (206 a 16–18): τὸ δὲ μέγεθος, ὅτι μὲν κατ' ἐνέργειαν οὐκ ἔστιν ἄπειρον, εἴρηται· διαιρέσει δ' ἔστιν· οὐ γὰρ χαλεπὸν ἀνελεῖν τὰς ἀτόμους γραμμάς.*

3) *Phyl. III, 6 (206 a 25–29): ἄλλως δ' ἐν τῷ χρόνῳ δῆλον τὸ ἄπειρον... καὶ ἐπὶ τῆς διαιρέσεως τῶν μεγέθων. ὅλως μὲν γὰρ οὕτως ἔστι τὸ ἄπειρον, τῷ αὖ ἐὶ ἄλλο καὶ ἄλλο λαμβάνεσθαι καὶ τὸ λαμβανόμενον μὲν αὖ εἶναι πεπερασμένον, ἀλλ' αὖ γέ ἕτερον καὶ ἕτερον. (206 a 33–b 3) ἀλλ' ἐν μὲν τοῖς μεγέθεσιν, ὑπομνησθέντος τοῦ ληφθέντος, τοῦτο συμβαίνει, ἐπὶ δὲ τῶν ἀνθρώπων καὶ τοῦ χρόνου φθειρομένων οὕτως ὥστε μὴ ἐπιλείπειν.*

Damit ist der klassische antike Begriff des Kontinuums erreicht, in dem allerdings mathematisch keinerlei tiefere Probleme sichtbar werden.

Diese ergaben sich erst aus der neueren »abendländischen« Entwicklung.

II. Die weitere Entwicklung in der neueren Mathematik bis auf Hilbert.

A. Die »abendländische« Definition durch konvergente unendliche Prozesse.

Es ist hier nicht der Ort, die Geschichte des Kontinuumproblems darzustellen. Deshalb muß es genügen, nach den antiken Wurzeln des Problems die hauptsächlichlichen modernen, d. i. »abendländischen« Stellungnahmen dazu kurz zu erörtern.

Der grundlegende Unterschied der sog. modernen, d. h. abendländischen neueren Mathematik gegenüber der antiken (die arabische Mathematik möge außer Betracht bleiben) ist die Einführung der unendlichen Konstruktion als legitimer Definition einer mathematischen Entität. (Definition durch ein Grenzverfahren (limes), einen konvergenten unendlichen Prozeß)¹. Es wurde schon gesagt und sei nochmals wiederholt: die antike Berechnung etwa des Kreisinhalts durch Archimedes gibt zwar eine (im Prinzip unbegrenzt genaue) Annäherung an die Zahl π , aber diese Zahl π wird keineswegs durch diesen approximativen Prozeß definiert. Vielmehr ist der Kreisinhalt als eine Grundeigenschaft der einfachen reinen Figur (Gestalt) Kreis a priori mathematisch existent. Dadurch ist das Verhältnis Kreisinhalt zum Inhalt des Quadrats über dem Radius eine legitime mathematische Entität, trotzdem es nicht im üblichen Sinne als konstruierbare Irrationalität in die Stufenfolge der Irrationalitäten nach Euklid und Apollonios eingegliedert werden kann. Es ist übrigens, wie schon erwähnt, die einzige solche »transzendente« Zahl, die in der antiken Mathematik verwendet wird. Alle antiken Quadraturen, Kubaturen, Rektifikationen usw. sind allein von π abhängig. Umfomehr sind alle antiken Definitionen algebraischer Zahlen (mittels übereinander gebauter

1) Der erste, der »die Grenze geradezu als eine durch Terme einer Folge (series) definierte neue Zahl auffaßte, deren Ermittlungsart eine neue Rechnungsart bedeuten sollte«, war vermutlich James Gregory in der Einleitung zu seiner »Vera circuli et hyperbolae quadratura«, Padua 1667 (Vgl. H. Wieleitner, Geschichte der Mathematik II, 1; Sammlung Schubert Nr. LXIII [Leipzig 1911] S. 116; Eneström, Bibliotheca mathematica X, 348f.). — Die Notwendigkeit der Konvergenz ist sehr spät, eigentlich erst im 19. Jahrhundert (Gauß, Abel, Cauchy) voll eingeflehen worden.

Quadrat- und Kubikwurzeln usw. usw.) prinzipiell finit. Für uns sind die Wurzelzeichen nur Abkürzungen für unendliche Prozesse (etwa Kettenbrüche u. dgl.); für die Antike stehen an ihrer Stelle endliche Konstruktionen. Der Umfang der der Antike bekannten algebraischen Zahlen war de facto begrenzt. Grundfänglich wäre es möglich gewesen, eine beliebige algebraische Zahl durch die endliche Konstruktion einer beliebigen algebraischen Kurve mittels eines Grassmannschen »linealen Mechanismus« zu definieren.

Über alle diese endlichen Konstruktionen gehen die modernen konvergenten unendlichen Prozesse grundfänglich hinaus. Immerhin bleibt es zunächst bei einer beschränkten Benutzung solcher Prozesse, indem diese als Konstruktionen einzelner reeller Zahlen (entsprechend den antiken *λόγοι*) verwandt werden. Von einer existentiellen Setzung aller reellen Zahlen ist zunächst keine Rede, — auch nicht etwa bei Descartes anlässlich seiner Einführung der Koordinaten. Denn auch Descartes sucht doch nur das geometrische Analogon zu den elementaren arithmetisch-algebraischen Operationen (wobei er, wie schon bemerkt, die allgemeinsten algebraischen Operationen nicht einmal erreicht)¹. Von transzendenten Zahlen ist außer π nur noch e bekannt, und zwar ebenso wie π geometrisch definiert, mittels des Hyperbelinhalts. (Nicolaus Mercator, *Logarithmotechnica* 1667.) [Zeuthen S. 56, 314f.; vgl. F. Klein, *Elem. Math. v. höh. Standpunkt*, Bd. I, S. 336ff.]

Der Begriff einer völlig willkürlichen reellen Zahl und damit der Menge aller dieser Zahlen entwickelt sich erst im 19. Jahrhundert, und nicht etwa direkt, sondern auf Grund der Idee der allgemeinen Funktion. Die Entwicklung des Funktionsbegriffs ist also der Weg, der zum modernen Kontinuumproblem führt.

B. Die Entwicklung des allgemeinen Funktionsbegriffs bis 1750.

Schon im späten Mittelalter um 1370 hatte Nicole Oresme² eine anschauliche Vorstellung, wenn auch keinen mathematisch klaren

1) Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*, S. 204. Die im Text folgenden Seitenzahlen beziehen sich alle auf dieses Werk.

2) Über Nicole Oresme s. vor allem H. Wieleitner: I. »Der Tractatus de latitudinibus formarum«, *Bibliotheca mathematica* (3) XIII, S. 115–145 und II. »Über den Funktionsbegriff und die graphische Darstellung bei Oresme«, *Bibl. Math.* (3) XIV, S. 193–243. — Das Werk Oresmes war bislang nur in einer verkürzten Bearbeitung bekannt, P. Duham entdeckte drei Handschriften des Originals in der Bibliothèque nationale in Paris und überlieferte Teile der einen: (fonds latins 7371, fol. 214^r–266^r); eine weitere

Begriff einer beliebigen Funktion. Er wurde darauf durch den scholastischen Begriff der *intensio et remissio formarum* (seit Hein-

Handschrift ist auch in Basel (öffentl. Bibliothek, N° F III 31 [4°]; fol. 2^r bis fol. 29^r). — Duhem, *Études sur Léonard de Vinci*, III. Série (Paris 1913), gibt nur französische Auszüge, Wieleitner (l. c. II) gibt Stücke des lateinischen Textes nach Duhems Abschrift.

Oresme gibt keine Darstellung von »empirischen« Funktionen, wie man häufig liest. Das würde ihm zu Unrecht moderne Ideen untergeschoben. Tatsächlich gibt er so etwas wie eine typische Darstellung der Möglichkeit der Variation von Intensitäten (Wärme z. B.) mit der Zeit oder entlang einer räumlichen Erstreckung. Die Figuren schließen sich keineswegs an die Wirklichkeit an, sondern entsprechen beinahe den Zeichnungen im Skizzenbuch des Villars de Honnecourt. (Vgl. zur ersten Orientierung über diese etwa J. v. Schöffer, *Die Kunst des Mittelalters* [die sechs Bücher der Kunst, 3. Buch, Berlin-Neubabelsberg, Akad. Verlagsges. Athenaion, o. J.], S. 83 u. 84. Man beachte besonders die Zeichnung des Löwen [Fig. 94] »contrefait au vif«, die durchaus nicht naturalistisch ist.) Die »formae« [substantiales wie accidentales], deren »latitudo« [= Variationsweise, Schwankungsmöglichkeit] dargestellt wurde, waren zunächst durchaus keine physikalischen Größen, sondern etwa die »charitas in homine«, die zu- und abnimmt und »magis et minus per diversa tempora habetur« (Petrus Lombardus, *Sententiarum libri IV.*, lib. I, Dist. XVII. [ca. 1150], f. Wieleitner, l. c. XIV, 195, Anm. 3). Heinrich (Goethales) von Gent (1217–1293) spricht dann zuerst von *intensio et remissio* und daß *ratio et causa augmentationis* zu untersuchen sei (l. c. XIV, 196). — Erwähnt sei noch, daß Bradwardine († 1399) von den *infiniti gradus in omni latitudine* spricht und daß Gregor von Rimini (1344) eine *latitudo* als doppelt so groß wie eine andere bezeichnet, also sie mißt (l. c. XIV, S. 196/97).

Wieleitner bestreitet, daß Oresme die Koordinatendarstellung erfunden habe und billigt ihm höchstens eine »Ordinatengeometrie« (ohne den Begriff der Abzisse) zu. Ferner tadelt er seine schwankende und unscharfe Begriffsbildung. Man muß aber bedenken, daß es sich hier um eine frühe Stufe einer selbständigen (nur wenig von der Antike beeinflussten) Konzeption neuer, spezifisch »abendländischer« (also wohl »nordisch bestimmter«) mathematischer Begriffe handelt.

Es liegt hier bei Oresme m. E. die Ursprungsstätte der wichtigsten Begriffe der neueren Mathematik: Funktion, bestimmtes Integral, Ableitungen aller Ordnungen (als Beschleunigungen verschiedener Ordnung auftretend), Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze (gebrochene Exponenten), — dies letzte im »Algorismus proportionum«, vgl. H. Hankel, *Zur Geschichte d. Math. im Altertum u. Mittelalter*, S. 350f.

Auch in der Frage des Einflusses dieser Begriffsbildungen auf die spätere Zeit scheint mir Wieleitner zu absprechend zu sein. Es hat eben der übermächtige Einfluß der Antike seit der Renaissance vieles Mittelalterliche scheinbar verschwinden lassen. (Vgl. das von Wieleitner selbst Beigebrachte: für Descartes, XIV, S. 241 l. c., Anm. 2, 4, 5; für Galilei, S. 242f.).

rich von Gent) geführt, d. h. die allgemeine Idee des Wachsens und Abnehmens einer »Qualität« oder »Intensität«, wie wir heute sagen würden, mit der Zeit. Dieser Funktionszusammenhang wurde durch eine (allerdings im einzelnen, von ganz einfachen Fällen abgesehen, phantastisch ausgestaltete) Kurve dargestellt. Für unsere gegenwärtige Fragestellung ist nun das Entscheidende, daß hier bei Oresme der allgemeine Begriff der Funktion mit tiefblickender Anschauungskraft entdeckt wird, wenn auch seine begriffliche Fassung weit entfernt von letzter Schärfe ist. Der allgemeine Funktionsbegriff findet sich hier schon eigentlich nach den beiden Seiten, die später von ausschlaggebender Bedeutung werden, konzipiert. Einmal skizziert Oresme einen systematischen Aufbau immer komplizierterer funktionaler Gesetzmäßigkeiten (uniformis, uniformiter difformis, difformiter difformis, uniformiter difformiter difformis, difformiter difformiter difformis usw. usw.). Es werden auch Zahlenreihen (arithmetische Reihen höherer Ordnung u. dgl.) zur Beschreibung der Gesetzmäßigkeiten herangezogen. Und dann kommt zweitens bei ihm auch so etwas wie eine ganz willkürliche Funktion zur Geltung, in Gestalt einer beliebigen, aus irgendwelchen Gestalten zusammengesetzten Linie. Freilich wird der Ansat nicht durchgeführt; Oresme kommt nur zu einer Kombination von endlich vielen elementaren Figuren (Kreisbögen und gebrochenen Linien)¹. Immerhin ist dazu zu bemerken, daß Oresmes Erörterung sich stets nur auf eine »hora«, eine »Stunde« als begrenzten Zeitabschnitt bezieht. (Die Zeit bezeichnet i. A. die unabhängige Variable.) Würde man immerfort Stunden bis ins Endlose dazu nehmen, dann käme man zu einer Mannigfaltigkeit von Kombinationen von der Mächtigkeit des Kontinuums. Denn man kann jede auftretende Elementarfigur mit einer Zahl bezeichnen und kommt dann auf eine Zahlfolge bzw. auf die Menge aller Zahlfolgen. Oresme hat diese Betrachtung nicht², aber er denkt sich die Elementarfiguren selbst »auf unendliche Weise variiert«³.

Diese genialen Vorahnungen wurden von der systematisch fortschreitenden Mathematik, die allerdings ihre Begriffsbildung erst wirklich streng zu sichern hatte, erst ganz allmählich wieder erreicht. Der allgemeine Funktionsbegriff entwickelte sich sehr langsam.

1) f. Wieleitner, Bibl. Math. (3) XIII, S. 138, Fig. 9 u. 10.

2) l. c. XIV, 205, Anm. 2.

3) l. c. XIII, S. 139: »quas pono gratia exempli [figuras] possunt infinite variari semper repraesentando latitudinem de qua est intentio sive sermo«.

Cavalieri faßte (ebenfalls in genialer Intuition und mit ungenügender Schärfe) den Begriff des Integrals irgend einer Kurve (Zeuthen, l. c., S. 256 ff.) Bei Pascal findet sich sodann (1659)¹ ein allgemeiner Satz über partielle Integration bewiesen, in dem zwei allgemeine Funktionen (Kurven) auftreten. Die allgemeinen kinematischen Methoden von Torricelli und Roberval (1668) zur Lösung des sog. Tangentenproblems beziehen sich auf eine beliebige Kurve (l. c., S. 321 ff.). Barrow, Newtons Lehrer, formuliert und beweist einen allgemeinen Umkehrungssatz bezüglich des Tangentenproblems und seiner Umkehrung, der für alle Kurven gelten soll, (l. c., S. 352 ff., bes. S. 354) – es handelt sich tatsächlich natürlich nur um differenzierbare Kurven. Damit kommen wir schon bis an die Schwelle der Differential- und Integralrechnung (Newton und Leibniz), die sich auf allgemeine Funktionen bezieht.

Leibniz hat im Gegensatz zu Barrows und Newtons geometrisch-kinematischer Methode (die innerlich, über Napier (1550-1617) noch mit den alten Oresmeschen Konzeptionen zusammenzuhängen scheint), zuerst den allgemeinen arithmetisch-analytischen Funktionsbegriff gefaßt (August 1673, in der Handschrift *Catalogue critique* Nr. 575, überschrieben »Methodus tangentium inversa seu de functionibus«)². Über die Descartes'sche algebraische Gleichung hinausgehend, wird der allgemeine Begriff einer analytischen Relation eingeführt und dem geometrischen Funktionsbegriff, der Kurve, wird das allgemeine Fortschrittsgesetz einer unendlichen Reihe gegenübergestellt. Außerdem aber beschreibt er die funktionale Abhängigkeit bereits 1673 in abstrakten Begriffen. Schritt für Schritt nähert sich dann Leibniz dem allgemeinen analytischen Funktionsbegriff (in Aufsätzen in den *Acta Eruditorum* 1692–1694), den er spätestens 1696 endgültig erreicht. (September 1694: von einer Variablen v : »quantitas quomodocunque formata ex indeterminatis et constantibus«; August 1696: »quantitates utcunque datae per indeterminatam x et constantes« oder »algebraice vel transcendenter dependentes ab x et constantibus«, welche mit X^1, X^2, \dots bereits systematisch

1) Lettres de H. Dettonville sur quelquesunes de ses Inventions en Géometrie. – Zeuthen, l. c. S. 270 ff.

2) Vgl. darüber und über das Folgende die grundlegende Arbeit von D. Mahnke »Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis« (Abh. d. Preußischen Akad. d. Wiss., Jahrg. 1925, Math.-Phys. Kl. Nr. 1), § 12–15. Besonders Seite 44–45; 47–52.

bezeichnet werden.)¹. Damit ist im wesentlichen schon der Begriff erreicht, den Euler später einen »analytischen Ausdruck« nennt.

Bei diesen Untersuchungen ist allerdings nur jeweils eine (oder 2) bestimmte Kurve bzw. Funktion Gegenstand der Betrachtung. Die Mannigfaltigkeit aller möglichen Kurven bestimmter Art spielt noch keine Rolle. Es ist daher auch kein Anlaß, den Begriff der willkürlichen Kurve zu präzisieren.

Über die bestimmte konstante Kurve (Funktion) geht hinaus die Variationsrechnung. Sie entsteht, als in gewissem Maß allgemeines Verfahren, etwa um 1700 (Jakob Bernoulli 1697)², und wird um 1744 von Euler als systematische Disziplin begründet³. Hier treten zuerst gewissermaßen variable Kurven auf oder es werden unendlich viele Kurven in Betracht gezogen, von denen eine ausgezeichnet werden soll⁴. Trotzdem genügt es zur Lösung der Aufgabe, neben der (als gefunden angenommenen) verlangten Kurve eine geeignete Vergleichskurve zu betrachten, sodaß also – wenigstens in den frühen Stadien der Variationsrechnung – ein explizites Eingehen auf die Gesamtheit der möglichen Kurven nicht nötig ist⁵. Das Interesse richtet sich eben nur auf das eine »extremale« Element, ähnlich wie auch bei den gewöhnlichen Maximalaufgaben.

C. Die Idee der »ganz willkürlichen« Funktion.

Dagegen wurde der Begriff der »ganz willkürlichen« Funktion bei einer anderen Aufgabe, die in der Mitte des 18. Jahrhunderts auftaucht, notwendig: bei dem berühmten Problem der schwingen-

1) Vgl. Mahnke, l. c. S. 51. An dieser Stelle wird auch über die Entwicklung der Terminologie bis zu dem heutigen Gebrauch des Wortes *functio* ausführlich berichtet, die der gemeinsamen Arbeit Leibnizens und der Brüder Jakob und Johann Bernoulli in den Jahren 1694–98 verdankt wird.

2) Newton behandelt 1686 die erste Variationsaufgabe (Rotationskörper kleinsten Widerstandes), Johann Bernoulli stellt 1696 das Problem der Linie kürzesten Falles und löst es durch einen besonderen Kunstgriff. Aber erst Jakob Bernoulli gibt ein allgemein verwendbares Prinzip.

3) *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. Lausanne u. Genf 1744. (Ostwalds, Klassiker Nr. 46).

4) Johann Bernoulli: »Der Sinn der Aufgabe [der Brachistochrone] ist der: unter den unendlich vielen Kurven, welche . . ., soll diejenige ausgewählt werden, längs welcher . . .« (Ostw. Klaff. Nr. 45, § 5).

5) Vgl. Jakob Bernoulli (Ostw. Klaff. Nr. 46 S. 15): »Ist $ACEDB$ die verlangte Kurve . . . und sind C und D zwei beliebig nahe Punkte auf ihr, so ist das Kurvenstück CED unter allen Kurvenstücken, welche C und D zu Endpunkten haben, das, welches der schwere Punkt, der von A aus

den Saite¹. d'Alembert (1747) kam auf eine Lösung, die zwei willkürliche Funktionen enthielt. Er dachte sich darunter zwei analytisch ausdrückbare Funktionen. Euler (1748) dagegen bestimmte die beiden Funktionen geometrisch durch willkürlich gezogene Kurven², wogegen sich d'Alembert verwahrte. Daniel Bernoulli gab nunmehr (1753) eine neue Lösung, die darauf hinauslief, die Eulerschen »ganz willkürlichen« Kurven durch trigonometrische Reihen darzustellen. Die Möglichkeit einer solchen Darstellung wurde aber nicht sofort anerkannt, d. h. für nicht allgemein gehalten. Die Frage blieb ungelöst (obwohl noch Lagrange sich darum bemühte) und erst 1807 sprach Fourier den Satz aus, daß eine ganz willkürlich (graphisch) gegebene Funktion sich durch eine trigonometrische Reihe darstellen lasse, deren Koeffizienten er durch Integrale bestimmte. Die Konvergenz der Fourierschen Entwicklung wurde allerdings, für eine weite Klasse von Fällen, erst 1829 von Dirichlet erwiesen (für Funktionen, die durchgehend integrierbar sind und nicht unendlich viele Maxima und Minima haben).

Prinzipiell und in der für unsere jetzige Problemstellung wichtigen Hinsicht heißt das: die »ganz willkürliche«, graphisch gegebene Funktion läßt sich zwar nicht durch einen endlichen, geschlossenen

fällt, in kürzester Zeit durchmißt. Würde nämlich ein anderes Kurvenstück *CFD* in kürzerer Zeit durchmessen werden, so würde . . .« – Vgl. Euler, l. c. Kap. 1, Lehrs. IV (p. 42); Kap. 2, Aufg. I (p. 46); Aufg. V (p. 77) ufw.

1) Vgl. darüber die schöne Darstellung Riemanns in seiner Habilitationsschrift »Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe« (1854) [Gef. Werke¹ S. 213 ff.] §§ 1–3, und in den »Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen«, hg. v. Hattendorff (Braunschw. 1869): § 21, §§ 74–78, bes. § 78.

2) Es gibt bei Euler zwei Funktionsbegriffe, die nicht in Beziehung gesetzt sind. Erstens: »functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitativis constantibus«. (Introd. in an. inf. 1748 t. I, p. 4.) Diesem Funktionstypus entspricht die *curva continua*. Es gibt aber außerdem noch beliebig »libero manus ductu« gezeichnete Kurven: »curvae discontinuae seu mixtae seu irregulares«. Der Ausdruck *continuae* bzw. *discontinuae* bezieht sich also darauf, daß die Kurven in ihrer ganzen Ausdehnung durch ein Gesetz darstellbar sind bzw. in disparate Stücke auseinanderfallen (etwa wie eine Parabel, die sich in eine Hyperbel fortsetzt). Es handelt sich also nicht um unseren heutigen Stetigkeitsbegriff, der von Cauchy stammt. Die *curvae discontinuae* hielt Euler für analytisch nicht darstellbar. (Vgl. dazu die historische Einleitung in H. Hankels »Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen« (1870), Ostwalds Klassiker d. exakt. Wiss. Nr. 153.)

analytischen Ausdruck, aber durch eine unendliche Reihe mit gesetzmäßig gegebenen Koeffizienten ausdrücken — unter den Dirichletschen Bedingungen.

Das erscheint zunächst paradox, aber man muß bedenken, daß natürlich die unendlich vielen Koeffizienten nur durch ständige Hinzunahme neuer gegebener Kurvenpunkte, die man sich etwa immer dichter angeordnet denken kann, numerisch berechnet werden können. Das Merkwürdige ist also nur, daß die diskrete Menge der Koeffizienten die kontinuierliche Kurve bestimmt. Aber dies ist gerade wegen ihrer Kontinuität (im Cauchyschen, also modernen Sinne) der Fall. Denn die Stetigkeit befagt gerade, daß, wenn man etwa eine irrationale Argumentstelle x durch rationale Zahlen approximiert, man dann gleichzeitig durch die entsprechenden Funktionswerte den Wert $f(x)$ in der erstgenannten Stelle x als Limes erreicht, d. h. mit den Funktionswerten an den rationalen Argumentstellen ist schon die ganze Funktion gegeben und diese rationalen Stellen kann man bekanntlich leicht in eine abzählbare Reihe ordnen.

Die willkürliche stetige (oder, wie man zeigen kann, auch unstetige, aber den Dirichletschen Bedingungen unterworfenen) Funktion ist im wesentlichen darstellbar durch eine willkürliche Zahlenreihe oder Folge — oder, wenn man will, eine »zahlentheoretische Funktion« (bei der Argumente und Werte ganze Zahlen sind). Man sieht also, daß der Begriff der willkürlichen Funktion den Begriff der willkürlichen Zahlenfolge — und damit der willkürlichen reellen Zahl, die durch eine Zahlfolge bestimmbar ist — einschließt.

Wir kehren nun fozufagen die Betrachtung um: In der graphisch gegebenen willkürlichen stetigen Funktion sehen wir ein anscheinend anschauliches Bild einer willkürlichen reellen Zahl. Insbesondere, wenn die Funktion periodisch ist, d. h. sich nach einem endlichen Intervall identisch wiederholt, erscheint die gezeichnete Kurve als eine echte, endliche Gestalt¹. So wäre also die willkürliche periodische stetige Funktion und damit auch die willkürliche Zahlfolge ein anschauliches endliches Phänomen!

Aber dies ist ein offener Irrtum! Schon daraus kann man dies entnehmen, daß die »entsprechende« zahlentheoretische Funktion offenbar, als völlig willkürliche, nicht endlich übersehbar ist. Eine nähere Überlegung lehrt, daß an jenen stetigen

1) Eine Figur ($\sigma\chi\eta\mu\alpha$) im antiken Sinn.

Kurven nicht ihre Gesamtgestalt in dem gegenwärtigen Problemzusammenhang das Wesentliche ist, sondern die Möglichkeit, aus ihr in einem unendlichen Teilungsprozeß eine immer dichter werdende Menge von Punkten mit rationalen (oder auch algebraischen) Abszissen herauszuheben. Nur infolge dieser Möglichkeit hat die graphisch gegebene Kurve die Fähigkeit die willkürliche stetige Funktion darzustellen.

Es verhält sich also mit jener graphisch gegebenen Eulerschen Funktion nicht anders als mit einer echten werdenden Folge, deren Glieder eines nach dem andern in der Zeit gegeben werden.

Es handelt sich also um jene Gegebenheitsweise eines anschaulichen Kontinuums, bei der die unbefchränkte Möglichkeit besteht, in den sog. »Innenhorizont« hineinzugehen. (Diese Dinge sind von mir in einer früheren Arbeit ausführlich erörtert worden¹ und können deshalb hier übergangen werden.)

Es ist also nur Schein, daß man eine gänzlich willkürliche stetige Funktion als geschlossenes Gebilde »geben« kann. Man kann sie eben in ihrer unendlichen (endlosen) Ausdehnung nicht anders geben als durch ein »Gesetz« — d. h. man kann sie als willkürliche nicht »geben«. Sie ist kein phaenomenon dabile.

Der Schein der *dabilitas* entsteht durch ein letztes antikes, »geometrisches« Element in Eulers Mathematik,² wo doch der sonstige Sachzusammenhang ganz »modern« (abendländisch) ist. Es ist in der Mathematik des 18. Jahrhunderts nicht mehr erlaubt, Gestalten als elementare Gebilde zu nehmen, wie die Antike den Kreis als elementare Gestalt auffaßte (s. o. S. 143, 146). Denn in der neueren Mathematik dienen allgemein endlose (konvergente) Prozesse als Definitionen. Es werden, seit dem Ende des 17. Jahrhunderts in immer steigendem Maße, mathematische Gebilde in dieser Weise eingeführt, während die geometrischen Definitionen verschwinden. Die »exakten« geometrischen Figuren sind selbst Limiten. Dieser geschichtliche Prozeß setzt sich im 19. Jahrhundert fort und führt schließlich zur vollständigen »Arithmetisierung« der Mathematik.³

1) Dieses Jahrbuch Bd. VI, S. 472—477.

2) Wie es ähnlich auch bei seiner Variationsrechnung hervortritt, wo es erst von *L a g r a n g e* überwunden wird. — In sachlicher Hinsicht sei auf unsere Betrachtung im Math. Anh. zu § 3, III am Schlusse verwiesen!

3) Freilich geht es bei dieser Entwicklung nicht ohne Krisen ab. Eine solche kritische Periode begann gegen 1800, wo man die Konvergenz der benutzten Prozesse sorgfältig zu untersuchen begann, nachdem man sich

Auch die weitere Entwicklung des Funktionsbegriffs unterliegt dieser Tendenz zur Arithmetisierung. Anstelle von Eulers graphisch vorliegenden willkürlichen Kurven tritt Dirichlets abstrakte Definition: »Eine Funktion heißt y von x , wenn jedem Werte der veränderlichen Größe x innerhalb eines gewissen Intervalls ein bestimmter Wert von y entspricht; – gleichviel ... ob die Abhängigkeit durch mathematische Operationen ausgedrückt werden kann oder nicht.« Diese Definition nennt H. Hankel¹ eine »reine Nominaldefinition«. Er sagt von ihr, sie reiche für die Bedürfnisse der Analysis nicht aus, da Funktionen dieser Art allgemeine Eigenschaften nicht besitzen. Das letztere ist nicht richtig;² aber es liegt in der Tat eine wahre Kluft zwischen dieser allgemeinsten Definition und den konkreten Konstruktionen der Analysis.

Die allgemeine unstetige Funktion Dirichlets³ ist noch viel weniger vorstellbar als die allgemeine Zahlfolge. Denn die Menge ihrer Argumente läßt sich nicht abzählen. Die Funktion hängt gewissermaßen von einer nichtabzählbaren Menge von Bedingungen ab, sie ist ein durch und durch transfiniten Begriff.⁴

bisher hauptsächlich auf seinen »mathematischen Takt« verlassen hatte. Die zweite kritische Periode wird vor allem durch Weierstraßens Tätigkeit gekennzeichnet, der die ineinander eingeschachtelten Grenzverfahren zu behandeln lehrte und die reelle Zahl scharf definiert zur Grundlage der Infinitesimalrechnung machte, aus der das Unendlichkleine verschwand. Die dritte kritische Periode ist die gegenwärtige, in der der Begriff des Aktual-Unendlichen, der in der Mengenlehre so große Triumphe feierte, angegriffen wird. In diesen Forschungszusammenhang gehören auch die gegenwärtigen Untersuchungen.

1) Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen, 1870. (Ostw.-Klaff. Nr. 153, S. 49. — Die Einleitung der Arbeit ist wegen der feinsinnigen historischen Bemerkungen interessant; der fachliche Gehalt ist längst überholt.)

2) Vgl. dazu E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*. 1. edit. Paris 1898 (2. edit. 1914), p. 126, Anm. 1.

3) Es ist hier und im folgenden unter dem Ausdruck »Discrete Funktion« immer die allgemeinste unstetige Funktion verstanden, nicht etwa eine der »Dirichletschen Bedingungen« für die Darstellbarkeit durch eine trigonometrische Reihe unterworfenen Funktion.

4) Borel, l. c. p. 126: »une telle fonction est définie par une infinité non dénombrable de conditions; en pratique, cela revient à dire qu'il est impossible de la définir. Il y aurait lieu de distinguer parmi les fonctions discontinues les plus générales, qui paraissent devoir être exclues, ... des considérations mathématiques, des fonctions dont la discontinuité est assujettie à des restrictions. Ces restrictions

Der Dirichletsche Funktionsbegriff dient also nur als allgemeines Schema, analog dem Verhältnis (*λόγος*)-Begriff des Eudoxos; die konkret verwertbaren Funktionen müssen in irgend einer Weise konstruiert werden. Dabei ist allerdings eine Grenze für die möglichen Konstruktionsmittel nicht zu setzen. Der in diesen Konstruktionen beherrschte Bereich erweitert sich ständig¹ und sein Wachsen ist auch heute noch nicht zu Ende. Trotzdem erreichen die Konstruktionen nicht die abstrakte »Nominaldefinition«.

Es bleibt also – in veränderter Form – der doppelte Funktionsbegriff, der schon bei Euler auftrat (und, wenn man will, sogar schon bei Oresme angelegt ist)² bestehen. Über den eigentlichen Sinn des abstrakt-formalen Begriffs schwanken die Ansichten. Es ist unschwer zu sehen, daß es sich hier um die historisch frühere Stufe des modernen Streites zwischen Intuitionismus (der den konstruktiven Funktionsbegriff hat) und Formalismus (der die abstrakt-schematische Definitionsweise wählt) handelt. (Vgl. für dieses Stadium etwa P. du Bois-Reymonds »Allgemeine Funktionentheorie« (Tübingen 1882) und auch Hankels schon zitierte Schrift von 1870.)

G. Cantors Mengenlehre wird (von den 70er Jahren ab) der Mittelpunkt einer Gruppe von Untersuchungen, die jede beliebige Dirichletsche Funktion, ebenso wie jede »wohldefinierte« Menge, als existent setzen.³ Die Scheu vor dem Aktual-Unendlichen verschwindet. Damit ist aus der »Nominaldefinition« der unftetigen Funktion ebenso wie aus der »Nominaldefinition« der reellen Zahl

doivent être de nature telle que la fonction puisse être entièrement définie par une infinité dénombrable de conditions.

1) So will Hankel, l. c. S. 49 ff., der die allgemeine Erklärung, y solle sich mit x »gesetzmäßig« ändern, mit Recht für dunkel hält, »die Mannigfaltigkeit der in dem reinen D.schen Funktionsbegriff enthaltenen, möglichen Größenbeziehungen zweier Veränderlichen auseinanderlegen«. – Später haben Weierstraß, Cantor, Baire, Lebesgue diese Konstruktion immer weiter getrieben. Lebesgue hat eine Funktion »benannt«, die nicht mehr analytisch darstellbar ist. (Journ. d. Math. 1905.) (Vgl. Hausdorff, Grundzüge d. Mengenlehre¹, S. 429 f., Borel, Méthodes et Problèmes de théorie de fonctions, 1922, S. 20.) – In anderer Richtung verallgemeinert Weyl (»Das Kontinuum«, 1918) die analytische Darstellung.

2) Letzten Endes kann man dieselbe Doppeltheit schon in der Antike finden, wo Theätet die Irrationalzahlen nach konstruktiven Prinzipien zuerst klassifiziert und gleichzeitig Eudoxos die »Nominaldefinition« des *λόγος* gibt.

3) Die Dirichletsche Funktion kann offenbar als zweidimensionale Punktmenge aufgefaßt werden.

(dem antiken Verhältnisbegriff [$\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$] nach Eudoxos) eine Existenz setzende »Realdefinition« geworden. Eine derartige Definition kann in keiner Weise mehr als eine Erweiterung der antiken konstruktiven Definition angesehen werden. Denn es ist absolut wesentlich für den antiken Begriff des Elementaraufbaus ($\sigma\tau\omicron\iota\chi\epsilon\acute{\iota}\omega\sigma\iota\varsigma$), daß er von einer endlichen Komplikation ist. Zweitens kann sie auch nicht so aufgefaßt werden, als ob sie durch einen unendlichen Prozeß im modernen Sinne vollbracht würde. Sie fällt also aus der Richtung der bisherigen mathematischen Methodik ganz heraus.¹ Es bleibt vielleicht die Möglichkeit, die in gewisser Hinsicht so naive Auffassung der aktual unendlichen Mengen als »mit einem Schlage gegebener« als eine Rückkehr zum primitiven »Gestalten-Sehen« der archaischen Mathematik (wie sie war, ehe die $\sigma\tau\omicron\iota\chi\epsilon\acute{\iota}\omega\sigma\iota\varsigma$ »Methode sich durchsetzte!) auszulegen. Manches spricht dafür²; eine wirklich stichhaltige Begründung des Verfahrens kann aus dieser Auffassung keineswegs gewonnen werden. Denn es handelt sich dabei im Grunde um eine Wiederaufnahme der alten, früher kritisierten, Eulerschen »geometrischen« Methoden; — nur daß die Bedingungen für ihre Anwendung viel ungünstiger geworden sind. Tatsächlich bemerkt man auch, daß der Versuch ge-

1) Man kann als historische Parallele höchstens Leibniz anführen, der den Versuch machte die Kombinatorik und den Begriff der definiten Mannigfaltigkeit so zu erweitern, daß auch eine (aktual) unendliche Konstruktionsbasis zugelassen wird. Vgl. darüber die Arbeiten H. Pichlers (Begriff der »Volldeutigkeit«) und D. Mahnkes; zusammenfassend dargestellt von D. Mahnke in diesem Jahrb. Bd. VII, S. 561 ff. (Leibnizens Synthese von Universalmathematik und Individualmetaphysik § 20). — S. auch unten § 6 c III C.

2) a) Man vgl. etwa die häufigen Bemerkungen F. Kleins über derartige Anschauungsmöglichkeiten. (Vorl. üb. d. Anwend. d. Diff. u. Integr.-R. auf Geometrie, 1902). Klein schränkt einerseits die Anschauung sehr eng auf das Endliche ein (Funktionsstreifen usw.) Andererseits erweckt seine lebendige Darstellung doch immer wieder die Illusion der Anschaulichkeit des Transfiniten, — Vgl. auch Math. Anh. zu § 3, III.

b) Zermelos Beweis des Wohlordnungssatzes ersetzt die als unmöglich erklärte »fukzessive« Auswahl unendlich vieler Elemente durch ihre »gleichzeitige« Auswahl. Dazu bemerkt H. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre (2. Aufl. Berlin 1924), S. 142–143: »Oben setzte jeder einzelne Auswahlakt die Gesamtheit aller vorangegangenen Auswahlakte voraus, . . .; es gewinnt so den Anschein, als sei ein sukzessiv wachsender Zeitaufwand für die Auswahlakte erforderlich . . .; die Zugrundelegung einer gleichzeitigen Auswahl . . . ist jenem Verfahren zwar nicht in der praktischen Durchführbarkeit überlegen, wohl aber psychologisch faßbarer und anschaulicher« (!!)

nauerer Vorstellung der Gebilde immer wieder an ihre Genesis anknüpft, die aber eben nicht konsequent durchdacht ist.

Von dieser grundsätzlichen Stellung aus ist nun natürlich der Begriff der willkürlichen reellen Zahl ohne weiteres zu fassen. Denn er läßt sich ja auf den einer abzählbaren Menge oder auch der zahlentheoretischen Funktion sofort zurückführen. Ebenso ist jetzt die Menge aller reellen Zahlen und auch die Menge aller reellen (diskontinuierlichen) Funktionen ohne weiteres eine erlaubte Begriffsbildung.

Die Menge aller reellen Zahlen ist nun das Kontinuum, und es gelingt Cantor, von ihm eine abstrakte descriptive Definition zu geben; es ist eine »perfekte, überall dichte Menge«.

Aber Cantors geniale Schöpfung enthält neben denjenigen Begriffen, die das Aktual-Unendliche als wesentlichen Bestandteil enthalten, auch noch andere, die als zu der Idee eines unendlichen Prozesses gehörig interpretiert werden können. Dabin gehört das Verfahren der umkehrbar eindeutigen Zuordnung zum Beweis der Gleichmächtigkeit von Mengen, und — allerdings mit einer wesentlichen Einschränkung, von der noch zu reden sein wird — das sogenannte »Diagonalverfahren« zum Beweis, daß eine Menge mächtiger ist als eine andere. Vor Allem aber ist hier die wunderbare Reihe der transfiniten Ordnungszahlen zu nennen, die berühmte »Fortsetzung der realen ganzen Zahlenreihe über das Unendliche hinaus«. (S. o. § 5a.)

D. Das moderne Kontinuumproblem.

1. Die Abzählbarkeit aller endlich definierbaren Zahlen (Cantor, Borel). — So entsteht das »Kontinuumproblem« im Sinne der Frage nach der Mächtigkeit des Kontinuums. Oder anders ausgedrückt: als Frage nach der (konstruktiven) »Wohlordnung« des Kontinuums, nach seiner Abzählung mittels der transfiniten Zahlen.

D. h. Es sollen alle möglichen reellen Zahlen in eine wohlgeordnete Reihe gebracht werden, nach Art der früher (§ 5a) betrachteten transfiniten Reihen.

Dieses Problem ist nicht ein Spezialproblem unter vielen andern, sondern es ist die legitime historische Fortsetzung einer fundamentalen, bis auf die Antike zurückgehenden Problementwicklung. Es ist die moderne Form des alten Problems der Klassifikation der Irrationalitäten, das zuerst von Theodorus aufgestellt von Theätet einer vorläufigen Lösung zugeführt wird, die dann

von Euklid weiter entwickelt und von Apollonius von Perge nochmals erweitert wird. Diese antike Klassifikationen umfaßten nur algebraische Irrationalitäten und auch diese nicht vollständig (f. o. S. 139). Cantor gibt (1873)¹ eine Ordnung sämtlicher algebraischer Zahlen nach ihrem Rang, worunter er die Summe des Grades und der (absolut genommenen) Koeffizienten der sie definierenden algebraischen Gleichung versteht, und beweist auf dieser Grundlage die Abzählbarkeit dieser Zahlmenge durch die Reihe der natürlichen Zahlen. Zugleich zeigt Cantor aber, mittels seines »Diagonalverfahrens«, daß eine ähnliche Abzählbarkeit der Menge aller reellen Zahlen nicht besteht². Borel hat später³ (1910) das Cantorsche Verfahren verallgemeinert und eine Abzählung sämtlicher an der mathematischen Forschung einzeln ins Auge zu fassenden reellen (i. a. transzendenten) Zahlen gegeben. Er entwickelt eine Methode, jeder dieser Zahlen einen bestimmten (endlichen) Rang (oder »Höhe«, hauteur) zuzuschreiben und mit seiner Hilfe gelingt ihre Abzählung, die zugleich die Zahlen nach bestimmten Rangstufen klassifiziert.

Allerdings folgt gerade aus eben diesen Betrachtungen, daß eine im Vergleich zu den abgezählten ungeheuer viel reichere Vielheit von Zahlen übrigbleibt, die von der ordnenden Klassifikation nicht erfaßt werden⁴. Von einem anderen Gesichtspunkt aus hat

1) Journ. f. Math. (Crelle), Bd. LXXVII, S. 259.

2) Das Diagonalverfahren zeigt, genau genommen, folgendes: Wenn man eine abgezählte (gesetzmäßige) Reihe von Zahlfolgen hat, so kann man eine von diesen sämtlichen verschiedene Zahlfolge Stelle für Stelle berechnen. (Etwa die Folge: $\alpha_{11} + 1, \alpha_{22} + 1, \alpha_{33} + 1, \dots, \alpha_{rr} + 1 \dots$, wo α_{ik} die k te Zahl der i ten Folge bedeutet.) So bestimmt eine konkret ausgeführte Abzählung aller algebraischen Zahlen eine transzendente Zahl. — Man kann also nie dazu gelangen, eine abgezählte Reihe von Folgen aufzustellen, die alle Folgen, die definierbar sind, enthielte.

3) Leçons sur le Théorie de la Croissance (Paris 1910), Ch. V, p. 118 ff. Borel zieht Lösungen von Differentialgleichungen, Reihensummen usw. in Betracht: »Admettons donc que chaque procédé de définition des nombres incommensurables, au moyen d'entiers, ou de nombres définis par des procédés antérieurs n'introduise qu'une infinité dénombrable de nouveaux nombres incommensurables. Les procédés successifs possibles sont eux-mêmes en infinité dénombrable. Donc, en tout, l'ensemble des nombres incommensurables qu'on aura défini à partir des entiers sera dénombrable.

4) Borel, l. c. p. 123: »Donc tous les nombres actuellement définis, et ultérieurement définissables, ont leur définition représentée dans le tableau illimité de suites d'entiers que nous avons construit. Il y a donc une infinité (beaucoup plus dense que l'infinité complémentaire) de nombres incommensurables qui n'ont été ni ne pourront jamais être définis.« —

Weyl (in einem früheren Stadium seiner Forschungen, 1918) eine »logische Konstruktion« der in der Mathematik vorkommenden reellen Zahlen gegeben. Auch diese führt nur auf eine abzählbare Menge von Zahlen. Diese Feststellungen sind freilich im Grunde trivial, denn sie sind eine unmittelbare Folge des sog. »Satzes von der endlichen Bezeichnung«, nach dem alle durch ein endliches Bezeichnungssystem zu beherrschenden Mannigfaltigkeiten abzählbar sind. Denn bei allen geschilderten Klassifikationen handelt es sich um solche endliche Bezeichnungssysteme, etwa mittels der (endlichen) Rangordnungsindizes. —

2. Transfinite Reihen von reellen Zahlen. (Du Bois-Reymond, Hardy). — Die soeben gegebene Übersicht über die Geschichte des Klassifikationsproblems der Zahlen zeigt, daß auch die moderne Erweiterung des antiken endlichen Konstruktionsverfahrens eine Erschöpfung der das Kontinuum bildenden reellen Zahlen nicht erreicht. Die Kluft zwischen der »allgemeinsten« reellen Zahl (dem *λόγος* des Eudoxos) und den noch so weit getriebenen Konstruktionen der Analysis bleibt unüberbrückbar.

Aber Cantors Konstruktion der transfiniten Ordinalzahlen eröffnet hier neue Möglichkeiten. Wir haben diese Konstruktion früher (in § 5 a) ontologisch unterbaut und als ontologisch ebenso legitim erwiesen als den gewöhnlichen unendlichen (konvergenten) Prozeß.¹ Wir halten daher das Mißtrauen, das z. B. Borel² in sie setzt, für nicht berechtigt.

Der erste, der eine transfinite Reihe von Zahlfolgen (d. h. auch von reellen Zahlen) aufstellte, scheint Hardy (1903) gewesen zu sein.³ Er benutzt dazu wesentlich das Diagonalverfahren. Seine Methode ist von Hausdorff⁴ und Schoenflies vereinfacht worden. Sie hängt mit dem schon wesentlich älteren Satz von P. du Bois-Reymond (1872)⁵ zusammen, der sich auf monotone

Die Richtigkeit dieser letzten Behauptung hängt von den präzisen Sinn von »Definition« ab. Siehe unten die Besprechung der letzten Hilbertschen Arbeit. (»Über das Unendliche«, Math. Ann. 95.)

1) Dabei ist natürlich die klare mathematische Faßbarkeit vorausgesetzt.

2) Vgl. Méthodes et Problèmes de théorie de fonctions (P. 1922) p. 19: »Les nombres incommensurables et l'illusion du transfini«, ferner: Leçons sur la théorie des fonctions. 2. edid. Note VI.

3) Hardy, Quart. Journ. of Math. 35 (1903) p. 87. — Darüber berichtet Schoenflies, Entw. d. Lehre v. d. Punktmannigfaltigkeiten. Bd. II, S. 22ff.

4) Leipziger Berichte (Math.-phys. Kl.) 59 (1907), S. 217.

5) Journal f. Math. 74, S. 294; ferner Math. Ann. 8 (1875), S. 363 und 11 (1877), S. 149.

Funktionen bezieht und es ermöglicht eine Menge solcher Funktionen nach der Schnelligkeit ihres Wachstums mittels der Zahlen der II. Zahlklasse abzuzählen. Nimmt man für diese Funktionen im speziellen solche mit stets ganzzahligen Werten für die ganzzahligen Argumente, so kommt man zu einer entsprechenden Abzählung gewöhnlicher Zahlfolgen.

Freilich erhebt sich nun auch diesen Konstruktionen gegenüber die Frage, ob sich mit ihrer Hilfe alle Zahlfolgen abzählen lassen, – oder ob nicht auch hier die Kluft zwischen der noch so weit getriebenen Konstruktion und der »willkürlichen« Zahlfolge unverändert bestehen bleibt.

3. Der intuitionistische Gesichtspunkt (Brouwer). Der wahre Begriff der allgemeinen reellen Zahl. – Brouwers Kontinuumtheorie wirft diese Frage in der Tat auf und beantwortet sie durch die Unterscheidung von frei werdenden und gesetzmäßig bis ins Unendliche hinein bestimmten Folgen. Dies wurde schon erörtert (§ 1a, § 4a)¹.

Das Kontinuum wird nach Brouwer repräsentiert durch die frei werdende Wahlfolge, die damit an die Stellen der willkürlichen reellen Zahl tritt; es wird zum »Medium freien Werdens«². Damit wird entschlossen das Problem der Vorstellbarkeit der willkürlichen Folge angegriffen. Es wird gezeigt, daß diese Rücksichtnahme auf das zeitliche Moment, – indem der frei werdenden Folge die gesetzmäßige seiende gegenübergestellt wird – die der Vorstellung der ganz willkürlichen Folge anhaftende Unklarheit überwindet³. Es ist eben gar nicht derselbe Begriff der Folge, der einmal in willkürlicher Allgemeinheit und das andere Mal in eindeutig bestimmter Gesetzmäßigkeit verwandt werden kann. Das erklärt mit

1) Für die Beziehung von anschaulichem und mathematischem Kontinuum ist unsere frühere Arbeit in diesem Jahrbuch, Bd. VI, zu vergleichen. Hier wird lediglich das mathematische Kontinuumproblem, das allein von der Mannigfaltigkeit der möglichen Zahlfolgen handelt, betrachtet.

2) Eine Vorwegnahme dieses Gedankens bedeuten in gewissem Sinn manche Überlegungen P. du Bois-Reymonds in seiner »Allgemeinen Funktionentheorie« (Bd. I, Tübingen 1882). So macht er z. B. den Vorschlag, einen willkürlichen Dezimalbruch sukzessiv durch Auswürfeln der Stellen zu bestimmen. Das ist im Grunde eine echte »Würfelreihe«.

3) Vgl. den Ausspruch Weyls: »Das ,es gibt' (sc.: eine Folge von der Eigenschaft E) verhaftet uns dem Sein und dem Gesetz; das 'jede' (sc.: Folge hat die Eigenschaft Nicht-E) stellt uns ins Werden und in die Freiheit.« (Math. Zeitschr. 10, Symposion I, S. 21).

einem Schlage die überraschende Tatfache der unüberbrückbaren Kluft zwischen der noch so weit getriebenen Konstruktion und dem »willkürlichen« Gebilde.

Welche Folgerung ergibt sich nun aus der Brouwer-Weyl'schen Auffassung für die Interpretation des Kontinuumproblems? Es scheint sich der folgende Schluß unabweisbar aufzudrängen: Es heißt einem Scheinproblem nachjagen, wenn man das Kontinuum abzählen will. Denn es gibt offenbar keine noch so umfassende Mannigfaltigkeit von gesetzmäßigen Folgen – und solche könnten doch allein geordnet werden – die jemals die freie Wahlfolge enthalten könnte, oder genauer gesagt, dem Spielraum der freien Wahlfolge umfangsgleich werden könnte. Das Kontinuumproblem ist also sinnlos¹. –

Diese Argumentation ist wirklich sehr plausibel, aber wir möchten ihr trotzdem nicht in ihrem ganzen Umfange zustimmen. Sie besteht soweit zu Recht, als sie dartut, daß der Spielraum einer völlig freien Wahlfolge nicht durch Konstruktion von Verlaufsgefehen unendlicher Folgen erschöpft werden kann. Aber es entsteht ihr selbst gegenüber die kritische Frage: Was ist eigentlich der genaue Sinn des Begriffs »Spielraum einer Wahlfolge«? Die Wahlfolge ist ihrem eigenen Phänomen Sinn nach immer im Werden, niemals vollendet. Der Begriff des Spielraums aber schließt gerade das Vollendet-Sein ein. Ein »Raum« ruht in sich. Man kommt sofort zu einem unauflösbaren Dilemma, wenn man sich die Frage vorlegt: Hat dieser »Spielraum aller möglichen Wahlfolgen« eine endliche oder eine unendliche Erstreckung? Hätte er bloß eine endliche Erstreckung – sagen wir von n »möglichen« Gliedern – so ergäbe sich, bei Beschränkung auf q Ziffern, daß es q^n mögliche Folgen gibt; bzw. wenn unbegrenzt viele Zahlen zugelassen werden, eine gewöhnliche abzählbare Menge von Folgen ($\aleph_0^n = \aleph_0$). Also enthielte dann der Spielraum nicht einmal genug Platz für die \aleph_1 Folgen (d. h. die mittels der Zahlen der II. Klasse abzuzählenden Folgen), die Hardy ufw. konstruiert haben. Soll andererseits der »Spielraum« sich ins Unendliche erstrecken, so kommt man notwendig zum unhaltbaren Begriff des Aktual-Unendlichen; denn ein »Spielraum« »ist« und »wird« nicht².

1) Vgl. Weyl, l. c. »Da die Brouwer'sche Auffassung zwischen dem Kontinuum und einer Menge diskreter Elemente eine absolute Kluft befestigt, die jeden Vergleich ausschließt, kann in ihr die Frage, ob das Kontinuum abzählbar ist, gar nicht auftauchen.«

2) Man hat hier wieder ein Beispiel für die Unmöglichkeit, kombinatorische Begriffe fruchtbar auf das Unendliche zu erweitern. Kombinatorische

Es kann also vernünftigerweise gar nicht der Sinn des Kontinuumproblems sein, ein konstruktives Verfahren zu finden, um den »Spielraum der möglichen Wahlfolgen« zu erschöpfen. Ist damit aber der Sinn des Problems überhaupt zerstört? Doch wohl nicht. Denn man kann immer noch fragen: gibt es nicht eine Mannigfaltigkeit möglicher gesetzmäßiger Folgen oder, anders gewendet: gibt es nicht einen zulässigen Begriff eines allgemeinsten Gesetzes einer Folge? Und kann man nicht diesen Begriff eines allgemeinsten Gesetzes für eine Zahlfolge (zahlentheoretische Funktion) durch eine sukzessiv erweiterte Konstruktion erfüllen? Wenn man also auch den Begriff einer »ganz willkürlichen« gesetzlosen Funktion (sei sie nun zahlentheoretisch oder ganz unstetig) aufgeben muß, — ist deshalb nicht doch noch die Idee eines Leerchemas für ein mögliches Funktions-Gesetz und der Gesamtheit seiner möglichen Erfüllungen zulässig?

Es ist vielleicht zweckmäßig, noch eine weitere Erwägung hinzuzufügen: Zu der eigentümlichen Beziehung, die die freie Wahlfolge als Repräsentant des Kontinuums als eines Mediums freien Werdens zu den zahlentheoretischen Funktionen hat, gibt es keine Analogie bei den beliebig unstetigen Funktionen. Es gibt kein »Kontinuum« aller unstetigen Funktionen als Medium freien Werdens, in der sich alle Funktionen einbetten und das durch eine »freie Wahlfunktion« repräsentiert werden könnte¹. Man könnte den Unterschied beider Fälle darin sehen, daß bei der zahlentheoretischen Funktion die Argumente eine »wohlgeordnete« Menge bilden, d. h. in eine abzählbare Reihe geordnet sind, während die Argumente der unstetigen Funktion ein kontinuierliches Intervall (oder noch allgemeiner: irgend eine lineare Punktmenge) bilden, das nicht wohlgeordnet ist, und dessen Wohlordnung (Abzählung mittels der transfiniten Ordnungszahlen), ja gerade die Aufgabe des Kontinuumproblems ist. Aber damit ist nicht der Kern der Sachlage getroffen. Selbst wenn man sich die Wohlordnung des Kontinuums der Argu-

Operationen kann man eben nur an »stillhaltenden«, actu daseienden Gegenständlichkeiten vollziehen, nicht an *ἄπειρα δυνάμει ὄντα*.

1) Vgl. Weyl, l. c.: »Wenn es heißt 'jede Folge', wandelt sich der Begriff des Gesetzes (functio discreta) in den der werdenden Wahlfolge; hingegen steht uns für die functio mixta und continua [die eine Folge einer Zahl bzw. eine Folge einer Folge zuordnen] kein derartiges Kontinuum zur Verfügung, in das sie sich einbetten, wie die einzelne functio discreta in das Kontinuum der frei werdenden Wahlfolge.«

mentpunkte auf konstruktive Weise aktuell vollzogen denkt, könnte man immer noch nicht von einer freien Wahlfolge sprechen. Man hätte zwar eine »zahlentheoretische Funktion von Zahlen der II. oder N^{ten} Zahlklasse«¹ oder anders ausgedrückt eine »transfinite Zahlfolge«, — aber die Idee einer »transfiniten freien Wahlfolge«, die Schritt für Schritt wird, ist offenbar absurd. Denn sie würde ja niemals bis zur ω^{ten} Argumentstelle gelangen! Es besteht also wirklich ein grundlegender Unterschied zwischen indefiniten und transfiniten Folgen und deshalb auch zwischen gewöhnlichen zahlentheoretischen Funktionen und »transfiniten« Funktionen (oder a fortiori beliebig unftetigen Funktionen), indem nur die ersten eine »Repräsentation ihres Spielraums« (wenn man dies für den Augenblick wieder als möglich annimmt) durch eine Wahlfolge zulassen. Trotzdem besteht ja, wie wir sahen, das historisch überlieferte Problem der Erschöpfung aller Möglichkeiten der »ganz willkürlichen« Funktionen durch Gesetzeskonstruktionen in dem einen wie dem anderen Fall in derselben Weise. Das überlieferte allgemeine Problem muß also ohne den Begriff der Wahlfolge angreifbar oder wenigstens interpretierbar sein, da dieser ja nur in dem ganz speziellen Fall der zahlentheoretischen Funktion möglich ist.

Wir kommen also zu dem Ergebnis, daß die Brouwersche Idee der Wahlfolge, so fruchtbar sie auch für manche Fragestellungen ist, doch an dem Kern des Kontinuumproblems vorbeiführt. Die Brouwerschen Gedanken sind für die mathematische Erfassung des anschaulichen Kontinuums sehr wichtig. (Diese Seite des Problems wurde ja von uns in einer früheren Arbeit (d. J. Jahrb. VI) in genügender Ausführlichkeit behandelt.) Aber zur Lösung des mathematischen Kontinuumproblems, um die es sich hier ausschließlich handelt, tragen sie im Grunde nichts bei.

Wir können uns hier nicht ganz mit Weyls Anschauungen einverstanden erklären. Weyl hat früher (1918) eine rein konstruktive Kontinuumtheorie entworfen². Es wurde darin ein »Weylsches Zahlensystem« aufgestellt, das alle Zahlen (Funktionen) umfaßt, die mit gewissen, genau umschriebenen Konstruktionsprinzipien erreicht werden können. Eine einfache Überlegung zeigt, daß die Gesamtheit der jeweils de facto konstruierten Gebilde durch die natürlichen Zahlen abzählbar sein muß (vgl. die analoge Betrachtung Borels).

1) Man kann, ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, sich die Funktionswerte auf 0 und 1 beschränkt denken.

2) In seiner Schrift »Das Kontinuum« (1918) und in dem 1. Abschnitt seines Aufsatzes »Über die neue Grundlagenkrise ufw.« (Math. Zeitschrift 10).

Dagegen ergibt sich für die Menge aller durch unbegrenzt häufige Anwendung der Konstruktionsprinzipien (Iteration) erreichbaren Zahlen die Mächtigkeit des Kontinuums¹. Es werden hier also neben wirklich vorgelegten auch »mögliche Gesetze« und die Gesamtheit aller möglichen Gesetze in Betracht gezogen. Das entscheidende Motiv, daß Weyl zur Aufgabe der früheren Theorie veranlaßte, ist nun der Gedanke, daß der Begriff des »möglichen Gesetzes« eigentlich sinnlos sei. Weyl sagt (Math. Zeitschr. 10) »die Frage nach der »Möglichkeit« stellt uns ebensowenig einem mit »Ja« oder »Nein« antwortenden Sachverhalt gegenüber, wenn sie gestellt wird mit Bezug auf die beliebig oft zu wiederholende Anwendung der Konstruktionsprinzipien, wie mit Bezug auf die unendliche Zahlenreihe, das ist der beliebig oft zu wiederholende Prozeß des Übergangs von einer Zahl zur nächstfolgenden«. Und an einer anderen Stelle: »Hier ist also von der Möglichkeit der Konstruktion gar nicht die Rede, sondern nur im Hinblick auf die gelungenen Konstruktion, den geführten Beweis, stellen wir eine derartige Existenzialbehauptung auf [»Es gibt ein Gesetz von der Eigenschaft E«]. Die negative Aussage, daß es ein solches Gesetz nicht gibt, bleibt natürlich jeden Sinnes bar . . .«².

Hier möchten wir nun gewisse Zweifel äußern: Zwar müssen wir Weyl zugeben, daß man nicht Gebilde, die von den beliebig oft wiederholten Elementar-Konstruktionen gebildet werden, in ihrer Gesamtheit als »an sich« vorliegende mathematische Gegenständlichkeiten betrachten kann. Aber trotzdem kann man fragen: Ist wirklich der Begriff eines möglichen Funktionsgesetzes und die Gesamtheit solcher möglichen Gesetze unter allen Umständen unvollziehbar?

Es lassen sich doch offenbar unter Umständen gewisse unendliche Mannigfaltigkeiten von Gesetzen bilden. Nämlich unter der Voraussetzung, daß die Mannigfaltigkeit selbst von einem Gesetze höherer Ordnung beherrscht wird. Es handelt sich dann offenbar um ein

1) Man kann die konstruktiven Operationen etwa mit $O_1 O_2 \dots O_n$ bezeichnen. Irgend eine endliche Kombination ($O_{i_1} O_{i_2} \dots O_{i_n}$) entspricht eindeutig einem endlichen Kettenbruch, eine unendliche Kombination einem unendlichen, also bzw. einer rationalen oder irrationalen Zahl. Die beiden im Text genannten Gesamtheiten sind also der Menge der rationalen bzw. der irrationalen Zahlen äquivalent.

2) Dann folgt die Interpretation des Wortes »Folge« in dem Satze »jede Folge hat die Eigenschaft nicht-E« als freie Wahlfolge. Der so interpretierte Satz tritt dann an die Stelle der »sinnlosen« Aussage: »Es gibt kein Gesetz von der Eigenschaft E.«

wirklich vorliegendes Gesamtgesetz, es fñgt sich eben die gesamte in dieser Weise geordnete Mannigfaltigkeit zu einem Gesetz höherer Ordnung zusammen. Dieses Gesamtgesetz kann sich ins Unendliche hinein — nach einer streng konstruktiven Regel — entfalten, und zwar nicht nur in indefinitum, sondern auch in transfinitum. Die Ordnung ist selbstverständlich immer »Wohlordnung« (wie sie im Wesen des transfiniten Progressus liegt, um den es sich hier natürlich wieder handelt) und die Menge der Einzel-Gesetze ist mittels der Cantorschen Transfiniten »abzählbar«¹.

Nun kann eine derartige Konstruktion wirklich in einem gewissen Sinn die Mannigfaltigkeit aller möglichen Gesetze umfassen, indem sie nämlich das Schema einer univerfellen Klassifikation bildet, in das jedes einzelne Gesetz, seinem formalen Charakter nach, an einer bestimmten Stelle eingeordnet werden kann. Den Klassen können Indizes zugeordnet werden (die i. a. transfinit werden können), die den »Rang« der in der Klasse vereinigten Gesetze anzeigen. Ein elementares Beispiel ist die Cantorsche Abzählung der algebraischen Gleichungen mit ganzen Koeffizienten (bzw. der algebraischen Zahlen). Hier enthält jede Klasse endlich viele Elemente. Ein verwickelteres Beispiel ist die Klassifikation gewisser monotoner Funktionen nach der Schnelligkeit ihres »Wachstums« (du Bois-Reymond, Borel u. a.). Hier enthält jede Klasse unendlich viele Funktionen und die ganze Konstruktion geht ins Transfinite².

Es ist nun hier die Möglichkeit geboten, über den unfruchtbaren Begriff der ganz »willkürlichen« Zahl oder Funktion

1) Vgl. dazu meine frühere Arbeit, df. Jahrbuch VI, p. 413–14, bef. die Anmerkungen 1 und 2 zu S. 414. — Es wurde dort für unmöglich erklärt, daß »unendliche Mengen von Konstruktionsmöglichkeiten bestehen, ohne daß sie nach einer Regel aufgezählt würden«. »Kombinationen, bei denen die (unbegrenzte) Iteration zugelassen ist, sind nur durch konkrete vorgelegte Gesetze angebbar, nicht durch 'mögliche' Gesetze« (l. c. Anm. 1). — Dann wird weiter gesagt (l. c. Anm. 2): »Natürlich kann man auch unendliche Mengen von Gesetzen aufteilen, nur müssen sie ihrerseits gesetzmäßig bestimmt sein ... Derartige Mengen sind stets abzählbar. Hat man sie aber in eine abzählbare Reihe gebracht, so hat man aus der geordneten unendlichen Menge von Gesetzen ein einziges gemacht.«

Es war hier unter »abzählbar« abzählbar mittels der natürlichen Zahlen gemeint. In diesem Punkte glaube ich heute über meine frühere Auffassung (die mit der Weyls genau übereinstimmte) hinausgehen zu müssen, indem ich jetzt auch Abzählbarkeit mittels der transfiniten Cantorschen Ordnungszahlen zulasse. Mit dieser Verallgemeinerung möchte ich aber obige Sätze wörtlich aufrecht erhalten.

2) Gerade bei dieser Konstruktion ist übrigens vieles ungeklärt. Sie soll hier nur als allgemein illustrierendes Beispiel verwendet werden.

hinauszukommen. Indem man sowohl von dem unmöglichen Allgemeinbegriff der ganz willkürlich zusammengewürfelten Menge von Ziffern u. dgl. als auch von der hier nicht relevanten Vorstellung der frei werdenden Wahlfolge abieht, gelangt man zu dem äußerst fruchtbaren Begriff des möglichen zahlentheoretischen Funktionsgesetzes. Dieser Begriff ist deshalb so fruchtbar und wird vielleicht wirklich einmal zur Lösung des Kontinuumproblems führen, weil ein Gesetz in einem bestimmten, früher präzisierten Sinne¹ seinem Wesen nach finit ist. Denn der eigentliche Sinn eines mathematischen Gesetzes ist ja gerade, mittels eines endlichen Gedankens das Unendliche zu beherrschen. Dabei muß allerdings das Unendliche in der kategorialen Form des Prozesses auftreten; aber es braucht sich nicht nur um einen gewöhnlichen »indefiniten«, sondern es kann sich auch um einen echten »transfiniten« Prozeß dabei handeln. Da aber das Gesetz selbst, seinem Inhalt nach, finit ist, ist es auch möglich, auf solche Gesetze kombinatorische Verfahrensweisen anzuwenden, den Spielraum möglicher Gesetze abzudecken u. dgl.²

Die »allgemeine« reelle Zahl (oder unstetige Funktion) ist also nicht mehr ein Begriff, der dem einer bestimmten vorlegbaren gesetzmäßig gebauten Zahl oder Funktion gänzlich fremd oder disparat gegenübersteht. Sondern jener gesuchte Allgemeinbegriff ist nichts anderes als der allgemeine Begriff des bestimmten vorlegbaren Exemplars selbst: er ist das leere Schema, dessen Umfang durch die konkreten Beispiele direkt ausfüllbar ist. Damit ist nun endlich, grundfänglich und kategorial gesehen, die Kluft zwischen der allgemeinen »beliebigen« und der bestimmten Funktion überbrückt. Die Aussage: » y hängt vom x gesetzmäßig ab« ist nicht mehr »dunkel« (wie Hankel meinte). Denn die Art und Weise, wie die Mannigfaltigkeit der einzelnen Beispiele von Funktionen den Allgemeinbegriff füllt, ist durch die Konstruktion der indefiniten bzw. transfiniten Folge von Stufen, nach der die Gesetze klassifiziert werden, prinzipiell bestimmt. Die Aufgabe, diese ausfüllende Konstruktion wirklich vorzunehmen, ist nicht mehr sinnlos.

1) Vgl. in der Darstellung des transfiniten Prozesses § 5 a die Erörterung auf Seite 106–109.

2) Es handelt sich allerdings, genau genommen, i. a. nicht um rein endliche Kombinatorik, nach dem Schema n^m , sondern um ein endliches Schema $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p)$, wo für die α_i jeweils unendlich viele »Ziffern« eingesetzt werden können; die Mannigfaltigkeit der Möglichkeiten ist dann $\aleph_0^p = \aleph_0$. Man kommt so über \aleph_0 nicht hinaus.

Damit ist die Konstruktion natürlich noch nicht durchgeführt, aber die prinzipielle Möglichkeit ist eröffnet nach ihr zu suchen. Hilberts Lösungsversuch, dem wir uns nunmehr in unserer Darstellung zuwenden, läuft in der Tat darauf hinaus, die in Rede stehende Konstruktion wirklich auszuführen.

III. D. Hilberts Lösungsversuch des Kontinuumproblems¹.

A. Die angebliche Rolle der Beweistheorie bei der Hilbertschen Lösung.

Die vorhergehende Darstellung der geschichtlichen Entwicklung des Kontinuumproblems und der Möglichkeit, die sich prinzipiell für seine Lösung ergab, führt unmittelbar bis an die Schwelle der Hilbertschen Betrachtungen. Damit ist natürlich nicht gesagt, daß sich jene Betrachtungen aus der historischen Entwicklung mit Selbstverständlichkeit ergeben hätten. Sondern jene Entwicklungslinie tritt nur für den in der geschilderten Weise hervor, der Hilberts Arbeit kennt.

Hilbert hat selbst allerdings eine andere Auffassung von seiner neuen Theorie: er nimmt sie als Bestätigung seiner Lehre von den Grundlagen der Mathematik, seiner Beweistheorie und seiner symbolischen, auf den finiten metamathematischen Betrachtungen basierenden Mathematik in Anspruch. Seine Beweistheorie sei »nach ihren Früchten« zu beurteilen, und ihre schönste Frucht sei eben ein Beweis der Cantorsche Vermutung über die Mächtigkeit des Kontinuums.

Es muß von vornherein gesagt werden, daß wir diesen Anspruch Hilberts nicht für gerechtfertigt halten. Im Gegenteil scheint uns die große Bedeutung seines kühnen und eigenartigen Lösungsversuchs des berühmten Problems gerade in dem sachlichen, nicht-symbolischen Sinn seiner Betrachtungen zu liegen. Wir halten diese, in Hilberts eigener Terminologie gesprochen, für metamathematische.

Es sei an unsere früheren Erwägungen bezüglich der Hilbertschen Beweistheorie selbst erinnert (§ 3c), wo sich ergeben hatte, daß auch die Metamathematik ohne die unmittelbare sachlich-inhaltliche Anerkennung des indefiniten oder endlosen Prozesses (der vollständigen Induktion) nicht auskommt. Andererseits ist auch auf die Darlegung der Rolle hinzuweisen, die selbst im transfiniten Prozeß die als solche stets finite Gefeglichkeit spielt. (§ 5a, S. 106ff.). Es lassen sich danach in einem bestimmten Sinne die beiden scheinbar sich wider-

¹) Hilbert, über das Unendliche, Math. Ann. 95, S. 161—190.

spredhenden Behauptungen aufrecht erhalten, die Metamathematik enthalte das Transfinite (in Form des Progresses) und sei trotzdem ihrer gedanklichen Struktur nach finit, denn der finite Gesetzesgedanke beherrscht mit Hilfe des Begriffs des offenen Horizonts das Transfinite.

Damit entfällt die Notwendigkeit, den transfiniten Prozeß (als Prozeß!) »symbolisch« zu begründen, d. h. insbesondere seine Widerspruchsfreiheit nachzuweisen¹. Er kann unmittelbar als anschauliches Phänomen verwendet werden. Und nun ist das Entscheidende: die Hilbertschen Erwägungen zur Lösung des Kontinuumproblems benutzen außer diesem Prozeß keine transfiniten Begriffe. Also können diese Erwägungen auch nicht die Notwendigkeit und Fruchtbarkeit der Hilbertschen Beweistheorie erhärten. Dies ist nun im einzelnen zu belegen.

B. Hilberts Hauptbetrachtung.

Die Hauptbetrachtung Hilberts besteht in der Rangordnung aller möglichen zahlentheoretischen Funktionen. Dazu bedarf es eines gesetzlichen Rahmens, in den hinein sie geordnet werden können (vgl. die vorangehenden Betrachtungen am Schlusse von Abschnitt II). Dieser Rahmen wird gefunden durch Bezugnahme auf die Weise der Erzeugung der einzelnen Funktion. Die Erzeugung wird vollzogen durch zwei elementare Hilfsmittel: erstens die Einsetzung (die Ersetzung eines Arguments durch eine neue Variable), zweitens die Rekursion (nach dem Schema der Ableitung des Funktionswertes für $n+1$ aus demjenigen für n). — Der Hilbertsche Grundgedanke ist nun, diesen beiden Erzeugungsmitteln der Funktionen die beiden Erzeugungsprinzipien, die zu den Zahlen der II. Cantorschen Zahlklasse führen, nämlich der Addition von Eins und den Übergang zum Limes bei einer (gewöhnlichen) abzählbaren Folge parallel zu setzen. So wie die beiden Cantorschen Erzeugungsprinzipien die Zahlen der II. Klasse erzeugen, so bringen Einsetzungen und (gewöhnliche in-

1) Wir fahen, bei der Betrachtung der Paradoxie der Menge W (§ 5 a, III), daß sich die Widerspruchsfreiheit des transfiniten Progresses bezüglich dieser Paradoxie in voller phänomenologischer Evidenz ergibt, ohne irgendwelche »Argumentation«, aus der intuitiven Einsicht in den Sinn des Phänomens der iterierbaren Reflexion. Indessen sind neuerdings noch gewisse andere, rein mathematische Schwierigkeiten aufgetaucht, bezüglich deren eine Entscheidung z. Zt. noch nicht gefallen ist. (Vgl. den mathematischen Anhang zu § 5, Nr. VI).

definite) Rekursionen die zahlentheoretischen Funktionen hervor. Vermöge dieses Parallelismus besteht eine eindeutige Zuordnung zwischen den transfiniten Zahlen und den Funktionen.

Dies ist, wie gesagt, der sehr einfache Gedanke. Indessen stellen sich der Ausführung noch mannigfache Hindernisse entgegen, die von Hilbert z. Z. auch nur zum Teil überwunden sind.

Zunächst setzt die Parallelität zwischen Zahlen und Funktionen eine lineare, eindimensionale Ordnung der letzteren voraus. Aber das Verfahren der Rekursion führt im allgemeinen durchaus nicht auf eine solche eindimensionale Ordnung. Es bestehen mannigfache Möglichkeiten des Übergangs von n auf $n + 1$ und man braucht im allgemeinen eine »verschränkte, nach verschiedenen Variablen zugleich genommene (simultane) Rekursion«. Die Auflösung dieser in gewöhnliche sukzessive Rekursionen gelingt erst, wenn man »höhere Variablentypen« benutzt¹⁾. Mit Hilfe dieser nach ihrer »Höhe« abgestuften Variablentypen gelingt dann die Zuordnung zu den Zahlen der II. Klasse. Hilbert gibt dazu zwei Verfahren an: 1. Legt man nur Variablentypen bis zu einer bestimmten Höhe zugrunde, so erhält man durch Einsetzung abzählbar viele (\aleph_0) Funktionen. Man gewinnt also abzählbare Funktionsklassen, die man nach der Höhe der zugrunde liegenden Variablentypen ordnen kann. Diese Typen selbst entsprechen aber umkehrbar eindeutig den Zahlen der II. Klasse.

1) Zur Erläuterung dieses Begriffs sei bemerkt: Hilbert unterscheidet 1. Grundvariable (diese wieder nach Cantorschen Zahlklassen) und 2. Variablentypen, die durch Anwendungen der logischen Verknüpfungen auf die Aussagen der Grundvariablen entstehen. Als Beispiele können dienen: Funktion (der Grundvariablen), Funktionen-funktion, Funktionen-funktionen-funktion . . . (dies kann dann transfinit iteriert werden!). – Diese Variablentypen werden nun nach ihrer »Höhe« klassifiziert: a) Höhe 0: Zahlenkonstante; b) Höhe 1: Funktionen mit Grundvariablen als Argument; c) Allgemeine Regel: Eine Funktion, deren Argumente die (höchste) Höhe α und deren Wert die Höhe β erreicht, besitzt die Höhe $\alpha + 1$ bzw. $\beta + 1$, je nachdem $\alpha > \beta$ oder $\beta > \alpha$ ist. (Für $\alpha = \beta$ ist $\alpha + 1 = \beta + 1$, also die Wahl unnötig.) Dabei können α, β transfinite Zahlen sein.

Man sieht hieraus, daß diese Höhen nichts anderes als die von uns früher eingeführten »Stufencharakteristiken« sind, die die Komplikation eines intentionalen Gebildes anzeigen. – Da meine diesbezüglichen Betrachtungen noch ohne Kenntnis des Hilbertschen Aufsatzes angestellt wurden, ist mir das enge Zusammentreffen mit Hilbert eine willkommene Bestätigung für die Richtigkeit meines Gedankengangs. – Einiges Nähere über die Hilbertsche Theorie der Transfiniten, Variablentypen usw. im »Mathematischen Anhang, Ergänzung zu § 5, Nr. II.

– 2. Man kann den Umstand berücksichtigen, daß die Zahlen der II. Klasse selbst zu ihrer Definition gewisse Einschachtelungen, also Variablentypen benötigen. »Wir brauchen nun nicht der einen vorliegenden Zahl der II. Klasse die sämtlichen Funktionen derselben Höhe zuzuordnen, sondern können die Zahlen der II. Klasse und die Funktionen sich nach der Höhe der zu ihrer Definition nötigen Variablentypen einander entsprechen lassen«. (l. c., S. 188). – Kurz gesagt und unserer eigenen früheren Terminologie (§ 5a) entsprechender: Der Grad der Komplikation dient als Leitfaden der Zuordnung; daß die Stufung nach der intentionalen Struktur-Komplikation beide Male anwendbar ist, das ermöglicht eigentlich die ganze Parallelisierung von transfiniten Zahlen und Funktionen.

Damit ist angedeutet, wie Hilbert die Schwierigkeit der »verschränkten« Rekursion überwindet und die Zuordnung wirklich vollzieht.

C. Das Lemma II.

Es sind nun aber noch zwei sehr wesentliche fernere Schwierigkeiten zu überwinden, ehe man von einer wirklichen Lösung des Kontinuumproblems sprechen kann. Diese Probleme sind von Hilbert z. Zt. noch nicht gelöst, sondern ihre Lösung wird in zwei Hilfsätzen gefordert, die als Lemma I. und II. bezeichnet werden.

Das Lemma II, das wir zweckmäßig zuerst besprechen, lautet: »Zur Bildung von Funktionen einer Zahlvariablen sind transfinite Rekursionen entbehrlich und zwar reicht die gewöhnliche, d. h. nach einer Zahlvariablen fortsetzende Rekursion nicht nur für den eigentlichen Bildungsprozeß der Funktion aus, sondern es genügt auch, bei der Einsetzung solche Variablentypen allein anzuwenden, deren Definition nur gewöhnliche Rekursionen erfordert«¹.

Dieses Lemma betrifft also die Möglichkeit des Vorkommens transfiniter Rekursionen. In der Tat war ja in der ganzen Hauptbetrachtung stillschweigend vorausgesetzt, daß nur gewöhnliche Rekursion angewandt wird. Denn nur der gewöhnlichen, indefiniten Rekursion entspricht der gewöhnliche ω -Limesprozeß, der nur bis zu den transfiniten Zahlen der II. Klasse führt. Einer höheren, transfiniten Rekursion würden höhere Limesprozesse (Ω_1 -,

1) l. c. S. 189. – Hilbert gibt dort auch noch eine »finite« Formulierung: »Wenn unter Heranziehung einer höheren Rekursion oder aus den entsprechenden Variablentypen eine Funktion gebildet worden ist, die nur eine gewöhnliche Zahl als Argument hat, so läßt sich diese Funktion auch stets durch gewöhnliche Rekursion und unter ausschließlicher Anwendung der \mathbb{Z} -Typen (gewöhnlichen Zahlvariablentypen) definieren«.

$\Omega_2 \dots$ Prozesse, wo $\Omega_1 \Omega_2 \dots$ die Anfangszahlen der III., IV. ufw. Zahlklasse darstellen) zuzuordnen sein, und man käme mit der Abzählung in die III. oder eine noch höhere Zahlklasse hinein. Damit wäre aber der Beweis des Kontinuumsatzes $c = \aleph_1$ hinfällig. Man käme nur zu $c = \aleph_\alpha$, wo α ganz unbestimmt ist und vielleicht sogar transfinit. Das wäre aber nicht mehr als die allgemeine Behauptung, daß das Kontinuum irgendwie wohlgeordnet werden kann.

Der Beweis von Lemma II ist also entscheidend für das Gelingen der gesamten Hilbertschen Absicht. Dieser Beweis steht noch aus. Es läßt sich aber soviel sagen, daß das Problem, das dieser Beweis darstellt, durchaus mit den begrifflichen Mitteln unserer Metamathematik (wo das Transfinite nur in Form eines Prozesses auftreten darf), ausgedrückt werden kann. Die Frage ist die, ob es möglich ist, einer gewöhnlichen Zahlfolge ein echt transfinites Verlaufsgeß aufzuprägen, das also nicht auf ein indefinites Geß reduziert werden kann. Diese Frage verneint das Lemma II. Wie die Entscheidung indessen auch ausfallen möge, soviel ist sicher, daß die Antwort auf die Frage in die Theorie der unendlichen Prozesse (im weitesten) Sinn gehört. Der Beweis des Lemma wird sich also in metamathematischen Erwägungen bewegen müssen.

Zur näheren Erläuterung möge folgendes dienen:

Das Lemma II läuft doch darauf hinaus, daß eine einfache Zahlfolge nicht imstande ist, eine echt transfinite Geßlichkeit aufzuweisen. Sie stellt gewissermaßen mit ihren \aleph_0 Gliedern zu wenig Stoff zur Verfügung, so daß man ihr keine Struktur von transfiniter Komplikation aufprägen kann. Denn sie ist ja schon durch eine gewöhnliche, von n auf $n + 1$ gehende Regel restlos festzulegen. Anders verhält sich eine transfinite Ω_1 -Folge, oder ein Abschnitt des Kontinuums, der ja sicher Teilmengen enthält, die in eine Ω_1 -Folge geordnet werden können (Hardy). Deshalb sind auch bei allgemeinen unstetigen Funktionen (mit einem kontinuierlichen Intervall als Argument) oder bei zahlentheoretischen Funktionen höherer (transfiniten) Klasse transfinite Komplikationen möglich, worauf auch Hilbert hinweist (l. c. S. 189: »An sich ist es gewiß, daß transfinite Rekursionen und dementsprechend höhere Variablentypen in mathematischen Untersuchungen, z. B. für die Bildung von Funktionen reeller Variablen mit gewissen Eigenschaften notwendig gebraucht werden«).

Nun zeigt andererseits das Cantorsche Diagonalverfahren, daß die Menge f der unstetigen Funktionen mächtiger ist als

die Menge c der zahlentheoretischen Funktionen der I. Klasse. Allerdings ist das Diagonalverfahren nach den strengen Anforderungen unserer »intuitiven« Mathematik (oder »Metamathematik«) nur auf wirklich vorliegende unendliche Reihen von Folgen anwendbar, aber offenbar ebenfogut auf eine transfinite Ω_1 -Reihe von transfiniten Ω_1 -Folgen, als auf eine ω -Reihe von ω -Folgen. (Dagegen erscheint ein Diagonalschema, wie es bei Hessenberg, Grundbegriffe der Mengenlehre, § 25, S. 44 auftritt, mit der rein schematischen »Abzählung« nach $a, b, c \dots$, nicht zulässig in der Metamathematik.) In Anbetracht dessen, daß man (nach Hilberts Hauptbetrachtung) in jedem Falle das Kontinuum in eine Ω_α -Reihe (von der Mächtigkeit \aleph_α) ordnen kann, genügt auch das beschränkte Diagonalverfahren, um zu zeigen, daß, wenn $c = \aleph_\alpha$, $f > \aleph_\alpha$ ist. — Also übertrifft die Menge der »höheren« Funktionen die »gewöhnlichen« und dem entspricht, daß der Spielraum der »höheren« Gefeglichkeiten, der Umfang ihrer Möglichkeit, größer ist. Von hier aus gesehen, erscheint das Lemma II plausibel¹. Nun bleibt noch das Lemma I zur Erörterung übrig. Dieses betrifft eine tiefliegende und grund-

1) Eine über das Wohlordnungsproblems des Kontinuums verbreitete Meinung, die sich auf eine Betrachtung von Lebesgue (Contributions à l'étude des correspondances de M. Zermelo, Bull. Soc. Math. 35 [1907]) stützt, die von Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre¹ (Leipzig 1914) S. 429f., wiedergegeben wird, scheint auf den ersten Blick dem Lemma II. zu widersprechen. Es handelt sich um die Tatsache, daß die Zermelosche Auswahl ausgezeichnete Elemente aus jeder Teilmenge der wohlzuordnenden Menge, die für das allgemeine Zermelosche Wohlordnungsverfahren notwendig wird, beim Kontinuum auf »unmeßbare«, also jedenfalls Nicht-Bairesche Funktionen führt, die demnach »analytisch nicht darstellbar« sind. Es lassen sich also »gefehmäßige Regeln« (im Sinne der Funktionen der »normalen« Mathematik) für die Auswahl . . . überhaupt nicht angeben« (Fraenkel, Mengenlehre, S. 203). D. h. offenbar in unserer Sprache, daß jene »auswählenden Funktionen« unreduzierbar transfinit sind. Lemma II behauptet aber doch gerade, daß zur Wohlordnung der Zahlfolgen nur gewöhnliche Rekursionen verwendet zu werden brauchen. — Dies ist indessen nur scheinbar ein Widerspruch. Denn man braucht zur Wohlordnung des Kontinuums eben keineswegs nach dem Zermeloschen System vorzugehen. Es handelt sich doch darum, die Zahlfolgen selbst, also nicht die sämtlichen Teilmengen des Kontinuums zu ordnen. Die Ordnung und die Überblickung der Menge sämtlicher Teilmengen $M = \mathfrak{U}(N)$ einer Menge N ist aber grundfänglich eine schwierigere Aufgabe als die Ordnung der Elemente der Menge N selbst. In unserem Fall ist $M = \mathfrak{U}(N)$ wesentlich dasselbe wie die Menge aller (unfettigen) Funktionen einer (kontinuierlichen) Variablen. [Man kann etwa den Punkten jeder Teilmenge des Kontinuums den Wert 1, der jeweiligen Restmenge den Wert 0 geben und erhält dann die entsprechende

legende Frage und hier ist der Punkt, wo Hilbert wohl auf die Relevanz seiner Beweisführung bestehen wird.

D. Das Lemma I.

Bevor wir auf den Wortlaut des Lemma eingehen, ist es zweckmäßig, noch einige Vorbemerkungen zu machen: Wir hatten früher (in § 1a und § 4a) Zahlfolgen kennen gelernt, die mit bestimmten zurzeit noch ungelösten mathematischen (bzw. zahlenheoretischen) Problemen verknüpft waren, so z. B. mit dem Fermatschen Problem, dem Problem der Zwillingsprimzahlen und dgl. Oder man nehme, um ein bestimmtes Beispiel zu haben, die Hilbertsche Funktion der Folge $1^{\sqrt{1}} \ 2^{\sqrt{2}} \ 3^{\sqrt{3}} \ \dots \ n^{\sqrt{n}} \ \dots$, wo für ein Glied 1 zu setzen ist, wenn es rational, 2, wenn es irrational ist. Solche Folgen wollen wir der Kürze halber problematische Folgen nennen. Sie können verschiedener Art sein: manche sind Schritt für Schritt berechenbar, also den Wahlfolgen analog; bei anderen sind endlich oder unendlich viele oder auch alle Glieder mit einer endlichen Anzahl von Ausnahmen oder endlich auch alle Glieder überhaupt unbekannt. Gemeinsam ist ihnen allen, daß kein die Struktur der Glieder beherrschendes Gesetz bekannt ist.

Was hat man nun von solchen »problematischen« Folgen zu halten? Müssen sie nicht auch bei der Abzählung aller Folgen mit in Rücksicht gezogen werden? Und wenn dies der Fall ist, wie soll man sie abzählen?

Hilbert antwortet darauf mit dem in Rede stehenden Lemma I, das selbst ein besonderer Fall eines allgemeinen Lemma ist, das die Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems behauptet. Dieser Behauptung hat bekanntlich Brouwer energisch widersprochen (s. o. S. 55). Indessen versteht er wohl unter Lösung eines Problems eine wirkliche konstruktive Lösung und weigert sich an das Bestehen einer solchen a priori für alle Fälle zu glauben.

Hilbert dagegen meint nur, daß »die Annahme der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems widerspruchsfrei ist¹«. Daß die Behauptung der Lösbarkeit widerspruchsvoll ist, hat aber Brouwer nicht gesagt; er meint

unstetige Funktion.] Diese ist allerdings nur mittels transfiniter Rekursion gesetzlich beherrschbar. Aber ihre Mächtigkeit f ist auch größer als die des Kontinuums c . — Vgl. zum Ganzen: *Math. Ann.* z. § 5, Nr. VI C.

1) Er bemerkt (l. c. S. 180) ausdrücklich: »Nun kann zwar meine Beweistheorie nicht allgemein den Weg angeben, auf dem jedes mathematische

nur, wenn sie auch widerspruchsfrei ist, so braucht sie deshalb doch noch nicht wahr zu sein. Man erkennt hier wiederum den tiefen Gegensatz zwischen der intuitiven Grundanschauung Brouwers, die Wahrheit und der formalistischen Ansicht Hilberts, die bloß Konsequenz (Widerspruchsfreiheit) verlangt und für die Wahrheit in der formalen Mathematik ein sinnleerer Begriff ist. (Vgl. § 4b u. 6a.) Hier kommt also Hilberts eigentümlicher Standpunkt wirklich zur Geltung.

Das Lemma I im besonderen hat nun folgenden Wortlaut: »Wenn unter Beziehung von Funktionen, die mittels des transfiniten Symbols ε definiert sind, ein Beweis eines Widerspruchs gegen den Kontinuumssatz vorliegt, so lassen sich in diesem Beweise jene Funktionen durch solche ersetzen, die ohne Verwendung des Symbols ε allein durch gewöhnliche und transfinite Rekursion definiert sind, derart, daß das Transfinite nur in Gestalt des Allzeichens auftritt«. Dabei ist das transfinite Symbol ε die Bezeichnung der logischen Auswahlfunktion.¹ D. h.

$$A(\alpha) \rightarrow A(\varepsilon A)$$

bedeutet: Die Aussage A trifft sicher für den Gegenstand (z. B. die Zahl) εA zu, wenn sie überhaupt für irgend etwas zutrifft. (Illustrierendes Beispiel: A = unbestechlich sein, εA = Aristides. »Wenn überhaupt jemand unbestechlich ist, so ist sicher Aristides unbestechlich«). —

Der Sinn, in dem das Symbol ε das Transfinite bezeichnet, ist also streng zu scheiden von unserem bisherigen Gebrauch des Wortes in unserer Betrachtung, wo nur von einem transfiniten Prozeß (bzw. einer Rekursion der Funktion) die Rede war. Das durch ε bezeichnete Transfinite ist recht eigentlich der Intuition transzendent; ihm gegenüber kann das Transfinite im Prozeß als immanent, der Intuition zugänglich bezeichnet werden.

Das Lemma I hat also die Aufgabe, den transzendenten Gebrauch des Transfiniten auf den immanenten zu reduzieren. Es tut dies in einer eigentümlich negativen Form, indem es die Reduktion nur für den Fall eines Beweises eines Widerspruchs gegen den Kontinuumssatz fordert.

Der Gedanke liegt nun nahe, sich von dieser eigentümlich verklausulierten Fassung freizumachen. Was würde es bedeuten, wenn

Problem sich lösen läßt, — einen solchen gibt es ja auch nicht (!). — Vgl. auch die kürzlich veröffentlichte Äußerung von Weyl (Handbuch d. Philos., Abt. II, A, S. 20 f.).

1) Früher gebrauchte Hilbert den Buchstaben τ statt des ε ; f. o. § 1, S. 17ff.

man direkt die Reduktion in allen vorkommenden Fällen bei transzendent-transfinit definierten Zahlfolgen verlangte? Das würde nichts anderes sein, als die konstruktive Lösung des mit der jeweiligen Folge verknüpften Problems oder die Ersetzung jeder »problematischen« Folge durch eine normale, gesetzmäßige. Das wäre dann wirklich ein »allgemeines Lösbarkeitsaxiom«. Aber das würde eine Zerhauung des Knotens bedeuten! Hilbert fordert weniger: nur wenn das Bestehen eines solchen Problems zu einem Widerspruch mit dem Kontinuumsatz führt, wenn es also den Hauptbeweis stört, dann soll der Formelzusammenhang, der den Widerspruch beweist, nur immanent-transfinite Bildungen enthalten.

In dieser Fassung ist das Lemma sehr wenig verständlich; es erscheint ad hoc gemacht und enthält keinen natürlichen Tatbestand.

Aber man kann die ganze Frage unabhängig von den Besonderheiten, die Hilberts Beweistheorie hineinbringt, rein »fachlich« zu erörtern versuchen.

Man kann da zwei Wege einschlagen: einen weniger radikalen, aber gangbareren, und einen weniger leicht zu beschreitenden, aber dafür radikaleren.

I. Denkt man sich für das mit einer bestimmten Folge verknüpfte Problem die Lösung gefunden, so ist damit, wie schon bemerkt, die bisher »problematische« Folge in eine unproblematische, gesetzmäßige verwandelt. Auch bevor die Lösung gefunden ist, besteht offenbar eine eindeutige Zuordnung von Problem und Lösung. (Höchstens könnten mehrere Probleme dieselbe Lösung haben, aber dann müßten zwischen ihnen selbst Zuordnungen bestehen, sie wären verschiedene Ausdrücke eines Problems, und die entsprechenden problematischen Folgen könnten nicht als wesentlich verschieden angesehen werden). Also vermehren die lösbaren problematischen Folgen gar nicht wesentlich die Menge der gesetzmäßigen Folgen um neue Elemente. (Verdoppelung ist ja bei unendlichen Mengen nicht von Belang!) Man braucht sich also um die problematischen Folgen gar nicht zu bekümmern, soweit sie lösbar sind. — Aber es könnte doch — sofern man nicht das »allgemeine Lösbarkeitsaxiom« fordert — grundsätzlich unlösbare Probleme und damit verknüpfte Folgen geben! (Mit dieser Möglichkeit rechnet ja z. B. Brouwer ausdrücklich!) Was soll man mit diesen unlösbaren problematischen Folgen anfangen?

Zunächst muß man sich darüber klar werden, Phänomene welcher Art solche Folgen denn sind. Sind es überhaupt unendliche Folgen? Ihre Glieder sind doch entweder unbestimmt oder,

besten Falls, Schritt für Schritt (in der Zeit) bestimmbar, ähnlich wie bei einer frei werdenden Wahlfolge.¹ In beiden Fällen haben wir in ihnen kein *ἀνείργον δύναμις ὄν*, kein progressives Phänomen, dessen Werden ins Unendliche hinein bestimmt ist. Es liegen also, »kategorial« angesehen, gar keine echten endlosen Folgen vor! Diese unlösbaren problematischen »Folgen« tragen ihren Namen zu Unrecht! Also brauchen sie auch nicht bei der Abzählung »aller« (natürlich nur der echten) Folgen berücksichtigt zu werden. Es taucht gewissermaßen das Gespenst der »ganz willkürlichen« Folge noch einmal in einer neuen Maske auf, aber wir haben es entlarvt, wie damals, als es im Gewande der »Wahlfolge« uns entgegentrat.

— Dies ist der weniger radikale Weg zur Klärung der Sachlage.

II. Man kann nun in folgender Weise radikal vorgehen. Man lehnt die problematischen unlösbaren Folgen nicht (auf Grund kategorialer Erwägungen) ab², sondern sucht sie, als Folgen, so wie sie sich zunächst geben, bei der Abzählung mit zu erfassen. Außer den lösbaren Problemen, die durch ihre Lösung erledigt gedacht und so gezählt werden können, muß man also die unlösbaren Probleme als Probleme berücksichtigen.

Die Abzählbarkeit der gesetzmäßigen Folgen durch die Zahlen der II. Klasse beruht, wie wir sahen, darauf, daß — laut Lemma II — einer gewöhnlichen Zahlenfolge kein wirklich transfinites Gesetz aufgeprägt werden kann. Der Gedanke liegt nun nahe, zu vermuten, daß auch kein mit einer solchen Zahlfolge verknüpfbares, sie definierendes Problem eine unreduzierbar transfinite Komplikation in seiner intentionalen Struktur aufweisen kann. D. h. die Probleme selbst enthalten in ihrer eigenen logischen Struktur nur Rekursionen in indefinitum, nicht in transfinitum. Wendet man auf sie einen analog gebildeten Begriff der »Höhe«, des Index der strukturalen Komplikation (Stufungscharakteristik) an, wie auf die gesetz-

1) Die früher genannte problematische Folge, die von der Irrationalität der Zahlen $1\sqrt{1} \ 2\sqrt{2} \ 3\sqrt{3} \ \dots \ n\sqrt{n} \ \dots$ usw. abhängt, erweckt den Anschein, als ob sie bis ins Unendliche bestimmt ist. Allein die Entscheidung über die Irrationalität der Glieder der obigen Reihe kann doch entweder nur Schritt für Schritt durch lauter ganz unabhängige Erwägungen bestimmt werden, — dann haben wir eine der Wahlfolge analoge Bildung; oder sie wird durch Gesetz bestimmt, — dann haben wir überhaupt keine problematische Folge mehr. Im ersten Fall kommt die »Folge« nicht in Frage, weil sie überhaupt keine echte Folge ist; im zweiten ist sie unter den gesetzmäßigen Folgen schon mitgezählt.

2) Das zweite Verfahren ist also insofern radikaler, als es nicht vor den unlösbaren Folgen zurücksteht, sie nicht durch begriffliche Analyse umgeht.

mäßigen Funktionen, so kommt man – bei Problemen für Zahlfolgen – in Analogie zum Lemma II nur auf Indexzahlen II. Zahlklasse. Also wird auch durch die unlösbaren problematischen Folgen keine wesentliche Erhöhung der Gesamtzahl der Folgen (über \aleph_1 bzw. Ω_1 hinaus) bewirkt.

E. Die fachliche Bedeutsamkeit der Hilbertschen Lösung.

Um Mißverständnisse zu vermeiden, sei ausdrücklich bemerkt, daß die vorangehenden Betrachtungen zu den beiden Hilbertschen Lemmata keineswegs beanspruchen, diese Hilfsätze zu beweisen (auch nicht etwa Lemma I unter Voraussetzung von Lemma II zu beweisen). Dazu sind unsere Überlegungen viel zu unbestimmt. Auch wagen wir nicht zu hoffen, daß sie den Weg zu einem wirklichen Beweise in einigermaßen ins Gewicht fallender Stärke erhellen. Unsere einzige Absicht bei diesen Bemerkungen ist vielmehr, darzutun, daß Erwägungen über die Lemmata angestellt werden können, die sich durchaus in der intuitiven »metamathematischen« Sphäre bewegen. Und wir glauben zum mindesten sehr wahrscheinlich gemacht zu haben, daß ein künftiger Beweis sich in eben dieser Sphäre bewegen wird, der das ganze Problem ohne Zweifel angehört.¹

Wir können daher Hilbert nicht beistimmen, wenn er seinen Ansatz zur Lösung des Kontinuumproblems von seiner spezifischen Beweistheorie und seiner Lehre von der symbolischen »formalen Mathematik« ohne sachlichen Sinn abhängen läßt. Es fällt übrigens immer wieder dem unbefangenen Leser der Hilbertschen Abhandlungen auf, daß die eigentlich mathematischen Betrachtungen darin ein durchaus sachlich gerichtetes Interesse an den Problemen, an der rätselhaften aufzuklärenden Sachlage merken lassen. In Parenthese wird dann, etwas unwillig, von »unserer finiten Einstellung« geredet. Und der kühne Ansturm Hilberts auf das alte berühmte Problem wird um sein geschichtliches Recht und seine eigentliche Bedeutung gebracht, wenn man die ganze Sache auf willkürliche, wenn auch widerspruchsfreie Spielereien hinauslaufen läßt. Im Interesse der großen geistesgeschichtlichen Bedeutung der Gedanken Cantors und Hilberts selbst protestieren wir deshalb gegen ihre formalistische Umdeutung, die wir für eine Mißdeutung halten. Die große Sache möge der Forschung erhalten bleiben! – Daß dies grundsätzlich nicht unmöglich ist, glauben wir gezeigt zu haben.

1) Einige weitere Schritte zu einem solchen künftigen Beweis sind im Math. Anh. zu § 5, Nr. VI B, C zu skizzieren versucht worden.

§ 6.

Das philosophische Problem der mathematischen Existenz.

a) Hermeneutische Analyse der demonstrativen und der deduktiven Mathematik.

Das eigentliche philosophische Problem, das durch die Existenz einer mathematischen Wissenschaft gestellt wird, wurde schon im vorhergehenden als ein ontologisches bezeichnet. Es ist von grundlegender Wichtigkeit für das Weitere, zu präzisieren, was dieser Terminus »ontologisch« befaßt.

Unter »Ontologie« ist hier erstens nicht gemeint die allgemeine Wissenschaft vom Sein und seinen Möglichkeiten im Sinne der rationalistischen Philosophie des 17. und 18. Jahrhunderts.

Zweitens ist darunter auch nicht zu verstehen die »eidetische« Wissenschaft der »transzendenten« Gegenstände im Sinne des bisherigen phänomenologischen Sprachgebrauchs, — mag diese »Ontologie« nun aufgefaßt werden als eine von den Modi des Erkennenden und sonstigen Bewußtseins unabhängige Wesenswissenschaft »Realontologie« (H. Conrad-Martius), wie sie von den »realistisch« gerichteten Phänomenologen (Reinach, Pfänder, z. T. auch Scheler, Geiger, H. Conrad-Martius usw.) ausschließlich getrieben wird, oder mag es sich zugleich um eine für die eigentliche eidetische Phänomenologie des reinen Bewußtseins vorbereitende, die »Leitfäden« dafür bereitstellende Wissenschaft handeln (wie es Hufferls Wortgebrauch entspricht)¹.

Sondern es soll »Ontologie« hier soviel bedeuten wie »Hermeneutik der Faktizität« (Heidegger)². Damit ist gemeint die Auslegung (interpretierende Explikation) des tatsächlichen geschichtlichen Lebens als eines faktischen, historisch da Seienden, auf die Weise seines Da-Seins hin.

Diese Explikation geht auf den Seins-sinn dieses Daseins, sie zergliedert den Sinn des »Da« im Da-sein; d. h. sie legt aus und auseinander, wie das jeweils in Frage stehende Leben in seinem konkreten Seinsmodus da ist.

Man kann diesen hier gemeinten »Seins-sinn« auch als »Wesen« bezeichnen. In dieser Bedeutung würde »Wesen« dem griechischen Ausdruck »οὐσία« (so wie ihn Platon und besonders Aristoteles gebrauchen) etymologisch und bedeutungs-

1) Vgl. »Ideen« §§ 148—150.

2) Dieser betitelte eine im Sommersemester 1923 in Freiburg gehaltene Vorlesung »Ontologie oder Hermeneutik der Faktizität«.

mäßig einigermaßen entsprechen¹, nicht aber dem Worte *εἶδος* oder *ἰδέα*, obwohl für Platon die *εἶδη* das wahrhaft Seiende (*τὸ ὄντως ὄν*) sind. Denn *εἶδος* heißt ursprünglich, in der griechischen Umgangssprache, soviel wie »Aussehen« und behält die »optische« oder »okulare«² Bedeutungskomponente auch in der metaphorischen Verwendung bei. Es ist daher »Wesen = *οὐσία*« zu trennen von dem üblichen auf Hufferl zurückgehenden phänomenologischen Gebrauch vom »Wesen = *εἶδος*« (u. U. auch = *μορφή*) und nur in dem ersten Sinn soll das Wort hier gebraucht werden.

Es ist deshalb auch die folgende Untersuchung nicht schlechthin als eine »eidetische« zu bezeichnen, obwohl Beziehungen zu möglichen »eidetischen Untersuchungen« bestehen. Denn es wird lediglich versucht, den Sinn gewisser geistesgeschichtlichen Erscheinungen (die in der Geschichte der Mathematik aufgetreten sind) auslegend zu erörtern. Nicht aber wird betrachtet, ob und welche sonstigen »reinen Möglichkeiten« neben dem faktischen Verlauf der Geistesgeschichte vorhanden sein könnten.

Es ist in dieser auf ein besonderes Thema gerichteten Arbeit nicht der Ort, im Vorbeigehen phänomenologische Prinzipienfragen zu erörtern. Nur soviel sei gesagt: man pflegt für gewöhnlich in der Phänomenologie jede Analyse von Sinnzusammenhängen nach Vollzug der »eidetischen Reduktion« anzustellen, d. h. man spricht dem Faktischen als solchem, der bloßen Tatsächlichkeit jeden Sinngehalt ab. Ein Sinnzusammenhang bleibt nach dieser Auffassung völlig ungeändert, wenn er »in die Idee gesetzt wird«; denn es wird ihm dabei nur die als solche sinnleere Faktizität (Wirklichkeit, Realität) genommen, wodurch der gesamte Zusammenhang zum »Wesenszusammenhang« geworden ist und nur mehr eine »reine Möglichkeit« darstellt, die unter anderen Umständen als den tatsächlich vorliegenden »verwirklicht« sein kann³.

Demgegenüber ist es hier auf den Sinn der Faktizität selbst und als solcher abgesehen; es ist daher nicht möglich, ein Phänomen »in die Idee zu setzen«.

1) Heidegger, von dem der Terminus »Seins-Sinn« stammt, benutzt ihn zur Wiedergabe des aristotelischen »*οὐσία*«, was in entstellender Weise seit dem Mittelalter mit »substantia« übersetzt zu werden pflegt.

2) Nach einem Ausdruck des Grafen Paul Yorck, des Freundes Diltheys; vgl. »Briefwechsel Dilthey-Yorck«, (Halle, Niemeyer, 1923). S. 60, 113 u. ö.

3) Diese Auffassung ist z. B. kürzlich von H. Meßger, »Der Gegenstand der Erkenntnis« (ds. Jahrbuch Bd. VII, S. 613 ff.) ausführlich dargestellt worden.

Man könnte hiergegen einwenden, es könne und müsse eben auch das Eidos (nicht bloß das »Wesen«) der Faktizität betrachtet werden. Diese Formulierung erscheint uns unmöglich, denn sie würde doch befehlen, daß man die Faktizität betrachten solle, indem man von ihrem Faktisch-Sein abstrahiert, d. h. man stellt die doch wohl widersinnige Aufgabe, die ihrer Faktizität beraubte Faktizität zu untersuchen!

Aber es scheint sich hinter jener, so wie sie da steht unhaltbaren Formulierung doch der zutreffende Gedanke zu verbergen, daß die Sinnanalyse (hermeneutische Analyse) der Faktizität diese nur in ihrer Jeweiligkeit treffen kann. Das jeweils so und so seiende Leben hat die und die charakteristischen Züge, die in einer gewissen Allgemeinheit herausgestellt werden können und müssen. Aber es handelt sich hier um eine besondere Art von Begriffen, nämlich um formal-anzeigende (Heidegger), deren »Allgemeinheit« in ihrer Bezogenheit auf das »Jeweilige« liegt. Man kann diesen »formal-angezeigten« Seinsinn auch »Wesen« nennen, — aber dann ist dieses »Wesen« grundverschieden von jedem »Eidos« (ganz besonders jedem materialen Eidos!)¹.

Es handelt sich also für uns um Auslegung faktischen Seins. Was befiehlt dies aber, genauer betrachtet? Man kann ein Phänomen nur »auf etwas hin« auslegen, nicht schlechtweg. Es gibt aber eine sozusagen ausgezeichnete Richtung der Auslegung der faktischen Lebensphänomene: nämlich eine Auslegung auf den Sinn der in ihnen sich äußernden Weise des Daseins (des menschlichen Lebens) selbst.

* * *

In dieser Weise kann man nun die Geschichte der Mathematik, bzw. gewisse in ihrem Verlaufe erscheinende geistesgeschichtliche Phäno-

1) Man könnte mit Recht vom transzendenten (d. h. das Eidos transzendierenden) Wesen sprechen, wobei das Wort »transzendental« mehr im mittelalterlichen als im kantischen Sinn gebraucht wird. Vgl. Heidegger, »Sein und Zeit« S. 38: »Sein und Seinsstruktur liegt über jedes Seiende und jede mögliche seiende Bestimmtheit eines Seienden hinaus. Sein ist das transcendens schlechthin. Die Transzendenz des Seins des Daseins ist eine ausgezeichnete, sofern in ihr die Möglichkeit und Notwendigkeit der radikalsten Individuation liegt. Jede Erschließung von Sein als des transcendens ist transzendente Erkenntnis. Phänomenologische Wahrheit (Erschlossenheit von Sein) ist veritas transcendentalis.«

men ansehen. Damit kehren wir zu unserem konkreten Problem zurück.

Man kann fragen: Welchen Sinn hat die mathematische Wissenschaft, aufgefaßt als eine Weise des faktischen Lebens? Welche Tendenz – Lebenstendenz, faktische Daseinstendenz – liegt ihr zugrunde? Welches faktische, im Sinn der Faktizität selbst verwurzelte Motiv besteht für das Auftreten und die Entwicklung der mathematischen Forschung?

Das hierdurch angedeutete Problem ist freilich außerordentlich umfangreich und schwierig. Es überschreitet bei weitem den Rahmen der in dieser Arbeit behandelten Fragen. Aber man kann, von jenem Gesamtproblem ausgehend, die Fragestellung beschränken und dadurch zu einer im hier abgesteckten Rahmen angreifbaren Aufgabe gelangen.

Man kann nämlich fragen: Welche Bedeutung für die faktischen Lebenstendenzen und -motive hat der im Vorigen so viel behandelte Streit um den Begriff der »mathematischen Existenz«? Welchen Lebens-Sinn hat der Gegensatz der beiden streitenden Grundtendenzen der gegenwärtigen Mathematik, der formalistischen und der intuitiven?

Um diese Frage weiter zu behandeln, wird es gut sein, von der grundsätzlichen Kennzeichnung auszugehen, die in den vorangehenden Analysen von diesem Gegensatz gegeben wurde: wir unterscheiden Logik der Wahrheit – Logik der Konsequenz, Mathematik als Demonstration – und als »freischwebende« Deduktion. In diesen Gegensätzen wurzelt die Gegenüberstellung von Intuitionismus und Formalismus, um diese Gegensätze geht der Streit zwischen Brouwer und Hilbert.

Es ist in der Tat leicht zu sehen, daß, je nachdem man sich für eine demonstrative oder für eine deduktive Mathematik entscheidet, man sofort auch eine jeweils andere Hauptfrage bei der Grundlegung der Mathematik ins Auge fassen muß.

Das Grundproblem der Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems entspricht der deduktiven Grundauffassung, das Problem der Entscheidbarkeit der demonstrativen.

Für die »demonstrative« Auffassung besteht die Frage der Widerspruchsfreiheit ja nicht als primäre und ursprüngliche: wenn man die mathematischen Entitäten durch Konstruktion oder sonst ein konstituierendes Verfahren als Phänomene in ihrer »phänomenologischen Existenz« sichergestellt hat, – dann ist ihre Widerspruchsfreiheit selbstverständlich. – Andererseits: für eine

rein »deduktiv« orientierte Mathematik ist das Entscheidbarkeitsproblem nicht von primärem Belang. Die mathematischen Entitäten brauchen nicht vorgelegt zu werden, um als existent zu gelten. Die Möglichkeit der »Vorlegung« ist abhängig von den Unvollkommenheiten des »endlichen« menschlichen Intellekts. Von sachlichem Belang ist sie nicht. —

Damit ist nun schon ein Gedanke angedeutet, der geeignet ist, zu der tieferen philosophischen Bedeutung des in Frage stehenden Gegensatzes der mathematischen Grundauffassungen hin zu führen:

Der Gegensatz: Intuitionismus — Formalismus ist verwurzelt in dem philosophischen Grundgegensatz der anthropologischen und der »absoluten« Auffassung der Erkenntnis (Wissenschaft) und letztlich des Lebens selbst (als der eigentlichen Wirklichkeit). Dies ist nunmehr näher zu erläutern:

Für die »anthropologische« Grundanschauung steht der Mensch, besser das faktische menschliche Dasein im Mittelpunkt der philosophischen Problematik. Nicht der Mensch als Wesen »in der Welt«, nach Typen zu ordnen, nach psychologischen Gesetzmäßigkeiten zu durchforschen. Sondern als auslegbar auf den Sinn seines faktischen Daseins, seiner Faktizität, von der aus alle andere Faktizität in der Welt allererst ihre Bedeutung gewinnt.

Für die »absolute« Auffassung ist die Welt, das Universum des Seins »an sich« da, mit bestimmten Ordnungsstrukturen ausgestattet, die gewissen formalen allgemeinsten Gesetzen »wesensmäßig« gehorchen. Darin ist der Mensch nur ein unbedeutendes Wesen in der gewaltigen Stufenreihe der Wesen überhaupt, mit manchen Zufälligkeiten behaftet; obwohl vielleicht in sich ein Mikrokosmos.

Der Gegensatz beider Grundauffassungen ist analog dem bekannten Gegensatz zwischen Idealismus und Realismus, aber er geht philosophisch wesentlich tiefer.

Denn es ist zwar richtig, daß der »Idealismus« einen Schritt auf dem Wege nach der »anthropologischen« Auffassung hin bedeutet; aber auch nicht mehr. Die »anthropologische« Auffassung ist wesentlich historisch, d. h. der Mensch als erfahrender¹ (freilich

1) *ιστορεῖν* heißt »erfahren« (von *ἵστωρ*, der Augenzeuge). — Die im folgenden geschilderte historisch-anthropologische Betrachtungsweise ist — wenn auch nicht unter diesem Namen — in die Phänomenologie im wesentlichen von Heidegger eingeführt worden.

nicht im Sinne naturwissenschaftlicher »Empirie« (empirischer Beobachtung), sondern im Sinne der vollen Lebenserfahrung) hat seine Welt, die ihm nicht als ein gleichgültiges Objekt gegenübersteht (nicht eigentlich »Gegenstand« ist), sondern die als Um-Welt im lebendigen Umgang mit ihr »erscheint«, zum »Phänomen« wird.

Von hier aus, von der Konzeption der vollen »historischen« Lebenserfahrung aus gesehen, erscheint wenigstens der übliche transzendente Idealismus als eine abstrahierende Modifikation des ursprünglichen historischen Standpunkts. Denn bei ihm »hat« das Leben, das in der verblaßten Form des »reinen Bewußtseins« nur mehr erscheint (auch da und vielleicht gerade da in besonders extremer Weise, wo es »vernünftig« wertet und praktisch wird), die Welt (die nur noch in sehr metaphorischem Sinne die »seine« ist) in der Weise des bloßen »Gerichtet sein auf«, des reinen intentionalen Bezugs.

Allerdings heißt in-tentio eigentlich »Gespannt sein auf«, die gespannte Haltung¹ und drückt damit aus, daß die Weise des Vollzugs dieser intentio nicht gleichgültig ist; — daß der Mensch, als solcher, in seiner Faktizität mit dabei ist, wo immer intendiert wird. Aber freilich sieht der transzendentale Idealismus von diesem Moment gerade gebliffentlich ab; das »reine Ich«, der »Ich-Pol«, die »Subjektivität« ist in sich nichts als ein ideales Zentrum; es kann nicht konkret, als so und so da-seiend, die Intention vollziehen. Die Intention ist nicht »lebendig«, sondern nur verwirklicht: zu ihr als »Wesen«, als reine Möglichkeit, tritt lediglich der überall gleiche, in sich gänzlich farblose »Akzent« der »Realisierung« hinzu: das allein soll ihr Faktisch-Sein ausmachen².

1) intentio geht auch als Terminus historisch letzten Endes auf den stoischen Ausdruck *τόνος* zurück. Vgl. *Stoicorum veterum fragmenta*, coll. J. v. Arnim, Vol. I, p. 129, 4 (Clementes, de virtute) »... ἡ τῆς ψυχῆς ἰσχὺς τόνος ἐστὶν ἰκανὸς ἐν τῷ κρίνειν καὶ πράττειν ἢ μὴ.« (= Vol. III, p. 68, 30: Chrysippus de virtute).

2) Indessen muß dazu bemerkt werden, daß die transzendentalidealistische Phänomenologie (Husserl), wenn auch nachträglich, den konkreten ganzen Menschen als lebendige Persönlichkeit wiedergewinnt, indem die »habituellen« Eigentümlichkeiten, die den konkreten, individuellen Charakter eines Menschen ausmachen, als eine besondere Art (nicht im üblichen Sinne »konstituierte«) Transzendenz aufgefaßt werden. Noch weitergehend sagt Husserl (»Ideen« § 57, S. 109/10): »Verbleibt uns als Residuum der phänomenologischen Ausschaltung der Welt, und der ihr zugehörigen empirischen Subjektivität ein reines Ich (und dann für jeden Erlebnisstrom ein prinzipiell verschiedenes), dann bietet sich mit ihm eine eigenartige — nicht konstituierte — Transzendenz, eine Transzendenz in der Immanenz

Dagegen ist der Grundbezugslinn des historischen Daseins die Sorge (Heidegger). Der entscheidende Gewinn, der durch die Einführung dieses Begriffes über den der »Intentionalität« hinaus erzielt wird, liegt gerade darin, daß in der »Sorge« der Vollzug durch das faktische Dasein von vornherein unzweideutig enthalten ist und aus ihm nicht wieder entfernt werden kann. Nur ein anderer Ausdruck dieses Umstandes ist es, daß in dieser – »hermeneutischen« (Heidegger) – Auffassung des philosophischen Fragens der Begriff des reinen Ich oder des reinen Bewußtseins für die konkrete, volle, eigentlich ontologische Fragehaltung sofort verschwindet. Das »reine Ich« erscheint, vom hermeneutischen Gesichtspunkt aus gesehen, als eine Abstraktion, als ein ideales Zentrum, worauf gewisse abstrakte Typen von Bewußtseinsweisen bezogen werden, lediglich zu theoretischer Analyse, nicht zum Zwecke der konkreten Auslegung des Lebens.

Dagegen ist das Sorgen die Grundhaltung des konkreten faktischen menschlichen Daseins selbst, – wenigstens soweit es historisch ist (und, hermeneutisch angesehen, ist es historisch)¹. Mit dem Sorgen ist das eigentümliche Hineingestelltsein des Menschen in »seine« Welt bereits mitgegeben. Die ganze Frage, wie denn etwa die menschliche »Subjektivität« zu einer ihr transzendenten (transsubjektiven) Welt kommen könne, ist von vornherein als widersinnig nachgewiesen². Das »Konstitutionsproblem« der eidetisch-transzendentalen Phänomenologie erscheint in einer verwandelten Form, indem die Gegenstände der Welt als Gegenstände der Sorge (in verschiedener Weise: als bereits vorhandenes Material, als Verfügbarkeiten, Aufgaben, Hindernisse usw. usw. – allgemein zu reden: als »Bedeutksamkeiten«) auftreten. Das »Wie« ihrer Bedeutsamkeit für das Leben (das natürlich nicht eine einfache »Qualität« ist, sondern ein verwickelt aufgebautes Phänomen) ist das, was die eigentliche Weise der »Konstitution« des Gegenstandes ausmacht. – –

Diese grundsätzlichen Dinge können hier nicht weiter ausgeführt werden. Es ist vielmehr nun zu fragen, inwiefern die Existenz

dar.« Aber es bleibt doch noch unentschieden, ob dieses individuelle »reine« Ich als konkretes volles Leben zu denken ist, das im letzten Sinne des Seins des »Bewußtseins« selbst verankert ist.

1) Über die Frage der »Grenzen des Historischen« und darüber, was dann etwa das »Nicht-Historische« jenseits dieser Grenze sein könnte, ist einiges am Schluß der Abhandlung gesagt (§ 6 c IV).

2) Vgl. darüber Heideggers Darstellung in »Sein und Zeit«. (Über das sog. »In-Sein«), § 12, Seite 52 ff. dieses Bandes.

der mathematischen Gegenständlichkeiten in einer bestimmten Weise der Sorge und der Bedeutsamkeit sich äußert.

Insbesondere: wie ist der im vorigen immer wieder hervorgetretene Gegensatz »Formalismus – Intuitionismus« (mathematische Existenz als Widerspruchsfreiheit – oder als Konstruierbarkeit) zu interpretieren? Welche Weise des Sorgens und der Bedeutsamkeit verbirgt sich hinter jenem Gegensatz der wissenschaftlichen Haltung?

Blicken wir auf die Geschichte der Mathematik zurück, so zeigt sich, daß die demonstrative (intuitive) Mathematik in jeder Hinsicht das Ursprüngliche ist. Die rein deduktive (formalistische) Mathematik wurde eigentlich erst am Ende des 19. Jahrhunderts (seit 1870 etwa) ausgebildet, obschon sie in manchen früheren Strömungen vorbereitet ist (seit Leibniz.) So erscheint sie als eine merkwürdige Spätblüte; vielleicht ist sie als eine Entartung aufzufassen. (Vgl. § 6c IIIC).

In den Sinn dieser merkwürdigen geistesgeschichtlichen Erscheinung der rein deduktiven Mathematik kann man tiefer eindringen, wenn man von dem dieser Form der Wissenschaft entsprechenden Begriff der mathematischen Existenz ausgeht. Diese war bestimmt vom Kriterium der Widerspruchsfreiheit.

Nun war in einer früheren Betrachtung (in § 3a) diese Forderung der Widerspruchsfreiheit bereits auf ihren Sinn hin untersucht worden. Es war gezeigt worden, daß sie nicht selbstverständlich ist, denn die sog. Aussagen der formalen Mathematik beziehen sich nicht auf Sachverhalte, die phänomenologisch faßbar sind, und daher als Phänomene widerspruchsfrei definiert sein müssen. Es hatte sich aber auch herausgestellt, daß sie nicht sinnlos ist, sondern auch innerhalb des puren Formelspiels eine entscheidende Bedeutung hat. Sie war nämlich die *conditio sine qua non* für die unbegrenzte Fortsetzbarkeit der rein formalen Deduktion. Sie sicherte die Grenzenlosigkeit im Fortgang von einer Formel zu einer streng bestimmten (nicht beliebigen) anderen; genauer gesagt: sie schloß die fatale Möglichkeit aus, daß die formale Beziehung des »Folgens« einer Formel aus anderen unendlich vieldeutig wird, indem etwa aus einer bestimmten »widerspruchsvollen« Formel alle möglichen Folgerungen entspringen können.

Hält man sich diese Bedeutung der Forderung der Widerspruchsfreiheit vor Augen und fragt man daraufhin, welche Sorge oder genauer welche Weise des Sorgens hinter einer solchen Forderung steht, so ergibt sich unmittelbar die Antwort: die Sorge um den unbe-

grenzten Fortgang des Deduzierens selbst. Das heißt also: die Sorge um die Erhaltung der im formal-mathematischen Forscher lebendigen spezifischen Sorgensweise. Anders ausgedrückt: der Betrieb der Deduktion soll gesichert werden, unbekümmert um die Sachen und die sachlichen Probleme, um die es sich handelt oder wenigstens handeln könnte. Dadurch, daß man den Sinn der mathematischen Existenz in die Widerspruchsfreiheit des »existierenden« Gebildes verlegt, — wendet man also den Blick von dem Seinsinn des Gebildes geradewegs ab. Man versperrt sich absichtlich die Möglichkeit und den Weg, nach der Weise des Seins des Gebildes überhaupt noch zu fragen. Daß es widerspruchsfrei ist, befagt für seinen Seinsinn gar nichts, es befagt im Gegenteil gerade: man kann von diesem Seinsinn absehen, die Frage dieses Seinsinns ist gänzlich belanglos für den Fortschritt der mathematischen Wissenschaft. Die Sorge fragt also nicht die mathematische Gegenständlichkeit nach dem Wie ihres Seins, sie ist nicht um Sein besorgt, sondern nur um ihr eigenes Erhalten-Werden.

Das Kriterium der mathematischen Existenz wird damit gerade darein gelegt, daß die Möglichkeit bestehen soll, von der Frage nach dem Seinsinn der mathematischen Gegenstände abzusehen. Die mathematische Existenz wird so definiert, daß der Sinn ihrer eigenen Definition das Eindringen in den Seinsinn der mathematischen Gegenständlichkeiten gerade verbietet. Man kann also, in Analogie zu einem bekannten Scherzwort, geradezu sagen: »*existentia a non existendo*«: die Idee der Existenz in sich selbst enthält schon die Abwehr dagegen, die »*existente*« Gegenständlichkeit auf ihr Sein, ihre eigentliche Existenz hin zu befragen.

Diese so paradoxe Sachlage wird verständlich, wenn man sie aus dem Gesichtspunkt der hermeneutischen Phänomenologie (Heidegger) betrachtet. Denn da erscheint sie nur als eine besonders prägnante Ausformung einer eigentümlichen Lebensbewegtheit, die sich des Sorgens in mannigfacher Weise bemächtigen kann. Die Sorge, ursprünglich in den Vollzug des vollen Lebens eingespannt, erlangt eine gewisse »Eigenständigkeit« (Heidegger), sie tritt in die Modifikation des »Sich-Verforgens«, wobei der Doppelsinn dieses »*dialektischen Wortes*« bedeutsam ist: einerseits befagt es das Sich-Verlieren der Sorge in sich selbst, andererseits klingt der triviale Sinn des sich (etwa in wirtschaftlicher Hinsicht) Verforgens an, und bedeutet sich selbst Nahrung geben, sich selbst erhalten, autarkisch werden. In diesem Wandel der sorgenden Lebensbewegtheit äußert

sich die allgemeine Tendenz des »umweltlichen Daseins« nach Selbstgenugfamkeit, die der Scheu entspringt, auf den Sinn des eigentlichen Seins des Daseins (die »Existenz« im zugespitzten Sinn) zurückzugehen, kurz ausgedrückt, die »Abriegelung des Lebens gegen sich selbst« (Heidegger)¹.

* * *

In gewissem Sinn kommt damit in der formalistischen Mathematik eine Tendenz zur Vollendung, die schon früh als eine spezifisch mathematische erkannt wurde, nämlich die »aphairetische« Tendenz. Bereits Aristoteles spricht von dieser *ἀφαίρεσις*, die die mathematische Betrachtung an ihren Gegenständen übt, an einer bemerkenswerten Stelle der Nikomachischen Ethik. Die Dinge als mathematische Gegenstände fassen, heißt von ihrem eigentlichen Sein weggehen, nicht in sie eindringen, bedeutet eine Absperrung des schlichten und unmittelbaren Lebensbezugs zu ihnen. Deshalb, sagt Aristoteles, kann auch ein junger Mann Mathematik selbständig forschend treiben, weil es dazu keiner Lebenserfahrung bedarf, während die konkreten Wissenschaften von jungen Menschen nur auf Grund autoritativer Mitteilungen, also im wesentlichen schülerhaft, betrieben werden können².

Sachlich angesehen, bedeutet diese *ἀφαίρεσις* (abstractio), daß die Gegenstände der Mathematik keinerlei Lebensbezug mehr als solche haben. Und dies zwar, näher betrachtet, in noch viel radikalerer Weise als die Gegenstände der naturwissenschaftlichen Beobachtung (etwa die »Pflanzen« — nicht die Umwelt Dinge »Blumen« und dgl.). Denn bei jenen Objekten der naturwissenschaftlichen Beobachtung ist doch immerhin etwas Konkretes im Blick, ein Phänomen, das durch einen bestimmten Motivationszusammenhang verbunden bleibt mit dem bedeutamen Umweltding, als das es ursprünglich dem »alltäglichen« Leben erschien. In gewissem Sinn ist die botanisch beschriebene

1) Vgl. »Sein und Zeit«, I. Teil, I. Abschnitt, 5. Kapitel B. (§§ 35–38). (Nachträglicher Hinweis; die Terminologie ist teilweise von unserer verschieden.)

2) Eth. Nic. 6, 9 (p. 1142 a 12–20): »... γεωμετρικοί μὲν νέοι καὶ μαθηματικοὶ γίνονται καὶ σοφοὶ τὰ τοιαῦτα, φρόνιμος δ' οὐ δοκεῖ γίνεσθαι. αἴτιον δ' ὅτι τῶν καθ' ἑκαστά ἐστιν ἡ φρόνησις, ἃ γίνεται γνῶριμα ἐξ ἐμπειρίας, νέος δ' ἐμπειρος οὐκ ἔστιν· πολλὸς γὰρ χρόνος ποιεῖ τὴν ἐμπειρίαν· ἐπεὶ καὶ τοῦτ' ἂν τις σκέψαιτο, διὰ τί δὴ μαθηματικὸς μὲν παῖς γένοιτ' ἂν, σοφὸς δ' ἢ φυσικὸς οὐ. ἢ ὅτι τὰ μὲν δι' ἀφαιρέσεώς ἐστιν, τῶν δ' αἱ ἀρχαὶ ἐξ ἐμπειρίας· καὶ τὰ μὲν οὐ πιστεύουσιν οἱ νέοι ἀλλὰ λέγουσιν, τῶν δὲ τὸ τί ἐστιν οὐκ ἄδηλον.«

Blüte doch noch »dieselbe« Blume, die wir auf der Wiese pflückten, ist der Planet Venus »derselbe« Gegenstand als der Abendstern oder der Morgenstern.

Bei mathematischen Gegenständlichkeiten ist es indessen anders.

Ich bilde z. B. aus fünf Gegenständen, d. h. zunächst Umweltdingen, etwa Äpfeln, verschiedene Figuren: eine lineare, eine zyklische Anordnung, eine ebene oder eine körperliche Quincunx und dgl. und betrachte diese Anordnungen mit den Augen des Mathematikers, etwa interessiert an ihnen als topologischen Kombinationen. Dann abstrahiere ich (*ἀφαιρέω!*) von dem sachlichen Gehalt der Gegenstände, nicht nur von ihrem Umweltscharakter, sondern auch von ihrem anschaulichen konkreten Gehalt überhaupt. Einzig die Weise der gegenseitigen *B e z o g e n h e i t* der Gegenstände, ihre *O r d n u n g* ist noch von Belang. Es genügt, an Stelle der konkreten Gegenstände symbolische, in sich leere *Z e i c h e n* zu setzen, um diese Anordnung zu studieren, *N a m e n* treten gewissermaßen (und auch die nur in der äußerlichsten Form als Zeichen, etwa als Buchstaben *a*, *b*, *c* usw.) an die Stelle der Dinge selbst.

Nun ist das *N e n n e n* (*ὀνομάζειν*) an sich eine Weise den Gegenstand zu haben, die ihn nicht eigentlich erfaßt (anspricht, *λέγει*) sondern von sich wegstößt, in Entfernung hält. Mit der »Etikettierung« ist der Gegenstand erledigt, – im primitiven Seelenleben ist er durch den geeigneten, ihm zukommenden, Namen gebannt¹. (Vgl. *Aristoteles*, *Metaphysik Z*, c. 4 (1030a 7–17)). Das Nennen (und a fortiori das Bezeichnen) hellt den Gegenstand nicht auf (wie der *λόγος ἀποφαντικός*, das aufzeigende Ansprechen, das in der Möglichkeit des *ἀληθεύειν*, des »Entdeckens« steht), sondern läßt ihn, seine nähere Beschaffenheit, d. h. vor allem seinen Seinsinn, seine *οὐσία*, gebliffentlich im Dunkeln.

Relativ zum eigentlichen sachhaltigen Ansprechen, im Leben und in der beschreibenden Wissenschaft, ist jedes mathematische Auffassen eines Dinges, das eng verbunden mit dem mathematischen *B e z e i c h n e n* (z. B. durch Buchstaben)² ist, ein *Sich-vom-Leibe-Halten*

1) Der Abstand zwischen der modernen Erledigung durch Bezeichnung und dem alten, frühmenschlichen »Namenszauber« ist gewaltig; aber trotzdem lassen sich gewisse Gemeinsamkeiten aufweisen. Der ganze Sachverhalt ist sehr wichtig für die Frage der *Sinngenesis* der Mathematik aus der magischen frühmenschlichen Technik. Vgl. dazu *H. Ammann*, *Die menschliche Rede* (Laub 1925), Bd. I, S. 89f. und ungedruckte *Aristoteles-Interpretationen* *Heideggers*.

2) Man vergleiche etwa den sprachlichen Ausdruck der Bezeichnung geometrischer Punkte bei *Euclides* (im *Simplicius-Fragment* über die Qua-

des Gegenstands, ein Sich-Wegrücken seines eigentlichen Seins. Das Ding wird gewissermaßen zum bloßen Haltepunkt, nach dem der Faden einer (im übrigen eigentümlich leeren) Intentionalität gespannt ist. Im Blick ist eigentlich nur der »Gegenstand höherer Ordnung«, der sich auf den (unter sich gleichartigen, also »nivellierten«) Intentionalitäten erster Ordnung aufbaut. Diese Intentionalitäten erster Ordnung bilden vermöge ihrer Gleichartigkeit eine Mannigfaltigkeit nebeneinander zu ordnender Bezüge (»Bezugsmannigfaltigkeit«, Heidegger). Die Möglichkeit, die Bezüge in eine derartige Mannigfaltigkeit »einzuebnen«, unterscheidet das Mathematisch-Formale in ontologischer Hinsicht vom Formal-Angezeigten¹. Denn bei der »formalen Anzeige« (Heidegger) bleibt der Bezugs-sinn in der Schwebe, er ist nicht erfüllt, aber auch nicht abgerückt, d. i. »abstrakt« (durch ἀφαίρεσις), sondern ständig in Bereitschaft, auf dem Sprunge, gewissermaßen auf der Suche nach Erfüllung. Die Zeige-Funktion, das Indizieren der formalen Anzeige ist eine bestimmte Bewegtheit, ist von dynamischer Art. Dagegen ist die mathematische Form in sich ruhend, autarkisch, statisch; der Erfüllung wohl fähig, aber keineswegs bedürftig.

Dieser letzte Tatbestand drückt sich, von einer anderen Seite aus gesehen, darin aus, daß die »Gegenstände höherer Ordnung« in einer bestimmten, wenn auch nicht sinnlichen Weise angeschaut werden können, nämlich mittels der »kategorialen Anschauung« (eine grundlegende Entdeckung von Hufferls »Logischen Untersuchungen«)². Obwohl die mathematischen Objekte (etwa das Kolle-

draturen des Hippokrates) und bei Euklid. Eudemos sagt z. B. »τὸ ἐφ' ᾧ (ὅῦ) K«, d. h. »der Punkt, bei dem K steht«, und »ἡ ἐφ' ᾗ AB«, d. h. die Gerade, bei der AB stehen«; Euklid hat dafür stets »τὸ K« (sc. σημεῖον) bzw. »ἡ AB« (sc. εὐθεῖα). Siehe darüber: »Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates«, griechisch und deutsch von F. Rudio (Leipzig 1907), S. 147 (Wörterverzeichnis unter ἐπ'). — Die mathematische Bezeichnung ist danach ursprünglich nur bloße Markierung einer bestimmten Stelle der Figur (»dort, wo A steht«), später wird sie mit dem mathematischen Gegenstand selbst sprachlich identifiziert »das A« usw. Diese Tendenz gipfelt schließlich in der modernen formalistischen Mathematik: »Wo Begriffe fehlen, da stellt ein Zeichen zur rechten Zeit sich ein« (Bernays)

1) Über die Beziehung der Mannigfaltigkeit (Menge) zur »Einebnung« wurde schon in § 5 a, IV, A. gesprochen.

2) Man darf diese Gegenstände der kategorialen Anschauung nicht mit den der sinnlichen Anschauung (Wahrnehmung, anschaulichen Phantasie usw.) zugänglichen »Gestalten« verwechseln. (v. Ehrenbergs »Gestaltqualität« entspricht Hufferls »figuralem Moment« [Phil. d. Arithmetik] bzw. »sinnlichem Einheitsmoment« [Log. Unterf.]) Während die »Gestalten«, beson-

tivum, die geordnete Menge, die Zahl, Funktion usw. usw.) nicht sachhaltig (material) sind, so sind sie doch, im übertragenen Sinn zum mindesten, Sachen mit sachlichen, in voll erfüllter, originär gebender Anschauung (die allerdings eben »kategorial« und keineswegs »sinnliche« Wahrnehmung ist) erfassbaren Eigenschaften und Beziehungen. Keineswegs sind sie leere, obgleich vielleicht widerspruchsfreie Gegenstände.

Der von Hilbert gelegentlich (für die metamathematischen Urgegenstände) gebrauchte Ausdruck »Zeichen, die nichts bedeuten« trifft daher nicht das Richtige, obwohl in ihm anscheinend etwas Richtiges, wenn auch verworren, gemeint ist. Denn freilich sind die mathematischen Objekte keineswegs »signitiv« (in leerer Intention) gegeben. Aber das bringt auch mit sich, daß die Spannung zwischen Leerintendiertem und Erfüllendem, zwischen »Zeichen« (signum) und »Bedeutung« (significatum) wegfällt. »Zeichen, die nichts bedeuten« sind eben ihrer Zeige-Funktion entkleidete Zeichen, d. h. gar keine Zeichen. – Aber trotzdem verbirgt sich hinter Hilberts verfehltem Ausdruck etwas Treffendes: Es ist nämlich nicht so, wie man nach dem durchgängigen Parallelismus zwischen Noesis und Noema meinen sollte, daß die mathematischen Objekte (Gehalte) und die auf sie gerichteten Intentionalitäten (Bezüge), in ontologischer Hinsicht äquivalent, nebeneinander lägen. Vielmehr ist – ähnlich, wie sich das Zeichen-Sein in dem indizierenden Bezug erschöpft – bei dem Gesamtphänomen des Mathematischen der Bezugsinn »archontisch« (Heidegger), der

ders nach den Ergebnissen neuerer psychologischer Forschung, als primäre, den sinnlichen »Elementarphänomen« (Empfindungen, »hyletischen Daten« usw.) vorausgehende Erscheinungen – wenigstens in den meisten Fällen – aufzufassen sind, sind die kategorialen Gegenständlichkeiten (wie Menge oder Kollektion, Reihe bzw. Folge usw.) wirklich von höherer Ordnung als ihre »Elemente«. Und das bleibt bestehen, obwohl gewisse sinnliche Gestalten Motive abgeben können für die Bildung »entsprechender« kategorialer Gebilde. Die kategorialen Strukturen erweisen sich eben als Spätererscheinungen des alternden Lebens. Sie sehen eine gewisse Auflösung des ursprünglichen »apeiromorphen« (Natorp), unendlich durchformten, primitiven »Chaos« (Koffka) in Elemente bereits voraus und vollziehen nunmehr eine Synthesis dieser Elemente, die zwar eine gewisse Analogie zu den primitiven Gestalten zeigt, auch höchstwahrscheinlich für das Leben eine Art Erfah der verloren gegangenen Gestalten bietet, aber trotzdem von grundfänglich anderer Art als die primitive Gestalt ist und keineswegs zu dieser zurückführt. – Man kann eine derartige Entwicklung z. B. am Phänomen der Zahl aufzeigen. Im Grunde erwächst so überhaupt erst das klassische mathematische Problem der *στοιχείωσις*, des Elementaraufbaues einer definiten Mannigfaltigkeit. – (Vgl. das über Platon's *στοιχείωσις* in § 6 c II D Gefagte.)

ontische Akzent liegt sozusagen auf dem Bezug. Ontisch primär ist die Noese, sekundär das Noema. (Gerade umgekehrt ist es z. B. bei der sinnlichen Wahrnehmung. — Man könnte die Kantische Rede von der Rezeptivität der Sinnlichkeit und der Spontaneität des Verstandes auf diesen Umstand beziehen). Die synthetische Tätigkeit »erzeugt« in gewissem Sinn die mathematischen »Gegenstände höherer Ordnung«; sie werden nicht einfach als »ideale Gegenstände« in der Welt der Idee »vorgefunden«. Der Grund und der Beleg für diesen Sachverhalt liegt in der im Vorigen beschriebenen »Abstraktion« (*ἀφαίρεσις*). Die in ihr getätigte Absperrung der Hingabe an den Seinsinn der Substrate, die der mathematischen Syntax zugrunde liegen, verschließt zugleich die Möglichkeit des rezeptiven Hinnehmens der Gehalte als so und so seiender. Was also übrigbleibt und gewissermaßen von der »Absperrung« »freigelassen« wird, ist der »Bezugssinn« und auch dieser nicht konkret, nicht in dem »Sinn« des einzelnen Bezugs zum einzelnen »Objekt«. Sondern infolge der durch die Neutralisierung, Nivellierung, »Entlebung« (Heidegger) ermöglichten Gleichartigkeit der Elemente kommt es zu einer — ontisch homogenen — Mannigfaltigkeit von Bezügen, auf deren kombinatorischer Struktur der Akzent des Phänomens ruht. Diese — ontisch das Phänomen beherrschende — Struktur ist eine Bezüglichkeit von »zweiter Ordnung«, eine Bezüglichkeit zwischen Bezügen, eine Syntax monothetischer Elementarakte. (Etwa beim Zählen: der Bezugssinn jeder gezählten »Einheit« ist »einstrahlig«, die einstrahligen pointierenden Noesen werden im Actus des Zählens in bestimmter Weise syntaktisch vereinigt.) Nun haben die »Elementarakte« freilich ebenfowenig ein selbständiges, »autochthones« (aus sich selbst stammendes) ontisches Gewicht, — aber insofern sie die höhere Syntax ermöglichen, kommt ihnen indirekt ein solches zu. Dagegen liegt der ontische Schwerpunkt des gesamten Phänomens ganz in der höheren Syntax selbst und diese ist — schon als Syntax von Elementarbezügen, nicht Elementargehalten — eben *σύνταξις*, nicht *σύνταγμα* (oder gar *συνταττόμενον*)¹.

Es ist wohl wahr, daß man nach dem Schema des noetisch-noematischen Parallelismus der Syntax das Syntagma, den zusammengefügten Gegenstand »höherer Ordnung« entsprechen lassen kann. Aber ontologisch angesehen (d. h. nach einer Dimension, die in der

1) Die griechischen Bildungen auf *μα* gehören eher zum Verb als zum Nomen (»Verbalsubstantiva«). Vgl. W. Porzig, Indogerm. Forsch. 42, S. 223 ff.

streng eidetischen phänomenologischen Forschung nicht zutage treten kann, weil von ihr geflüchtlich, in der sog. »eidetischen Reduktion«, abgesehen wird), ist dieses *σύνταγμα* nicht in sich fest gegründet; es ist gewissermaßen auf Sand gebaut: den elementaren Noemen, auf denen es sich aufbaut, ist durch die *ἀφαίρεσις* bei ihrer Erfassung ihr ontisches Gewicht geflüchtlich entzogen worden¹.

* * *

Der geschilderte Tatbestand mag gleichgültig und die gesamte Erörterung ausgeklügelt und spitzfindig scheinen, — aber man bedenke die weittragenden Folgen der soeben gemachten Feststellung, daß das ontische Gewicht der mathematischen Phänomene auf dem Bezugssinn ruht.

Der Bezug ist als solcher niemals ontisch selbständig: Was ihm zur Faktizität verhilft, ist stets der Vollzug. Also liegt auch der Quell der ontischen »vis« (der Seins-Kraft) der mathematischen Phänomene im Vollzug der mathematischen Synthesen (Syntaxen).

Diese einfache Bemerkung gestattet eine überraschende Anwendung auf den ontologischen Streitpunkt zwischen der formalistischen und der intuitionistischen Definition der mathematischen Existenz: Soll nämlich die ontische vis des Mathematischen im Vollzug der Syntaxen liegen, so müssen diese Syntaxen im strengen Sinne faktisch sein, d. h. wirklich vollzogen werden können. Aber die »transfiniten« Syntaxen² können das offenbar nicht. Hilberts transfinite Axiome drücken die Forderung von de facto unvollziehbaren Synthesen aus. Ebenso ist z. B. das Cantorsche Kontinuum eine unvollziehbare Synthese³.

1) Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß die ganze Analyse sich nicht auf primitive »Gestalten«, so wie sie »sinnlich« erfaßt werden, durch Wahrnehmung und die vielleicht noch ursprünglichere »produktive« Phantasie (vgl. Scheler, Die Wissensformen und die Gesellschaft [Leipzig 1926], S. 435–455) oder die »eidetische Anschauung« nach E. R. Jaensch (Der Aufbau der Wahrnehmungswelt, Leipzig 1925) bezieht. Sondern es ist ausschließlich abgesehen auf die sich auf »Elementen« aufbauenden, in der »Sinngenesis« (Heidegger) späten, in gewisser Hinsicht sekundären kategorialen synthetischen Gebilde. Diese sind es, die ausschließlich die Gegenstände einer entwickelten Mathematik bilden.

2) Im Sinne Hilberts, nicht im Sinne des in § 5a geschilderten transfiniten Prozesses.

3) Wenigstens, wenn es, in Cantors eigenem Sinne, als aktual-unendliche Punktmenge aufgefaßt wird. Anders verhält es sich damit (wie in § 5b III gezeigt wurde), wenn man die Grundanschauung in Betracht

Damit entscheidet die phänomenologische Analyse als hermeneutische, d. h. als auslegende auf das Dasein hin, die Streitfrage der Definition der mathematischen Existenz zugunsten des Intuitionismus. Denn die intuitionistische Forderung, jeder mathematisch existente Gegenstand müsse durch eine in concreto und de facto vollziehbare Konstruktion »dargestellt« werden können (beinahe im Sinne der »Darstellung« eines reinen Stoffes in der Chemie) enthält nichts anderes als das Postulat: alle mathematischen Gegenstände sollen durch faktisch vollziehbare Synthesen erreicht werden können. Und das besagt, eigentlicher ausgedrückt: Echte (»existente«), mathematische Phänomene »find« nur in faktisch vollziehbaren Syntaxen.

Es gelingt also auf diese Weise, den in der eidetischen Phänomenologie aufgewiesenen Sachverhalt, daß die mathematischen Gegenstände (zum mindesten der »klassischen« Art) kategorial angefaßt werden können, aus einem tieferen, »ontologischen« Gesichtspunkt zu begreifen [es sei nochmals darin erinnert, daß »Ontologie« hier so viel besagt wie »Hermeneutik der Faktizität« (Heidegger), nicht im traditionellen Sinn Eidetik transzendenter Gegenstände]: die Anschaulichkeit der mathematischen Gegenstände rührt letztlich her von der faktischen Vollziehbarkeit der entsprechenden syntaktischen Noesen.

Damit ist nun schließlich auch eine bestimmte Position gewonnen gegenüber der vorhin aufgestellten Alternative zwischen der »anthropologischen« und der »absoluten« Auffassung der Erkenntnis. Dadurch, daß sich aus der Eigenart der mathematischen Phänomene die Notwendigkeit ergibt, den Vollzug in den Mittelpunkt zu stellen, ist das eigene (historische) menschliche Dasein als ausschlaggebend hingestellt. Die Mathematik erhält damit eine »anthropologische« Fundierung¹. Nicht ein ordnungsmäßig gegliedertes, »objektives«, im traditionellen Sinn »an sich« seiendes Universum (wie es in irgendwelcher Form auch die neueste Metaphysik annimmt), sondern das faktische Leben des Menschen, das jeweils eigene Leben des Einzelnen (oder wenigstens der jeweiligen »Generation«) ist das ontische Fundament, auch für das Mathematische.

zieht, die dem Versuch Hilberts, das Kontinuum mittels der transfiniten Zahlen abzuzählen, zugrunde liegt.

1) Man beachte, wie sich die phänomenologische Forschung in diesem Punkte seit dem Kampfe Hufferls (im I. Band der »Logischen Untersuchungen«) gegen den »Psychologismus« gewandelt hat; – aus inneren Gründen, ohne die damaligen Argumentationen Hufferls irgendwie preiszugeben!

In besonders zugespitzter Form drückt sich dies im »Entscheidbarkeitsproblem« aus, das nicht zufällig im Mittelpunkt der mathematischen Logik des Intuitionismus steht. Denn dieses Problem ist spezifisch menschlich oder wenigstens ein Problem eines »endlichen« Wesens (einer »Kreatur«). Für Kants »intuitiven Verstand« (intellectus archetypus) würde es nicht existieren. Gott braucht nicht zu zählen. (Gegen Gauß' Meinung.) Das Zählen ist vielmehr bedingt durch die wesentliche Zeitgebundenheit des Menschen (genauer seine »historische« Befangenheit), wie ja auch schon Kant die Zahl auf die Zeit zurückgeführt hat, d. h. auf eine nach ihm spezifisch menschliche Anschauungsform¹. Daß etwa eine Wahlfolge Schritt für Schritt in der Zeit wird und nicht mit einem Blick in ihrer ganzen unendlichen Ausdehnung übersehen werden kann, ist eine unmittelbare Folge unserer Zeitgebundenheit.

Es entsteht also die Aufgabe, die Stellung der mathematischen Gegenstände zur Zeitlichkeit, diesem exquisit menschlichen Moment des Daseins, zu untersuchen.

b) Die entscheidende Rolle der Zeitlichkeit für den Seinscharakter der mathematischen Gegenstände.

I. Die grundlegenden antiken Theorien.

A. Geometrische Figuren.

Es ist eine noch aus antiker Zeit überkommene Meinung, die ziemlich unangegriffen bis jetzt geherrscht hat, wo immer man den mathematischen Gegenständen überhaupt einen eigenen Seinsinn zuerkannte, daß ihr Verhältnis zur Zeitlichkeit ein wesentlich negatives sei. Das Mathematische ist gekennzeichnet durch seine sog. »Überzeitlichkeit« (mitunter wird dafür auch »Unzeitlichkeit« oder »Zeitlosigkeit« gesagt). Dies stammt offenbar noch aus platonischer Tradition. Denn Plato sah in den mathematischen Gegenständen ein Zwischenreich zwischen der Welt der Ideen und der Welt des Werdens. Man muß hierbei freilich zunächst an die geometrischen Figuren denken, die ja einerseits in der sinnlichen Welt niemals exakt verwirklicht sind (an denen also die wirklichen Formen nur »teilhaben«), die andererseits aber doch in beliebig vielen Exemplaren auch in der geometrischen Betrachtung selbst auftreten (so daß also z. B. die beiden Kreise, die man zur Konstruktion des gleichseitigen

1) Über Kant f. § 6c III D.

Dreiecks benutzt (Euklid I, 1), ihrerseits an der Idee des Kreises überhaupt teilhaben)¹.

Um die Frage der »Beweglichkeit« der geometrischen Figuren (die mit der Beziehung des geometrischen Gebildes zur Zeit eng zusammenhängt) erhob sich der (schon in § 5b erwähnte) Streit zwischen Speusippos und Menaichmos: die platonische Auffassung, die schon im Staat (VII, 527 AB) dargelegt ist, war und blieb (bis zu Proklos hinunter) die, daß »wir die Vorgänge bei der Entstehung der Figuren nicht in der Weise eines wirklichen Herstellens, sondern nur erkenntnistmäßig verstehen« (*τὰς δὲ γενέσεις αὐτῶν οὐ ποιητικῶς ἀλλὰ γνωστικῶς ὁρῶμεν*) – : »gleich als ob wir das Ewig Seiende als Gewordenes nehmen« (*ὥσανεὶ γιγνόμενα λαμβάνοντες τὰ αἰὲ ὄντα*)².

Das »Werden« (*κίνησις* im allgemeinen Sinn), das wir bei der »Entstehung« der Figuren durch Konstruktion (oder im elementarsten Fall bei dem »Ziehen« der Geraden und dem »Beschreiben« des Kreises) beobachten, ist für den Akademiker nur das sinnliche Abbild einer inneren Bewegung des »diskursiven Denkens« (*διάνοια*)³ (genauer eines »Vermeinens«, das in einem bestimmten Prozeß fortschreitet). Dieses »macht Jagd (auf die mathematischen Gebilde), einmal, indem es keinen mannigfaltigen Weg nimmt, . . . und mit einsichtigem Ergreifen (sie) ergreift, als das Erblicken des Sichtbaren, – anderes aber kann es nicht sogleich ergreifen und geht auf es los in der Weise der Vermittlung, und ergreift das damit in Zusammenhang Stehende und vollbringt so die Jagd« (Speusippos).

(*ἡ διάνοια τὴν θήραν ποιεῖται τὰ μὲν οὐδεμίαν ποικίλην ποιησάμενη διέξοδον . . . ἔχει τούτων ἐναργεστέραν ἐπαφὴν μᾶλλον ἢ τῶν ὁρατῶν*

1) Vgl. Aristoteles, Metaphysik A, 6 (p. 987 b, 14–18): »ἔτι δὲ παρὰ τὰ αἰσθητὰ καὶ τὰ εἶδη τὰ μαθηματικὰ τῶν πραγμάτων εἶναι φησι (sc. Πλάτων) μεταξὺ, διαφέροντα τῶν μὲν αἰσθητῶν τῷ ἄϊδια καὶ ἀκίνητα εἶναι, τῶν δ' εἰδῶν τῷ τὰ μὲν πολλὰ ἅπτα ὅμοια εἶναι τὸ δ' εἶδος αὐτὸ ἐν ἑκάστῳ μόνον« (und zwischen den Dingen der sinnlich wahrnehmbaren Wirklichkeit und den Ideen habe Platon die mathematischen Gegenstände angelehnt, als eine dritte Art von Dingen, die sich von den sinnlich wahrnehmbaren durch ihre Ewigkeit und Unbeweglichkeit, von den Ideen aber dadurch unterscheiden, daß die mathematischen Dinge viele gleichartige sind, das Eidos aber jegliches nur eins, es selbst ist. – Überf. v. Stenzel).

2) Proclus, in Eucl. p. 78, 4–6 (Friedlein).

3) Es ist eigentlich das gemeint, was neuerdings Hölder (die mathematische Methode § 111 ff.) als »synthetische« Begriffsbildung bezeichnet hat, zum Teil in Übereinstimmung, zum Teil aber auch in Abweichung von Kant. (Vgl. l. c. § 127.) Sigwart sagt treffend: »konstruierende Begriffsbildung«. (Vgl. die Zitate bei Hölder, l. c. S. 292, Anm. 2.)

ἢ ὕψις, τὰ δὲ ἐκ τοῦ εὐθέως αἶρειν ἀδυνατοῦσα κατὰ μετὰβασιν ἐπὶ ἐκεῖνα διαβαίνονσα κατὰ τὸ ἀκόλουθον αὐτῶν ἐπιχειρεῖ ποιεῖσθαι τὴν θήραν. — Proclus, in Eucl. 179, 15–22).

Oder noch deutlicher (Proklos): »Wenn die Gedanken (λόγοι, eigentlich die Reden, als Ansprechen und als damit in eins gehendes Vermeinen; also im wesentlichen eben die διάνοια) nur auf die gedachte Stofflichkeit (νοητὴ ὕλη, die vom νοῦς erfaßte Materie) losgehen und sie in passender Weise gestalten, so sagt man, sie gleichen den Werdens-Vorgängen. Denn die Bewegung unseres »diskursiven« Denkens und das Vortreiben der Gedanken in seinem Vollzug nennen wir die Entstehung der Gestalten in der (schöpferischen) Phantasie¹ und der sie betreffenden Geschehnisse².«

(εἰς ἐκείνην [sc. τὴν νοητὴν ὕλην] οὖν οἱ λόγοι προϊόντες καὶ μορφοῦντες αὐτὴν εἰκότως δέηπον ταῖς γενέσεσιν εἰκέναι λέγονται. τὴν γὰρ τῆς διανοίας ἡμῶν κίνησιν καὶ τὴν προβολὴν τῶν ἐν αὐτῇ λόγων γένεσιν τῶν ἐν φαντασίᾳ σχημάτων εἶναί φασιν καὶ τῶν περὶ αὐτὰ παθημάτων. — Proclus, in Eucl. p. 78, 20–25).

Es ist also nur das Denken (die »Subjektivität«, wie wir heute sagen würden, obwohl dieser Ausdruck, auf antike Philosophie angewandt, nicht unbedenklich ist), das sich bewegt, die mathematischen Gegenstände selbst sind unveränderlich³.

B. Zahlen (die Entwicklung von der Gestalt zur Reihe).

Bis hierher sind unter »mathematischen Gegenständen« die geometrischen Figuren verstanden. Diese haben ja auch in der griechischen Mathematik überall die entscheidende Rolle gespielt, indem auch die rein arithmetischen (zahlentheoretischen) Sätze in geometrischem Gewande auftreten (bis der Spätantike, wohl bereits orientalisches beeinflusste Diophant einen gewissen Wandel hierin eintreten

1) »Einbildungskraft« (Kant).

2) Zu der »inneren Bewegung« des Gedankens vgl. die später (S. 209, Anm. 1) zitierte Aristoteles-Stelle. Physik IV, 11 (219a 4–6).

3) Dies ist die akademisch-peripatetische Ansicht, die des antiken »Rationalismus«. Ihm gegenüber zeigt die Schule von Kyzikos (Eudoxos, Menaiḥmos usw.) deutlich »positivistische« Neigungen, wie Eudoxos in bezug auf die platonischen Ideen und die μέθεξις (vgl. oben S. 132, Anm. 1), so auch Menaiḥmos bei seiner naiven Auffassung der mathematischen Konstruktion als einer wirklichen Hervorbringung der Figuren, allerdings nicht der materiellen in Zeichnungen und am Bauwerk. Diese Tendenz scheint von dem positivistischen Pythagoreer Archytas, dem Lehrer des Eudoxos, herzufließen, über dessen Gegensatz zu gewissen Spekulationen der frühen Akademie E. Frank (Plato und die sogenannten Pythagoreer (Halle 1923), z. B. S. 12 ff., 130 ff., 161 ff.) sich ausführlich geäußert hat.

läßt). Indessen sind doch nicht, wenigstens nicht bei den Philosophen, die sich mit Mathematik befaßen, die Zahlen jeder eigentümlichen, also nicht-geometrischen Bedeutung beraubt gewesen.

Zwar ist anzuerkennen, was neuerdings von J. Stenzel in seinem bemerkenswerten Buch »Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles« (Lpz.-Berl. 1924) ausgeführt worden ist, daß die griechische Zahl viel gestalthafter war, als die abendländische. Aber es zeigt sich auch, daß die Gestalthaftigkeit ihre größte Bedeutung in der frühen (archaischen) Mathematik hat und dann – sofern nicht archaisierende Wendungen, wie im Neupythagoreismus, vorliegen, sich allmählich verliert. Insbesondere ist der Übergang von der platonischen zur aristotelischen Auffassung der Zahl charakteristisch. Denn er bedeutet zugleich, kurz gesagt, den Übergang von der Zahl als Gestalt zur Zahl als Reihenglied (Stellenzeichen). Dies ist wahrscheinlich der entscheidende Punkt bei der Unterscheidung der ἀριθμοὶ ἀσύμβλητοι (Gestalt-Zahlen) und σύμβλητοι (Reihen-Zahlen).

Wenn man diesen Bedeutungswandel der Zahl in der platonisch-aristotelischen Epoche in einen größeren Zusammenhang hineinzustellen versucht, kommt man zu dem Ergebnis, daß diese ganze Entwicklung, weiter nach rückwärts verfolgt, ins frühmenschliche Zahlenvorstellen hineinführt¹.

In der Frühzeit sind die Zahlen Individuen gestalthafter Art, mit mystischen Kräften begabt. Levy-Brühl sagt (l. c. S. 179): »Jede Zahl hat so ihre eigene individuelle Physiognomie, eine Art mystischer Atmosphäre, ein »Kraftfeld«, das sie besonders auszeichnet. Jede Zahl wird so speziell für sich selbst und ohne Vergleich mit den anderen vorgestellt² – man könnte auch sagen gefühlt. Von diesem Gesichtspunkt aus bilden die Zahlen nicht eine homogene Reihe und sind infolgedessen für die einfachsten logischen oder mathematischen Operationen ganz ungeeignet. Die mystische Individualität einer jeden von ihnen bewirkt, daß sich weder addieren noch subtrahieren noch multiplizieren noch dividieren lassen.«

1) Dieses Problem ist schon vor längerer Zeit von Wertheimer (vgl. 3 Abhandlungen zur Gestalttheorie, Verlag der Erlanger philosoph. Akademie 1925) und dann auch in dem zusammenfassenden ethnologisch-psychologischen Werk von Levy-Brühl »Das Denken der Naturvölker« (Leipzig und Wien 1921) und endlich neuerdings von E. Cassirer in seiner »Philosophie der symbolischen Formen« II. Teil: »Das mythische Denken« (Berlin 1925), Kap. II, 5 (S. 174 ff.) behandelt worden.

2) D. h. sie ist ἀριθμὸς ἀσύμβλητος.

Man vergleiche damit die folgende Äußerung Stenzels über die aristotelische Polemik gegen die spätplatonische Zahlenlehre (l. c. S. 7): »Mit unermüdlicher Hartnäckigkeit verteidigt Aristoteles die uns natürliche Auffassung der Zahlen als gleicher, in den arithmetischen Operationen grundfänglich gleichartiger und vereinbarer (σύμβλητοι) Einheiten gegen einen ganz anderen Zahlbegriff, der gerade durch die Unvereinbarkeit der Zahlen im Sinne irgendwelcher rechnerischen Verwendung ausgezeichnet sein muß: wenn die Vierheit die Idee von etwas ist, z. B. des Pferdes oder des Weißen, so ist der Mensch 'ein Teil des Pferdes, wenn die Zweierheit der Mensch ist'« (Met. M 8, 1084 a 23).

Mit diesem Übergang von der »unvereinbaren« zur »vereinbaren«, den arithmetischen Operationen unterwerfbaren Zahl ist zwar der Fortschritt von der gestalthaften zur Reihenzahl vollzogen, aber noch nicht in völlig durchgreifender Weise.

Denn die Zahl als Gestalt ist auch in der spätesten Form des Zahlphänomens, etwa bei uns, noch nicht völlig geschwunden. Wenn wir heute noch einerseits von Zahlen als Anzahlen und andererseits von Zahlen als Ordnungszahlen (Hölder sagt sehr bezeichnend »Stellenzeichen«) reden, so drückt sich auch hierin noch ein gewisser Gegensatz von Gestalt (bei der Anzahl) und Reihenhaftigkeit (beim Stellenzeichen) aus. Es ist auch leicht vom heutigen rein sachlich-mathematischen Gesichtspunkt aus zu zeigen, daß die Relationen, die das Stellenzeichen kennzeichnen, nicht hinreichen, um das Rechnen mit Anzahlen zu begründen. Es muß das sog. »Grundprinzip der Anzahl« hinzutreten, daß die »Anzahl« einer vorgelegten endlichen Menge unabhängig von der Reihenfolge ist, in der die Elemente der Menge gezählt werden¹. Es besteht also eine gewisse Invarianz der »Zahlgestalt« gegenüber den verschiedenen Möglichkeiten des Zählens.

C. Das Unendliche.

Es ist nach dem Bisherigen durchaus noch nicht verständlich, welches das Motiv ist, von der gestaltlichen Anzahl zur reinen Reihenzahl überzugehen. Was wird dabei gewonnen?

Die Antwort lautet, daß nur so das Unbegrenzte, das *ἄπειρον* oder das Endlose, das *ἀτελεύτητον*², durch die Zahl faßbar wird.

Eine endlose Gestalt ist ein Widerfinn, Gestalt ist *πέρας*, Grenze; die Reihe oder schärfer Folge hingegen kann

¹) Hölder, l. c. §§ 67, 68.

²) Vgl. Aristoteles, Phys. III, 4 (p. 204 a, 2–7).

sich ins Unbegrenzte erstrecken; genauer gesagt, sie kann endlos fortgehen, so daß sie niemals bis zum Ende (vollständig) durchlaufen werden kann (*ἀδιεξέτητον*).

In dem Phänomen der Folge, des endlosen Fortganges, des niemals Aufhörens u. dgl. steckt aber in entscheidender Weise das Urphänomen der Zeit. Hier, an dieser Stelle, wird die Rücksichtnahme auf die Zeitlichkeit in der Mathematik unvermeidlich.

Diese grundlegende Einsicht ist schon in den bewunderungswürdigen Abschnitten der aristotelischen »Physik« über das Unendliche (III, c. 4 – 8) und die Zeit (IV, c. 10 – 14) enthalten. Weitere wertvolle Aufschlüsse bietet auch der Kommentar des Simplicius zu den genannten Kapiteln.

An dieser Stelle, wo rein historische Interessen fernliegen, kann nur das Allerwichtigste kurz angedeutet werden.

Zunächst: Wo kommt das *ἄπειρον* vor? In erster Linie bei der Zeit und dann bei der Zahl. Dann allerdings auch bei der Zerlegung der stetigen Raumgröße (*μέγεθος*) in Teile¹. Indessen kann von dem Kontinuumproblem hier abgesehen werden, da es schon in § 5 b behandelt worden ist.

Als das Gemeinfame und Hauptfächliche wird aber bezeichnet τὸ ἐν τῇ νόήσει μὴ ὑπολείπειν (203 b 24), das »nicht Darunterwegbleiben in dem Vermeinen«, was Simplicius so näher erläutert: »ἡ τῆς νόησεως ἥτοι φαντασίας τῆς ἡμετέρας δύναμις αἰεὶ τι καὶ προστιθέναι καὶ ἀφαιρεῖν ἰσχύονσα καὶ μηδέποτε ἡττωμένη καὶ ὑπολείπουσα« (p. 467, 6 – 8 Diels), d. h. »die Kraft unseres Vermeinens in unserer Phantasie (unseres anschaulichen Vorstellens), die immer noch etwas hinzufügen oder wegnehmen kann und niemals geringer wird oder verlagert (wegbleibt).«

An entscheidender Stelle stehen hier wiederum die zeitlichen Kategorien »immer« (*αἰεὶ*) und »niemals« (*μηδέποτε*).

1) Die Betrachtungen über die sinnlichen Körper, das Werden in der Natur und auch über den Raum können außer Betracht bleiben.

Auch Simplicius ist der Meinung, daß in erster Linie Zahl und Zeit das Unendliche fordern, und dann auch die Geometrie die unendliche Teilbarkeit. (Vgl. in *Arist. phys. comm.* ed. Diels, p. 468, 27 – 469, 3.)

Befonders kennzeichnend: »ἀναιρεῖται δὲ καὶ ἡ ἐπ' ἄπειρον τῶν ἀριθμῶν αὐξήσις ἐναργῶς φαινόμενη«: (Mit dem Unendlichen) wird aufgehoben auch die Vermehrung der Zahlen ins Unbegrenzte, die doch so deutlich sichtbar ist (als ein so durchsichtiges Phänomen auftritt) und weiter: ἡ ἐπ' ἄπειρον πρόοδος τοῦ χρόνου, ταύτη δὲ ἡ τοῦ παντὸς ἀδιότης συναναιρεῖται. —

Noch klarer wird das an derjenigen Stelle, wo die entscheidende kategoriale Charakterisierung des Unendlichen vorgenommen wird: Das ἄπειρον ist δυνάμει ὄν. Aber man darf das δυνάμει ὄν nicht so auffassen, wie beim Erz, das in der Möglichkeit steht, eine Bildsäule zu werden, so daß es eine Bildsäule sein wird, also etwas, ὃ ἐστὶ ἐνεργείᾳ, das wirklich fein wird. Sondern – da der Sinn des Seins vielfach ist, ist das »δυνάμει« beim ἄπειρον zu nehmen: ὥσπερ ἡ ἡμέρα ἐστὶ καὶ ὁ ἀγών, τῷ αὖτε ἄλλο καὶ ἄλλο γίνεσθαι (206a 21–22), »wie der Tag und das olympische Spiel ist, durch das immer anders und anders Werden«. Das Unbegrenzte darf also nicht als ein τὸδε τι, ein »dies da« gefaßt werden, wie ein Mensch oder ein Haus, sondern eben wie der Tag und das Spiel: οἷς τὸ εἶναι οὐχ ὡς οὐσία τις γέγονεν, ἀλλ' αὖτε ἐν γενέσει ἢ φθορᾷ (206a 31–32), »denen das Sein nicht wie ein ‚Vorhanden-Sein‘¹ geworden ist, sondern immer im Werden und Vergehen«.

Auch hier gibt Simplicius einige explizitere Formulierungen: (S. 493, 6) τὸ γὰρ τοιοῦτον ἐνεργείᾳ τὸ ἐν τῷ γίνεσθαι τὸ εἶναι ἔχον σύνεστιν αὖτε τῷ δυνάμει καὶ διὰ τοῦτο ἔχει αὖτε τὴν ἐν τῷ γίνεσθαι παράτασιν, ὅτι οὐδαμοῦ τοῦ δυνάμει ἀπολύεται· ἀπολυθὲν γὰρ ἐστὶν ὅπερ ἐστὶν καὶ πέρας ἔχει καὶ οὐδὲν ἄπειρον.

(Denn das so Beschaffene, in actu das Sein im Werden Habende ist immer zusammen mit dem in der Möglichkeit Seienden und hat deswegen immer die Erstreckung im Werden, weil es nirgends von dem »in der Möglichkeit« abgelöst wird; denn das Abgelöste ist, was es ist, und hat keine Grenze und ist nichts Unbegrenztes.)

S. 493, 19–27: καὶ ἔοικεν ἐπὶ τοῦ ἀπείρου ταῦτόν εἶναι τὸ δυνάμει καὶ τὸ ἐνεργείᾳ. ἡ γὰρ τοῦ ἀπείρου ἐνέργεια ὡς ἀπείρου τὸ δύνασθαι αὖτε τι πλεόν, ἐπεὶ εἴ τις ἐντελέχειαν ἐπιζητοίῃ ἐπὶ τοῦ ἀπείρου οἶον στάσιν τινὰ καὶ εἶδος, οὗτος οὐδὲν ἄλλο ἢ πέρας ἐπιζητεῖ τοῦ ἀπείρου, ταῦτόν δὲ εἰπεῖν φθοράν. τοῦτο δὲ ἀδύνατον. πᾶσα γὰρ ἐντελέχεια σφίζειν ὀφείλει τὸ ἐποκείμενον. καὶ ὥσπερ ἡ τοῦ κινητοῦ ἐντελέχεια φυλάττουσα τὸ δυνάμει κίνησις ἦν, οὕτως καὶ ἡ τοῦ ἀπείρου. ὥσπερ γὰρ τὰ ἐν τῷ γίνεσθαι τὸ εἶναι ἔχοντα ἀπολέσαντα τὸ γίνεσθαι ἀπόλλυσι καὶ τὸ εἶναι, οὕτως καὶ τὰ ἐν τῷ δύνασθαι ἕως τότε ἐστίν, ἕως ὅτε ἐστὶ τὸ δύνασθαι.

1) Es scheint hier sehr nahezu liegen, οὐσία einfach mit »Substanz« zu übersehen, d. h. »dasjenige, was in der Zeit beharrt, also nicht wird oder vergeht«. Das ist indessen nach dem sonstigen Wortgebrauch bei Aristoteles nicht möglich (wie Heidegger zeigte); zur Not könnte man (mit Stenzel) »Wesen« sagen, doch ist dieser Ausdruck im Deutschen sehr vieldeutig.

Dagegen kann das »Zur-Verfügung-Sein« (»Vorhanden-Sein«) als ein »Gegenwärtigkeit-Sein« (Än-Wesenheit = παρ-ουσία) gedeutet werden. (Vgl. Heidegger, »Sein und Zeit«, Seite 25.)

»Und es scheint beim Unbegrenzten das »in der Möglichkeit« daselbe zu sein, wie das »in der Wirklichkeit«. Denn das Wirklichsein des Unbegrenzten als solchen ist das »Immer noch etwas mehr können«¹, da, wenn jemand das vollendete Sein (*ἐντελέχεια*) beim Unbegrenzten suchen würde, in etwas gleich wie einem Zustand oder einer Gestalt, so würde er nichts anderes suchen, als die Grenze des Unbegrenzten oder, was daselbe besagt, seine Vernichtung. Das aber ist unmöglich. Denn jedes Vollendetsein muß das Zugrundeliegende bewahren. Und wie das vollendete Sein des Bewegten, welches das »in der Möglichkeit« bewahrt, *〈die〉* Bewegtheit *〈selbst〉* ist, so auch das des Unbegrenzten. Denn gleichwie das in dem Werden das Sein Habende, wenn es das Werden verliert, damit auch das Sein *〈selbst〉* verliert, so ist (besteht) auch das in dem »Können« *〈sein Sein Habende〉* so lange, als das »Können« besteht.«

Damit ist die Explikation aus den Kategorien Dynamis und Energie (Entelechie) in aller Schärfe gegeben. (Man muß sich hier der bekannten aristotelischen Definition der Bewegtheit selbst erinnern: *ἡ τοῦ δυνάμει ὄντος ἐντελέχεια, ἣ τοιοῦτον, κίνησις ἐστίν.* (201 a, 10 – 12) »das vollendete Sein des in der Möglichkeit Seienden als solchen ist Bewegtheit«².)

Aristoteles sah also in dem Endlosen, Unbegrenzten etwas wesentlich Werdendes (Simplicius: *τὸ ἐν τῷ γίνεσθαι τὸ εἶναι ἔχον*), etwas, das niemals als Ganzes präsent (gegenwärtig: *παρόν*) ist, zur Verfügung steht (das deshalb nicht *οὐσία* ist), endlich etwas, das nicht Gestalt (*εἶδος*) sein kann, sondern sich analog wie die nach Form begierige Materie verhält (*ὡς ὕλη αἴτιον*) und dessen Seinsinn somit in einer eigentümlichen »Beraubtheit« (Privation) besteht. (*τὸ εἶναι αὐτῷ στέρησις ἐστίν*).

1) Vgl. Aristoteles, Physik III, c. 6 (p. 206 b 33 – 267 a 2).

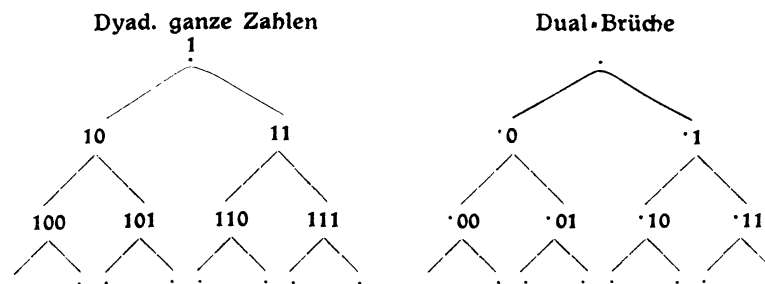
2) Hieran schließt sich dann noch eine letzte begriffliche Bestimmung des Unbegrenzten von der Stofflichkeit aus: »ὡς ὕλη τὸ ἄπειρον αἰτιὸν ἐστὶ καὶ τὸ ... εἶναι αὐτοῦ στέρησις ἐστίν« (207 b 35 – 208 a 1). »Wie der Stoff ist das Unbegrenzte Grund (Urfache), und sein ihm zugehöriges Sein ist Beraubung (privatio)«. – Vgl. dazu die längere, hier nicht wiederzugebende Erläuterung des Simplicius p. 513, 3 – 514, 3. Wichtig an dieser Erläuterung ist der breit vorgetragene Gedanke, daß das ἄπειρον Stoff ist, nicht als *ὑποκείμενον*, sondern *ὅτι συμβέβηκεν αὐτῷ πρὸ τοῦ δεῖξασθαι τὸ εἶδος ἢ στέρησις, ἥτις ἐστὶν ἡ ἀπειρία* (weil ihm zukommt an Stelle (?) des Aufnehmens des *εἶδος* die Beraubung, welche die Unbegrenztheit ist). Das *εἶδος* ist die Grenze (*πέρας*), also das dem *εἶδος* Entgegenstehende (die *στερήσις*) auch das der Grenze Entgegenstehende, also das *ἄπειρον*. (*ὑπάρχει τῇ στέρησει τὸ ἄπειρον, ὥσπερ τῷ εἶδει τὸ πέρας*: »es liegt der Beraubung das Unbegrenzte zugrunde wie der Gestalt die Begrenzung«.)

Die entscheidenden Beispiele des Unbegrenzten, d. h. die konkreten Phänomene, wo es uns entgegentritt, sind Zahl und Zeit. Dazu ist allerdings auch noch die Zerlegung der Größe in Teile zu nehmen, allein das gehört als analoges Phänomen zur Zahl (σύνθεσις parallel der διαίρεσις). —

In diesem Sinne hatte schon der späte Plato etwa die Verdopplung und die Halbierung parallel betrachtet. Ganze Zahlen wie Brüche entstanden durch das genetische Vermögen der ἀόριστος δυνάς (der unbegrenzten Zweifelt). Stenzel hat (in seinem schon zitierten Buch) sehr wahrscheinlich gemacht, daß die diäretischen Zahlen-erzeugung sowohl die ganzen natürlichen Zahlen wie die (dyadischen) Brüche nach demselben Prinzip hervorbringt¹.

Die Belegstellen Stenzels sind vor allem aus Alexander Aphrodisienfis zu Metaphys. A, und weiterhin, was in unserem Zusammenhang wichtig ist, aus Simplicius zu den über das ἄπειρον handelnden Stellen der Physik (III, 4; 203 a 15: Πλάτων δὲ δύο τὰ ἄπειρα, τὸ μέγα καὶ τὸ μικρόν). Dazu sagt Simplicius, unter Berufung auf den Philebos-Kommentar des Porphyrios z. B. »τὴν δὲ ἀόριστον δυνάδα καὶ ἐν τοῖς νοητοῖς τιθεὶς ἄπειρον εἶναι ἐλεγε (sc. Plato)« (p. 453, 26). Und in dem von Simplicius wiedergegebenen Bericht des Porphyrios über die platon. Vorträge über das Gute heißt es: »αὐτὸς δὲ τὸ μᾶλλον καὶ τὸ ἥττον . . . τῆς ἀπείρου φύσεως εἶναι τίθεται. ὅπου γὰρ ἂν ταῦτα ἐνῇ κατὰ τὴν ἐπίτασιν καὶ

1) Nimmt man an Stelle des dekadischen Zahlensystems, wie es Stenzel (l. c. S. 31) benutzt, das dyadische (das von Wallis und Leibniz, von dem letzten auch für philosophische Zwecke, eingeführt wurde), so erhält man für die Entwicklung der ganzen Zahlen und der systematischen Dual- (nicht Dezimal-) Brüche folgende beiden, wie man sieht, ganz analogen Schemata:



Erst so gewinnt das Stenzelsche diäretische Schema seine ganze Überzeugungskraft. (Vgl. dazu jetzt auch Weyl, Handbuch d. Philos. II A, S. 43 u. 50.) In gewissem Sinne ist also Plato der eigentliche Entdecker des dyadischen Zahlensystems.

ἄνεσιν προϊόντα, οὐχ ἴσταιται οὐδὲ περαίνει τὸ μετέχον αὐτῶν, ἀλλὰ πρόεισιν εἰς τὸ τῆς ἀπειρίας ἀόριστον. . . . (453, 31–36). . . . τὸ μὲν ἐπὶ τὸ ἐλαττον προϊόν, τὸ δὲ ἐπὶ τὸ μεῖζον, ἀτελευτήτως (454, 3). . . . ἡ δὲ τοιαύτη ἀδιάλειπτος τομὴ δηλοῖ τινα φύσιν ἀπείρου κατακεκλεισμένην ἐν τῷ πύχει . . . ἐν τούτοις δὲ καὶ ἡ ἀόριστος δύνας ὁράται . . . [ταῦτα ὁ Πορφύριος εἶπεν αὐτῇ σχεδὸν τῇ λέξει.] (454, 5–6, 8, 17.)

Man vgl. den darauf zitierten Bericht des Alexander, wo es heißt: »κατὰ γὰρ ἐπίτασιν καὶ ἄνεσιν προϊόντα ταῦτα οὐχ ἴσταιται, ἀλλ' ἐπὶ τὸ τῆς ἀπειρίας ἀόριστον προχωρεῖ (455, 1–2). . . . τὴν δὲ δύναδα τοῦ ἀπείρου φύσιν ἔλεγεν . . . (455, 9–10).

Das Merkwürdige an diesen Berichten ist, daß sie zeigen, daß wesentliche Bestimmungen des aristotelischen Unendlichkeitsbegriffes bereits der »unbegrenzten Zweiheit« zukommen, wie das ἀτελευτήτως (unvollendbar, endlos) προϊέναι, προχωρεῖν εἰς τὸ τῆς ἀπειρίας ἀόριστον, . . . das ἀδιάλειπτον usw.

Man kann daraus schließen, daß sich bereits beim späten Platon der Übergang von der Zahl als Gestalt zur Zahl als Reihenglied ausbildet, im engen Zusammenhang mit dem Begriff des ἄπειρον als eines Werdenden. Die unbegrenzte Zweiheit ist bei ihm die zahlen erzeugende Potenz (δύοποιος).

Aber auch Platon ist nicht der erste. Wir müssen noch wesentlich weiter zurückgehen, um den eigentlichen Ursprung des potentiellen Unendlich zu finden.

Zunächst stoßen wir auf Archytas. Dieser zeigt bereits an dem Beispiel des Raumes (nach des Eudemos' Bericht)¹ das wesentliche Moment des »immer« auf (ἀεὶ οὖν βαδιεῖται τὸν αὐτὸν τρόπον ἐπὶ τὸ ἀεὶ λαμβανόμενον πέρας κτλ.). — Wesentlich früher ist noch das bekannte Fragment des Anaxagoras († nach 432): (fr. 3 Diels) »οὔτε γὰρ τοῦ μικροῦ ἐστὶ τὸ γε ἐλάχιστον, ἀλλ' ἔλασσον ἀεὶ. τὸ γὰρ ἐὸν οὐκ ἐστὶ τὸ μὴ οὐκ εἶναι (denn es ist unmöglich, daß das Seiende zu fein aufhöre), ἀλλὰ καὶ τοῦ μεγάλου ἀεὶ ἐστὶ μεῖζον.

1) Diels, Fragmente der Vorsokratiker 35, A 24: »Ἀρχύτας . . . οὕτως ἠρώτα τὸν λόγον· 'ἐν τῷ ἐσχατῷ οἷον τῷ ἀπλανεῖ οὐρανῷ γενόμενος, πότερον ἐκτείναιμι ἂν τὴν χεῖρα ἢ τὴν ῥάβδον εἰς τὸ ἔξω ἢ οὐ;' καὶ τὸ μὲν οὖν μὴ ἐκτείνειν ἄτοπον. εἰ δὲ ἐκτείνω, ἦτοι σῶμα ἢ τόπος τὸ ἐκτὸς ἐστὶ. (διοίσει δὲ οὐδὲν ὡς μαθησόμεθα.) ἀεὶ οὖν βαδιεῖται τὸν αὐτὸν τρόπον ἐπὶ τὸ ἀεὶ λαμβανόμενον πέρας, καὶ ταῦτόν ἐρωτήσῃ, καὶ εἰ ἀεὶ ἕτερον ἐστὶ ἐφ' ὃ ἡ ῥάβδος, δῆλον ὅτι καὶ ἄπειρον.»

Wohl noch etwas vor Anaxagoras (etwa um 460) muß man endlich das nachstehende Fragment des Zenon von Elea ansetzen (fr. 1 Diels). Es stammt aus einem Beweis für das Dasein der unendlichen Größe.

»εἰ δὲ ἔστιν, ἀνάγκη ἕκαστον μέγεθος τι ἔχειν . . . καὶ περὶ τοῦ προύχοντος ὁ αὐτὸς λόγος. καὶ γὰρ ἐκεῖνο ἔξει μέγεθος καὶ προέξει αὐτοῦ τι. ὅμοιον δὲ τοῦτο ἀπαξ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν· οὐδὲν γὰρ αὐτοῦ τοιοῦτον ἔσχατον ἔσται οὔτε ἕτερον πρὸς ἕτερον οὐκ ἔσται. οὔτως εἰ πολλὰ ἔστιν, ἀνάγκη αὐτὰ μικρὰ τε εἶναι καὶ μεγάλα· μικρὰ μὲν ὥστε μὴ ἔχειν μέγεθος, μεγάλα δὲ ὥστε ἄπειρα εἶναι.«

fr. 3: »εἰ πολλὰ ἔστιν, ἀνάγκη τοσαῦτα εἶναι ὅσα ἐστὶ καὶ οὔτε πλείονα αὐτῶν οὔτε ἐλάττωνα εἰ δὲ τοσαῦτά ἐστιν ὅσα ἐστὶ, πεπερασμένα ἂν εἴη.

εἰ πολλὰ ἔστιν, ἄπειρα τὰ ὄντα ἐστίν· ἀεὶ γὰρ ἕτερα μεταξὺ τῶν ὄντων ἐστὶ, καὶ πάλιν ἐκείνων ἕτερα μεταξὺ. καὶ οὕτως ἄπειρα τὰ ὄντα ἐστὶ.«

In diesen Sätzen bestimmt Zeno als erster den Begriff des Unendlichen scharf. Er sagt in fragm. 1: »καὶ περὶ τοῦ προύχοντος ὁ αὐτὸς λόγος«. (Und von dem Vorangehenden gilt dieselbe Rede) »ὅμοιον δὲ τοῦτο ἀπαξ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν« (Es ist das gleiche, dies einmal auszusprechen und immer zu sagen. — D. h. »Das gleiche gilt also ein für allemal« [Diels].)

Hier ist also das »immer« zur Charakteristik des Unendlichen benutzt und die Wiederkehr des Gleichen. Man kann denselben Logos immer wieder anwenden in der gleichen Weise: das kennzeichnet das Apeiron.

In fragm. 3 wird der Gegensatz dieses so definierten Apeiron zu dem ruhenden Sein scharf herausgestellt: Eine bestimmte Vielheit ist, was sie ist, nicht mehr und nicht weniger; also sie ist begrenzt. Andererseits ist es immer (ἀεὶ) möglich, zwischen die vorhandenen Dinge andere zu setzen und wiederum (πάλιν) zwischen jene andere. — Also auch hier die immerwährende Wiederholung. Vgl. die aristotelischen Wendungen: ἀεὶ ἄλλο καὶ ἄλλο (ἕτερον καὶ ἕτερον), πάλιν καὶ πάλιν. —

Aber als Archetyp gleichsam aller derer, die über das Unendliche philosophiert haben, tritt uns in grauer Vorzeit endlich Anaximander entgegen.

Folgende Fragmente sind von ihm überliefert:

a) Diels, Vorsokratiker², fr. 9, S. 13, 4, 6 — 9: Ἀναξिमάνδρος . . . ἀρχὴν εἰρηκε τῶν ὄντων τὸ ἄπειρον [πρῶτον τοῦτο τούνομα νομίσας τῆς ἀρχῆς] ἐξ ὧν δὲ ἡ γένεσις ἐστὶ τοῖς οὖσι, καὶ τὴν φθορὰν εἰς ταῦτα

γίνεσθαι κατὰ τὸ χρεών. διδόναι γὰρ αὐτὰ δίκην καὶ τίσιν ἀλλήλοις
τῆς ἀδικίας κατὰ τὴν τοῦ χρόνου τάξιν.

»Anaximander nannte den Ursprung der Dinge das Unbegrenzte, indem er als erster diesen Namen »Ursprung« [*ἀρχή*] gebrauchte.

Anfang der Dinge ist das Unendliche. Woraus aber ihre Geburt ist, dahin geht auch ihr Streben, nach der Notwendigkeit. Denn sie zahlen einander Strafe und Buße nach der Zeit Ordnung«. (Diels.)

b) Diels, l. c. fr. 15, S. 14, 42: folgende Prädikate des *ἄπειρον* werden genannt: *ἀθάνατον* und *ἀνώλεθρον*. — Vgl. dazu auch *Diogenes von Apollonia* (Diels, l. c. 51 B, fr. 7 u. 8, S. 339, 16–18, 19–21): »καὶ αὐτὸ μὲν τοῦτο καὶ αἰδίων καὶ ἀθάνατον σῶμα, τῶν δὲ τὰ μὲν γίνεται, τὰ δὲ ἀπολείπει.« — »ἀλλὰ τοῦτο μοι δῆλον δοκεῖ εἶναι, ὅτι καὶ μέγα καὶ ἰσχυρὸν καὶ αἰδίων τε καὶ ἀθάνατον καὶ πολλὰ εἰδὸς ἔστι.« (Das »αὐτό« interpretiert Diels als »Urstoff«, also wohl *ἀρχή* oder *στοιχεῖον* nach späterer Terminologie.)

Wir sehen aus diesen Fragmenten: Schon beim ersten Philosophen, der sich mit dem Unendlichen befaßte, spielte die Zeit eine entscheidende Rolle bei der Definition des *ἄπειρον*.

Anaximander führt den Ausdruck *ἀρχή*, »Anfang«, ein. Das *ἄπειρον* ist *ἀρχή*, weil für es selbst nicht *ἀρχή* sein kann, weil es selbst, als ohne »Grenze«, keinen Anfang hat¹. Er sagt weiterhin:

»Die Dinge zahlen einander Strafe nach der Zeit Ordnung.« Der ewige Wechsel, der notwendig rhythmisch gedacht werden muß, der ewige Wellenschlag der Geburten und Tode, — das ist das *ἄπειρον* als Prinzip (*ἀρχή*). Die Stelle ist also nicht moralisch zu verstehen, sondern sie stellt einen Ausdrucksversuch des unendlichen Weltgeschehens dar, — mit Worten, die der Lebensbedeutung entnommen sind. Das *ἄπειρον* ist die Urkraft (vgl. *Diogenes von Apollonia*), die das Werden nicht aufhören läßt². —

1) Vgl. Aristoteles, *Phys.* III, 4 (203 b, 4–7): ἐνλόγως δὲ καὶ ἀρχὴν αὐτὸ (sc. τὸ ἄπειρον) τιθέασιν πάντες . . . ἅπαντα γὰρ ἢ ἀρχὴ ἢ ἐξ ἀρχῆς· τοῦ δὲ ἄπειρου οὐκ ἔστιν ἀρχή· εἴη γὰρ ἂν αὐτοῦ πέρας.

2) Vgl. fr. 10 (Diels l. c. 13, 31–33, 34–35), das aus Theophrast stammt: ἀπεφώνητο (Anaximander) δὲ τὴν ψθορὰν γίνεσθαι καὶ πολὺ πρότερον τὴν γένεσιν ἐξ ἀπείρου αἰῶνος ἀνακυκλουμένων πάντων αὐτῶν. — φησὶ δὲ τὸ ἐκ τοῦ αἰδίου γόνιμον θερμοῦ καὶ ψυχροῦ κατὰ τὴν γένεσιν τοῦδε τοῦ κόσμου ἀποκριθῆναι . . .

Dazu vgl. die Interpretation von K. Reinhardt, *Parmenides und die Geschichte der griechischen Philosophie*. (Bonn 1916), S. 253 ff., 258.

Es sei auch auf Reinhardts Bemerkungen über die grammatische Natur des Wortes »ἄπειρον« (substantiviertes Neutrum eines Adjektivums) hingewiesen (l. c. 251 ff.), die es als philosophischen Terminus besonders geeignet sein läßt.

Blicken wir auf die sämtlichen historischen Belege zurück, die wir vor dem Leser ausgebreitet haben, so ergibt sich mit voller Klarheit, daß von Anfang an das *ἄπειρον* mit der Zeit verknüpft erscheint. Der Sinn der Unendlichkeit entspringt überall aus dem *ἀεί*, dem »Immer«, genauer: der immerwährenden Wiederholung (Wiederkehr des Gleichen). Die Endlosigkeit ist also offenbar das entscheidende Moment an der Zahl, das sie mit der Zeit in eine ganz ursprüngliche Verbindung bringt. Die Zahl als Reihenglied gewinnt mit dem Horizont der Endlosigkeit zugleich irgendwie den Charakter der Zeitlichkeit.

D. Zahl, Unendlichkeit und die Zeit.

Wir haben diese sinnhafte Verknüpfung von der Seite der Unendlichkeit aus aufgewiesen; wir müssen nun zur Ergänzung die andere Perspektive kurz berühren, die ebenfalls Aristoteles dem Problem von Seiten einer Analytik der Zeit (Phyl. IV, c. 10–14) gegeben hat.

Aristoteles definiert die Zeit durch folgende Sätze:

Als Überleitung vom *ἄπειρον* zum *χρόνος* sei zunächst angeführt:
 »οὐδὲ μένει ἡ ἀπειρία ἀλλὰ γίνεται, ὥσπερ καὶ ὁ χρόνος καὶ ὁ ἀριθμὸς τοῦ χρόνου« (207 b 14–15).

Bezüglich der Zeit selbst wird zunächst – nach der Kritik der älteren Anschauungen – gesagt: sie sei weder Bewegung noch ohne Bewegung (οὔτε κίνησιν οὔτε ἄνευ κινήσεως ὁ χρόνος ἐστὶ, 219, a 1), also ist zu fragen, was an der Bewegung sie ist (τί τῆς κινήσεως ἐστίν, 219, a 3)¹. Darauf ist zu antworten, daß dann Zeit vergangen ist, wenn wir das Frühere und Spätere in der Bewegung wahrgenommen haben. (τότε φαιμέν γεγονέναι χρόνον, ὅταν τοῦ προτέρου καὶ ὑστέρου ἐν τῇ κινήσει αἰσθησιν λάβωμεν, 219 a, 23–25). D. h. nur dann, wenn das Jetzt nicht als eins gegeben ist, sondern wir immer ein anderes Jetzt erfassen, in der Ordnung des Früheren und Späteren. (τῷ ἄλλο καὶ ἄλλο ἐπολαβεῖν αὐτὰ [sc. τὰ νῦν], 219 a, 25–26).

Und nun kommt die entscheidende »Definition« der Zeit: »Denn dies ist die Zeit: die »Zahl« der Bewegung gemäß dem Früher und Später!« (τοῦτο γάρ ἐστίν ὁ χρόνος, ἀριθμὸς κινήσεως κατὰ τὸ πρότερον καὶ ὕστερον; 219 b, 1–2.) Und zwar ist die Zeit genauer nicht die »zählende«, sondern die »gezählte« Zahl der Bewegtheit.

1) Dazu die scharfe Erfassung der »inneren« Bewegtheit »in der Seele«:
 »ἡμὰ γὰρ κινήσεως αἰσθανόμεθα καὶ χρόνου· καὶ γὰρ ἐὰν ᾗ σκότος, καὶ μὴθὲν διὰ τοῦ σώματος πάσχωμεν, κινήσεις δὲ τις ἐν τῇ ψυχῇ ἐνῇ. εὐθὺς ἡμὰ δοκεῖ τις γεγονέναι καὶ χρόνος. — Physik IV, 11 (219 a, 3–6).

(ὁ δὲ χρόνος ἐστὶ τὸ ἀριθμούμενον, οὐχ ᾧ ἀριθμοῦμεν; 219b, 7–8). Dies geht nach dem Simplicius darauf, daß die kontinuierlich fließende Zeit nicht unmittelbar mit der diskreten Zahl identifiziert werden kann, sondern sozusagen das Ursubstrat des Zählens darstellt, wobei aber die innere Aktivität des Zählens immer noch von dem passiven Wahrnehmen des stetigen Zeitflusses unterschieden werden muß¹.

Mit einer anderen Wendung: die Zeit mißt die Bewegung, und zwar ihrem »Sein« nach (nicht etwa dem ihr zugrunde liegenden raumhaften »Weg« nach): 221 a, 4–7: καὶ ἔστι τῇ κινήσει τὸ ἐν χρόνῳ εἶναι, τὸ μετρεῖσθαι τῷ χρόνῳ καὶ αὐτὴν καὶ τὸ εἶναι αὐτῆς· ἕνα γὰρ τὴν κίνησιν καὶ τὸ εἶναι τῇ κινήσει μετρεῖ· καὶ τοῦτ' ἔστιν αὐτῇ τὸ ἐν χρόνῳ εἶναι, τὸ μετρεῖσθαι αὐτῆς τὸ εἶναι.

(Und für die Bewegtheit bedeutet das in der Zeit Sein, daß sie selbst und ihr Sein durch die Zeit gemessen wird. Denn zugleich mißt sie [die Zeit] die Bewegtheit und das der Bewegtheit zukommende Sein. Und das ist ihr [der Bewegtheit] das in der Zeit Sein: das Gemessenwerden ihres Seins.)

Und weiter: 221 b, 14–16: τὸ δ' εἶναι ἐν ἀριθμῷ, ἐστὶ τὸ εἶναι τινα ἀριθμὸν τοῦ πράγματος, καὶ μετρεῖσθαι τὸ εἶναι αὐτοῦ τῷ ἀριθμῷ ἐν ᾧ ἐστίν· ὥστ' εἰ ἐν χρόνῳ, ὑπὸ χρόνου.

(Das Sein in einer Zahlmannigfaltigkeit bedeutet, daß es eine Zahlmannigfaltigkeit [einen Zahlcharakter] der betreffenden Gegen-

1) Vgl. dazu neben den weiter unten angeführten Simplicius-Stellen vor allem folgende Äußerung aus der frühperipatetischen Schulschrift περὶ ἀτόμων γραμμῶν 969 a 30–b 3: οὐδὲ δὴ τὸ καθ' ἕκαστον ἔπτεσθαι τῶν ἀπείρων τὴν διάνοιαν οὐκ ἔστιν ἀριθμεῖν, εἰ ἄρα τις καὶ νοήσειεν οὕτως ἐφάπτεσθαι τῶν ἀπείρων τὴν διάνοιαν. ὅπερ ἴσως ἀδύνατον· οὐ γὰρ ἐν συνέχεσι καὶ ὑποκειμένοις ἢ τῆς διανοίας κινήσεις, ὥσπερ ἡ τῶν φερομένων. εἰ δ' οὖν καὶ ἐγγωρεῖ κινεῖσθαι οὕτως οὐκ ἔστιν τοῦτο ἀριθμεῖν· τὸ γὰρ ἀριθμεῖν ἐστὶ τὸ μετὰ ἐπιστάσεως.

(Das Erfassen jedes einzelnen Elements eines Unendlichen durch die Aufmerksamkeit (das diskursive Vermeinen) ist nicht Zählen; selbst wenn jemand meinen sollte, daß das Vermeinen [überhaupt] so das Unbegrenzte erfassen könnte. Das ist vielleicht unmöglich: denn nicht vollzieht sich die Bewegung des Vermeinens im Stetigen und Vorliegenden (dem Substrat), wie die der bewegten Körper. Aber selbst, wenn man zugibt, daß das Vermeinen sich so bewegen könnte, so wäre dies doch kein Zählen. Denn das Zählen geschieht mit Stillständen.)

Vgl. damit die präzise Äußerung des Aristoteles selbst: ἡ δ' ἀριθμητὸν τὸ πρότερον καὶ ὕστερον, τὸ νῦν ἐστίν (219 b 25): »sofern (quâ) das Früher und Später zählbar ist, ist es ein Jetzt«. Der Fluß der Zeit wird also durch das Herausheben der »Jetzt« (Zeitpunkte) zählbar, d. h. in seinem Mannigfaltigkeitscharakter, dem Reihencharakter seiner Ordnung, faßbar.

ftändlichkeit gibt und daß ihr Sein gemessen wird durch den Zahlcharakter, in dem sie ist. So, wenn sie in der Zeit ist, durch die Zeit.)

Doch darf andererseits dieses an sich wichtige Moment des »Messens« auch nicht überschätzt werden, als ob alle Zeit nach unabänderlich quantitativen Maßstäben gemessen werden könnte. Die Heraushebung der ordnungshafter Seite der Zahl ist entscheidend: das, was die Zeit zum Zahlcharakter macht, ist allein das Früher und Später¹.

Darüber finden sich wenigstens bei Simplicius Äußerungen von einer auch heute noch unübertroffenen begrifflichen und terminologischen Schärfe:

p. 713, 17–19: *ὥστε παντάχῃθεν ἢ τοῦ χρόνου ἔννοια ἐγγίνεται τῷ διαλαμβάνεσθαι τὸ πρότερον καὶ ἕστερον τῆς κινήσεως· διαλαμβάνεται δέ, ὅταν ὥς ἄλλο καὶ ἄλλο ληφθῇ, τουτέστιν ὅταν ἀριθμηθῇ.*

(So daß überall das Erfassen der Zeit dadurch geschieht, daß das Früher und Später der Bewegtheit auseinandergehalten wird; es wird aber auseinandergehalten, wenn es wie ein anderes und anderes genommen wird, das ist, wenn es gezählt wird.)

p. 714, 10–16: *... καὶ ὁ μὲν ἀριθμῶν ἀριθμὸς οὐδ' ἀρμόσειε τῷ χρόνῳ· διηρημένος γάρ ἐστι καὶ οὐ συνεχής. ὁ δὲ ἀριθμούμενος δύναται καὶ συνεχὴς εἶναι, ὥς τὸ δόρυ τὸ ἐνδεκάπηχυν. καὶ τὸ ἀριθμούμενον δὲ διττόν, τὸ μὲν κατὰ τὸ ποσό, ὥς λέγομεν δύο κινήσεις ἢ τρεῖς, τὸ δὲ κατὰ τὴν τάξιν, ὥς λέγομεν κατὰ τὴν προτέραν κίνησιν καὶ ἕστεραν. δεῖξαι οὖν βούλεται, ὅτι ἀριθμὸς ἐστι κινήσεως ὁ χρόνος καὶ ὥς ἀριθμούμενος καὶ ὥς κατὰ τὴν τάξιν ἀριθμούμενος. οὗτος γὰρ ἴδιος.*

(Und die zählende Zahl paßt nicht zur Zeit; denn sie ist diskret und nicht kontinuierlich. Aber die gezählte Zahl kann auch kontinuierlich fein, wie der elf Ellen lange Speer. Aber auch das »Gezählte« hat zwei Bedeutungen: erstens meint es das Wieviel, wie wenn man sagt: 2 Bewegungen oder 3, zweitens aber die Reihenfolge, wie wenn man sagt: die frühere oder spätere Bewegung. A. will nun zeigen, daß die Zeit ein Zahlcharakter der Bewegung ist, und zwar als gezählte Zahl und als Ordnungszahl. Dieser Zahlcharakter ist spezifisch)².

1) Vielleicht nicht allein, denn in dem gelegentlich betonten *τὸ αὐτὸ πάλιν καὶ πάλιν*, in der Wiederkehr des Gleichen (*ἡμέρα, ἐνιαυτός, αἰών*) liegt auch die Meßbarkeit im Sinne des Wieviel. Aber sie ist nicht so fundamental wie das Früher und Später.

2) Man vgl. die Parallelstelle: p. 716, 18–21: *ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμὸς διττός, ὁ μὲν ἀριθμητικὸς ἢ ἀριθμητὸς τοῦ ποσοῦ, ὅταν λέγωμεν ἐν δύο τρία, ὁ δὲ*

Dieser ordnungshafte Reihencharakter der Zahlfolge trifft nun nach Aristoteles das Sein der Bewegung selbst, wie die vorhin angeführten Stellen zeigten. Auch hierzu bringt Simplicius noch einige wenigstens in terminologischer Hinsicht bemerkenswerten Erläuterungen: Er kontrastiert Zeit und Raum, nachdem er zunächst ihre enge Verwandtschaft in bezug auf die Charakteristik der Bewegung betont hat. Sie beziehen sich beide auf ein gewisses Früher und Später (eine Ordnungsfolge) an der Bewegung. (*ἔοικε διπλὸν εἶναι τὸ ἐν τῇ κινήσει πρότερον καὶ ὕστερον, τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ τόπου, τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ χρόνου.*) Die eine Ordnung bezieht sich auf die Lage der (räumlichen) Größe (*ἢ τοῦ μεγέθους θέσις*), die andere auf die zeitliche »Erstreckung« (*χρονική παράστασις*). Die Bewegung steht in der Mitte zwischen Zeit und Raum und nimmt von beiden das Maß oder die Zahl des Früher und Später. Sie kann aber gewissermaßen auf diese beiden Komponenten »projiziert« werden, d. h. »verräumlicht« (*τοπιίζεται*) bzw. »verzeitlicht« (*χρονίζεται*) werden, einmal, sofern die Bewegung eine räumliche Erstreckung oder Lage hat, (*ἢ διάστασις* (*τῆς κινήσεως*) *θέσιν ἔχει*, der Abstand der nach der Bewegung entsteht, hat eine bestimmte Lage); zweitens, insofern das Substrat im Fluß ist. (*ἐν ᾧ ἦν ἡ ὑπόστασις.*) Die Zeit ist also zu definieren als der Mannigfaltigkeitscharakter des Früher und Später des Seins des Bewegungsflusses. (*ἀριθμὸς τοῦ προτέρου καὶ ὕστερου τοῦ κατὰ τὸ εἶναι τὸ ἔδον τῆς κινήσεως*¹.)

* * *

Damit ist also das Sein der Bewegtheit als solcher in enge Verbindung gebracht mit dem Sein der Zahl.

τακτικός, ὅταν λέγωμεν πρῶτον δεύτερον τρίτον, τοιοῦτός ἐστιν ἀριθμὸς ὁ χρόνος διὸ κατὰ τὸ πρότερον καὶ ὕστερον ἀφορίζεται.

(Die Zahl aber hat zweifache Bedeutung, einmal als die zählende oder zählbare Zahl des Wieviel, wenn wir sagen eins, zwei, drei; dann als Ordnungszahl, wenn wir sagen das erste, zweite, dritte: eine solche Zahl ist nun die Zeit. Deswegen wird sie mit Bezug auf das Früher oder Später abgegrenzt [definiert]).

1) Zu der ganzen Darlegung ist zu vergleichen die platonische Ableitung der Zeit aus der Ewigkeit, bei der die Zahl ebenfalls eine entscheidende Rolle spielt: Timäus 37 D:

»εἰκὼ δ' ἐπινοεῖ (sc. ὁ δημιουργός) κινητὸν τινα αἰῶνος ποιῆσαι, καὶ διακοσμῶν ἅμα οὐρανὸν ποιεῖ μένοντος αἰῶνος ἐν ἐνὶ κατ' ἀριθμὸν ἰοῦσαν αἰώνιον εἰκόνα, τοῦτον οὖν δὴ χρόνον ὠνομάκαμεν.«

Die Zeit ist also das »bewegte Bild der Ewigkeit« oder genauer »das gemäß der Zahl laufende Ewigkeits-Abbild, während die Ewigkeit im Einhaften verbleibt«.

Vgl. dazu Simplicius, l. c. 703, 7–9; 717, 21–718, 12.

Einerseits ist die Zeit zu beschreiben als der spezifische zahlen-
hafte Charakter, der jegliche Bewegtheit nach der Dimension der ihr
eigentümlichen Seinsweise selbst kennzeichnet.

Andererseits ist die Zahl, sofern sie unbegrenzt ist, notwendig
ein Phänomen, das sein eigentliches Sein im Werden, also in der Be-
wegtheit hat; was am schärfsten in der engen Analogie der Defini-
tionen des Unbegrenzten und der Bewegung selbst mittels der aristo-
telischen Grundkategorien *δύναμις* und *ἐνέργεια* hervortritt.

Es ist weiterhin klar erkennbar, daß die Zahl in diesem Zusam-
menhang als reines Stellenzeichen, nicht als Anzahl zu
fassen ist. Nur vermöge der Gleichheit der beim Zählen gemachten
Fortschritte (um jeweils die Einheit) ist es möglich, die Länge einer
solchen Reihe zu messen. Aber Messung unabhängig von der Reihen-
folge hat keinen Sinn.

Weil also die Anzahl als bestimmte »wirkliche« Menge notwendig
ist, nicht wird, ist sie notwendig endlich. Es gibt keine unendliche
Menge (*ἄπειρον πλῆθος*)¹.

II. Kant über Zeit, Zahl, Unendlichkeit.

Diesen antiken Analysen, die dem Begriff des Unendlichen in
schnellem Fortschritt nicht lange nach seiner Entdeckung (die in halb-
mythischem Gewand durch Anaximander erfolgt, während die
begrifflichen schon bemerkenswert scharfen ersten Formulierungen
von Zeno, dem Eleaten und Anaxagoras herrühren) zuteil
wurden, stellen wir nun die Analyse Kants gegenüber. Eine Ge-
schichte des Unendlichkeitsbegriffs im Zusammenhang mit dem Be-
griff der Zahl und der Zeit muß erst noch geschrieben werden und
kann hier natürlich nicht gegeben werden. Kant wählen wir wegen
seiner grundsätzlichen Verwandtschaft mit Aristoteles in dieser
Frage und wegen seiner positiven Stellung in der Frage der Be-
ziehung von Zahl und Zeit, eine Stellungnahme, die hinsichtlich
ihrer prinzipiellen philosophischen Bedeutung in dem nächsten Ab-
schnitt (§ 6c III D) noch zu erörtern sein wird.

Es ist bekannt, daß Kant die beiden mathematischen Urdisci-
plinen Arithmetik und Geometrie den beiden Anschauungsformen
(des Menschen!) Zeit und Raum zuordnet. Wie der reine Raum

1) Dies wurde klar ausgesprochen und bewiesen bereits durch den
Eleaten Zeno. Vgl. das oben zitierte fragm. 3 (Diels) und die bekannten
Argumente von Achilles und der Schildkröte u. dgl., die von B. Russell
mit Recht im Sinne einer »mengentheoretischen« Vergleichung von »Mächti-
gkeiten« interpretiert worden sind (l. o. S. 144, Anm. 2).

der Geometrie, so liegt die reine Zeit der Arithmetik zugrunde. Allerdings offenbar nicht in ganz derselben Weise, denn die Zahl ist ursprünglich diskret, die geometrische Figur dagegen kontinuierlich. Dem trägt Kant dadurch Rechnung, daß die Zahl nicht in der transzendentalen Ästhetik allein behandelt wird, sondern außerdem noch in dem Hauptstück der transzendentalen Analytik über den Schematismus der reinen Verstandsbegriffe und da erst in eigentlicher und maßgeblicher Weise. Dort heißt es:

»Das reine Schema der GröÙe (quantitatis) als eines Begriffs des Verstandes ist die Zahl, welche eine Vorstellung ist, die sukzessive Addition von Einem zu Einem (gleichartigen) zusammenbe- faßt. Also ist die Zahl nichts anderes, als die Einheit der Synthesis des Mannichfaltigen einer gleichartigen Anschauung überhaupt, da- durch, daß ich die Zeit selbst in der Apprehension der Anschauung erzeuge.« (B 182.)¹ Der Zahl entspricht demgemäß die »Zeitreihe«. Zur Erläuterung des eigentümlichen und vielumstrittenen Ausdrucks »Schema« sei noch folgendes angeführt:

»Dagegen ist das Schema eines reinen Verstandsbegriffs etwas, was in gar kein Bild gebracht werden kann, sondern ist nur die reine Synthesis . . . , die die Kategorie ausdrückt und ist ein tran- szendentales Produkt der Einbildungskraft, welches die Bestimmung des inneren Sinnes überhaupt, nach Bedingungen ihrer Form (der Zeit)² in Ansehung aller Vorstellungen, betrifft, sofern diese der Einheit der Apperzeption gemäß a priori in einem Begriff zusammen- hängen sollen.« (B 181.)

D. h. also die Kategorie (der reine Verstandsbegriff) der GröÙe (quantitas) wird durch eine bestimmte reine Synthesis der Ein- bildungskraft »ausgedrückt«, in der Weise, daß die spezifische Zeit- form angegeben wird, in der die einzelnen Vorstellungen gemäß jener Kategorie zur Einheit eines Begriffes gebracht werden können.

Für den uns hier interessierenden Zahlbegriff hat dies Kant noch verständlicher gemacht durch die Entgegensetzung von Bild und Schema:

1) A bedeutet die erste, B die zweite Auflage der Kritik der reinen Vernunft. Die Zahlen bezeichnen die Seiten.

2) Vgl. dazu Transz. Ästhetik § 6, b: Die Zeit ist nichts anderes als die Form des inneren Sinns, das ist des Anschauens unserer selbst und unseres inneren Zustandes . . . sie bestimmt das Verhältnis unserer Vorstellungen in unserem inneren Zustand . . . Und eben, weil diese innere Anschauung keine Gestalt gibt, suchen wir auch diesen Mangel durch Analogie zu ersetzen und stellen die Zeitfolge durch eine ins Unendliche fortgehende Linie vor . . . (B. 49–50).

» - - wenn ich 5 Punkte hintereinanderlege,, ist dieses ein Bild der Zahl fünf. Dagegen, wenn ich eine Zahl überhaupt nur denke, die nun fünf oder hundert sein kann, so ist dieses Denken mehr die Vorstellung einer Methode, einem gewissen Begriff gemäß eine Menge (z. B. Tausend) in einem Bilde vorzustellen, als dieses Bild selbst, welches ich im letzteren Falle schwerlich würde übersehen und mit dem Begriff vergleichen können¹.

Diese Vorstellung nun von einem allgemeinen Verfahren der Einbildungskraft, einem Begriff sein Bild zu verschaffen, nenne ich das Schema zu diesem Begriff.« (B 179f.)

D. h. also, die großen Zahlen können nicht im anschaulichen Bilde gestalthafter Art mehr dargestellt werden; es bedarf eines Verfahrens, sich solche Zahlen auch über die unmittelbare Vorstellung hinaus »bildhaft« anschaulich zu machen. Dieses Verfahren besteht dann darin, die Zeit als die Form des »inneren Sinnes«, der anschaulichen Mannigfaltigkeit der Vorstellungsverknüpfungen, zu Hilfe zu nehmen, und die Zahl als eine gewisse »Zeitbestimmung«, nämlich die »Zeitreihe«, aufzufassen.

Und zwar ist die Zeit-Reihe die fundamentalste Zeitbestimmung; sie allein bedarf im Gegensatz zu allen anderen Zeitbestimmungen »Zeitinhalt«, »Zeitordnung«, »Zeitbegriff« nicht des »Realen«, das die Zeitform erfüllt, sondern ergibt sich unmittelbar aus der Form der Zeitbewegtheit selbst.

Man vergleiche dazu die Bemerkung aus der transzendentalen Dialektik (Antinomie der reinen Vernunft, 1. Abschnitt).

»Die Zeit ist an sich selbst eine Reihe (und die formale Bedingung aller Reihen) . . .« (B 438) und in der vorhin zitierten Stelle: » . . . dadurch, daß ich die Zeit selbst in der Apprehension der Anschauung erzeuge«. —

Vergleicht man nun damit die aristotelische Lehre, so kann man die Definition der Zeit als ἀριθμὸς κινήσεως κατὰ τὸ πρότερον καὶ ὕστερον unmittelbar interpretieren: Zeit als eine (ordnungs-mäßig bestimmte) Reihe (analog wie die ordinale Zahlreihe). Wie auch umgekehrt die unendliche Zahl nur im zeitlichen »Schema« anschaulich wird, entsprechend wird das ἄπειρον von Simplicius charakterisiert als τὸ ἐν τῇ γίνεσθαι τὸ εἶναι ἔχον.

1) Vgl. dazu außer der oben (S. 91, Anm. 2) zitierten Stelle aus der »Kritik der Urteilskraft« (1. Aufl. S. 86) den ganzen § 26, wo der Sachverhalt ausführlich erläutert wird.

In der Tat: sind schon große endliche Zahlen nicht anders als zeitlich aufzufassen (in der Weise eines geregelten Durchlaufens an der Hand eines bestimmten »figuralen Moments«), so gilt dies von unendlichen Zahlen erst recht (Husserl)¹.

Damit stimmt denn auch Kants eigene Auffassung in dem Abschnitt über die Antinomien überein.

Das »schlechthin Unbedingte«, die ganze (unendliche) »Summe der Bedingungen« kann nur in der Form einer (unendlichen) Reihe von einander untergeordneten Bedingungen gegeben werden. Obwohl z. B. der (unendliche) Raum an sich keine Richtung enthält, mithin keinen Unterschied von Progressus und Regressus, weil er ein Aggregat, aber keine Reihe ist« (»indem seine Teile insgesamt zugleich sind«), so ist doch »die Synthesis der mannigfaltigen Teile des Raumes, wodurch wir ihn apprehendieren, sukzessiv, geschieht also in der Zeit und enthält eine Reihe« (B 439).

Ähnlich im Beweis der These der I. Antinomie: »Nun können wir die Größe eines Quanti, welches nicht innerhalb gewisser Grenzen jeder Anschauung gegeben wird, auf keine andere Art, als nur durch die Synthesis der Teile und die Totalität eines solchen Quanti nur durch die vollendete Synthesis oder durch wiederholte Hinzufügung der Einheit zu sich selbst gedenken« (B 454, 456).

Dazu die Anmerkung: »Der Begriff der Totalität ist in diesem Falle nichts anderes, als die Vorstellung der vollendeten Synthesis seiner Teile, weil, da wir nicht von der Anschauung des Ganzen (als welche in diesem Falle unmöglich ist) den Begriff abziehen können, wir diesen nur durch die Synthesis der Teile, bis zur Vollendung des Unendlichen, wenigstens in der Idee fassen können«.

Und endlich die genaue explizite Bestimmung des Unendlichkeitsbegriffs in der Anmerkung zur These der I. Antinomie: Fehlerhaft ist der Begriff der »Dogmatiker«: »Unendlich ist eine Größe, über die keine Größe möglich ist« (B 458). »Der wahre (transzendente) Begriff der Unendlichkeit ist: daß die sukzessive Synthesis der Einheit in Durchmessung eines Quantums niemals vollendet sein kann« (B 460). (Vgl. Dissertation von 1770, sect. I, § 1, Anm. 2.)

Man vgl. wieder Aristoteles (Physik. III, 6; 206b, 33 – 207a, 2): »Συμβαίνει δὲ τὸναντίον εἶναι ἄπειρον, ἢ ὡς λέγουσι· οὐ γὰρ οὐ μὴδὲν ἔξω, ἀλλ' οὐ αἰεὶ τι ἔξω ἐστί, τοῦτο ἄπειρόν ἐστιν«. –

Das Ergebnis dieser schnellen Durchmusterung der Meinungen Kants über Zahl, Zeit, Unendlichkeit ist die Feststellung einer

1) Vgl. die Darstellung in § 5a I. (S. 90–94.)

grundfälligen Übereinstimmung mit Aristoteles. (Der tiefere philosophische Grund dieser Übereinstimmung wird in § 6c, IV, näher beleuchtet.)

Die Zahl ist – sobald sie sehr groß oder gar unbegrenzt groß wird – nur von der Zeitreihe aus zu verstehen (wobei Zeitreihe eine Folge »diskreter« Augenblicke bedeutet; die Relation des Abstandes dieser Augenblicke voneinander wird nicht benötigt). Andererseits ist das Unendliche seinerseits nur in Beziehung auf das zeitliche »immer wieder« konkret faßbar. Die Zeitreihe ist also das zugrundeliegende Ur-Phänomen¹.

III. Systematische Untersuchungen.

A. Die verschiedenen Arten der unendlichen Progression.

Dieses Ergebnis hält nun auch der Prüfung vom »systematischen« Gesichtspunkt, d. h. dem der Gegenwart aus stand. Denn wir brauchen uns bloß der früher angestellten Erörterungen über die Cantorsche Transfiniten zu erinnern, um die vollkommene Übereinstimmung der sachlich-phänomenologischen Untersuchung mit Aristoteles und Kant festzustellen.

Im Anschluß an Hufferls »Philosophie der Arithmetik« hatte sich ergeben, daß die direkte anschauliche Erfassung einer Zahlgestalt nur bei kleinen, vielleicht nur bei sehr kleinen Zahlen möglich

¹ Es ist merkwürdig, das Hilbert (in seinem öfters zitierten Aufsatz über das Unendliche) bei seiner Durchmusterung der »Natur« nach dem Unendlichen die Zeit vergißt! Vielleicht meint er nur aktual und gleichzeitig daseiendes Unendliches. Dies findet er freilich nicht. Aber hat nicht schon Aristoteles dies gezeigt?

Andererseits ist nochmals auf § 26 der Kritik der Urteilskraft hinzuweisen, wo außer der »logischen (mathematischen) Größenschätzung« (»comprehensio logica« durch den Zahlbegriff des Verstandes nach dem Schema der Zeitreihe) noch die »ästhetische Größenschätzung« (comprehensio aesthetica) erwähnt wird. Diese letzte führt auf die Idee der Unendlichkeit und damit auf das »Mathematisch-Erhabene«. Denn die Vernunft fordert »zu allen gegebenen Größen, selbst denen, die zwar niemals ganz aufgefaßt werden können, gleichwohl aber (in der sinnlichen Vorstellung) als ganz gegeben beurteilt werden, Totalität«. »Das gegebene Unendliche... ohne Widerspruch auch nur denken zu können, dazu wird ein Vermögen, das selbst überfinnlich ist, im menschlichen Gemüte erfordert.« In der ästhetischen Größenschätzung »überschreitet das Bestreben der Zusammenfassung das Vermögen der Einbildungskraft«, in dem als »Grundmaß« das »absolute Ganze« der Natur genommen wird, welches »wegen der Unmöglichkeit der absoluten Totalität eines Progresses ohne Ende« ein »sich selbst widersprechender Begriff« ist. – Das gestalthafte Denken verliert sich also in transzendente Illusionen, die freilich den »transz. Schein« der Ideen an sich tragen.

ist. Sehr bald wird die größer werdende Menge nur noch dem durchlaufenden Blick faßbar; wozu dieser Blick einer Führung durch ein bestimmtes »figurales Moment« bedarf. (Man denke etwa an ein Hingleiten längs einer auffallend sich heraushebenden Linie, an der man »entlangzählt«.) Damit tritt die Zeit in ihr Recht. Dieses Durchlaufen braucht Zeit, also auch das Zählen. Und zwar ist dies nicht nur eine Trivialität — insofern alles Bewußtsein in der Zeit ist —, sondern es gehört zum Sinn des Zählens und der Zahl selbst, daß die Zeit dazu benutzt wird den phänomenologischen Zugang zur Zahl zu verschaffen. Die (größere) Zahl ist nicht anders »originär« faßbar als im zeitlichen Zählprozeß. Das Unendliche ist prinzipiell niemals anders »gegeben« als im offenen Horizont des »Immer-Weiter«-Zählens. Das *ἀεὶ πάλιν καὶ πάλιν* bestimmt die ontologische Struktur des *ἄπειρον* als *τὸ ἐν τῷ γίνεσθαι τὸ εἶναι ἔχον*. Deshalb ist es *δυνάμει ὄν*, aber nicht wie das »potentiale« Erz in bezug auf die »aktuale« Bildsäule, — sondern *ὡς ἡ ἡμέρα καὶ ὁ ἀγών*: wie ein unbegrenzt sich wiederholender zeitlicher Rhythmus.

Aber — so richtig dies alles ist — damit ist noch nicht alles gesagt. Es sind die neuen phänomenologischen Möglichkeiten, die sich aus dem Cantorschen transfiniten Progreß und der Brouwerschen »freien Wahlfolge« ergeben können, noch nicht herausgearbeitet. Die »freie Wahlfolge« und der transfinite Progreß sind Formen unendlicher »Folgen«, die bisher noch nicht auf ihre Zeitlichkeit hin betrachtet wurden. Vielleicht sind es Phänomene, die sich nicht dem Prinzip der Wiederholung oder besser, der ständigen Wiederkehr des Gleichen fügen.

Denn z. B. die freie Wahlfolge trägt doch in sich kein Prinzip, das sie durch ständig wiederholte Anwendung derselben Regel ins Unbegrenzte zustande brächte. Zwar »wähle« ich immer wieder, aber doch eben »frei«, d. h. immer etwas Neues, eine neue Zahl, die in keinem schon vorhandenen Gesetz enthalten ist. Jede Wahl ist eine schöpferische »Tathandlung«, nicht das vorauslehbare Ergebnis einer mechanischen Rechnung¹.

In einer anderen Weise entgeht die Reihe der transfiniten Ordnungszahlen dem Schicksal, eine »schlechte Unendlichkeit« in Hegels

1) Ebenso ist es, wenn die Zahlen einer werdenden Folge nacheinander durch Rechnung zustandekommen, ohne daß vorher vorauszusehen ist, welche Zahlen kommen werden oder auch welche Eigenschaften die kommenden Zahlen haben werden. Man denke an gewisse zahlen-theoretische Probleme, wie das der »Zwillingsprimzahlen« usw. (f. S. 66–68).

Sinn darzustellen. Obwohl ihr immer dieselben beiden (oder drei) Cantorschen »Erzeugungsprinzipien« zugrunde liegen, so erfordert doch, nachdem eine gewisse Stufe erreicht ist, die Fortsetzung die Schaffung eines neuen Symbols, da jedes bestimmte endliche Zeichensystem schließlich nicht mehr für die Bezeichnung der Transfiniten ausreicht. Auch handelt es sich nicht etwa nur um die mechanische gleichförmige Einführung immer neuer einfacher Symbole (die Zahl- oder Verknüpfungssymbole sein können) $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots$, sondern die Art des Überganges zum Limes ist immer wieder eine andere; sie muß immer wieder neu entdeckt werden. Es besteht ein ganz bestimmtes mathematisches Problem der Bezeichnung neuer Transfiniten, das z. B. von Veblen, Mahlo¹ u. a. behandelt worden ist. Es ist dabei keine Rede davon, daß man noch alle aufeinanderfolgenden Transfiniten lückenlos bezeichnen kann (das kann man nicht einmal bis zu Ω_1 , der Anfangszahl der III. Cantorschen Zahlklasse!), sondern die durch die Bezeichnung getroffenen Transfiniten folgen aufeinander in immer größer werdenden Sprüngen. Es liegt hier eine äußerste Steigerung jenes Fortgangs ins Endlose vor, der gegenüber die Endlosigkeit der gewöhnlichen Zahlreihe allerdings als eine geringe und »schlechte« Unendlichkeit erscheint. In dem gegenwärtigen Zusammenhang wichtig ist, daß es zur Entdeckung (und Bezeichnung, was in gewissem Sinn zusammenfällt!) neuer Transfiniten eines wirklich schöpferischen geistigen Aktes bedarf. Es besteht wirklich eine formale Analogie mit der wahren Unendlichkeit des dialektischen Prozesses bei Hegel. Denn auch dort ist es zwar daselbe Prinzip des dialektischen Dreischritts Thesis, Antithesis, Synthesis, das immer wieder angewandt wird (analog dem Cantorschen Wechsel zwischen Fortschritt von β zu $\beta+1$ und Limesbildung), aber trotzdem bedarf es zur Auffindung des in dem jeweils erreichten Begriff liegenden »Widerspruchs« und zu seiner »Versöhnung« jedesmal einer neuen schöpferischen Erkenntnis. Nur durch diese schöpferische Erkenntnis wird die Wahrheit konkreter².

1) Siehe oben S. 112, 128 u. Math. Anh. zu § 5, VI B.

2) Für Hegels Charakterisierung und Kritik der »schlechten Unendlichkeit« vgl. z. B. »Wissenschaft der Logik« I. Buch, I. Abschnitt, 2. Kapitel C., b. u. c. (Werke, 2. Aufl., Berlin 1891, Bd. III, S. 142 ff.) und »Enzyklopädie der philos. Wissenschaften« (herausgegeben von G. Laffon) §§ 94, 95.

Für die formale Seite des dialektischen Prozesses siehe das letzte Kapitel der »Logik«: »Die absolute Idee« (I. c. Bd. V, S. 319 ff.).

Besonders wichtig ist endlich der Begriff des »Aufhebens« (Logik I, I, Kap. 1, Anm. S. 104 f.), der das »Stirb und werde« der historischen Zeitlichkeit

Blickt man nun auf diese neue Art ins Unendliche zu gehen, die bei der Wahlfolge und dem transfiniten Progreß auftritt, hin, so erhebt sich nunmehr die ontologische Frage nach der Weise der Zeitlichkeit, die diesen »Unendlichkeiten« als spezifischen Phänomenen eignet. Es handelt sich jetzt nicht mehr um das aristotelische *ἄπειρον δύναμει ὄν ὡς ἡ ἡμέρα καὶ ὁ ἀγών*. Die *γένεσις*, die jetzt in Frage steht, ist eine neue und andere. Der *ἀριθμὸς κινήσεως* dieser neuen »Bewegtheit« ist nicht mehr die alte natürliche Zahl, die ins Indefinite, aber nicht ins Transfinite läuft und auch nicht »frei gewählt« wird. Zugleich hat man hier nicht mehr diejenige Zeit, die »die Bewegtheit« auf ihr Sein hin mißt¹. Denn gerade das Messen besteht ja in dem wiederholten Anlegen ein und desselben Maßstabes, der die Einheit darstellt. Es entspricht daher der natürlichen Zahlenreihe, wie ja schon Euklid die Zahl als Vielheit von Einheiten definiert².

Welches ist nun diese Weise der Zeitlichkeit, die ihrem Sinne nach keine messende (und im gewöhnlichen Sinn zählende) Funktion ausüben kann? Sie soll mit dem Terminus »historische Zeitlichkeit« belegt werden; — aus Gründen, die später zu erörtern sind.

B. Die historische und die naturhafte Zeit.

Diese Weise der Zeitlichkeit ist zuerst von Heidegger phänomenologisch beschrieben worden. Wir geben im folgenden zunächst einen freilich äußerst kurzen Abriß der Heideggerischen Deskription³.

in feiner Weise ausdrückt. — Endlich sei auf das unten (S. 228) in extenso angeführte Stück aus der Vorrede zur »Phänomenologie des Geistes« (S. XXXVIII) hingewiesen, wo der Hegelsche Grundgedanke in seiner frühesten Fassung besonders lebendig erscheint.

1) Vgl. »καὶ ἔστι τῇ κινήσει τὸ ἐν τῷ χρόνῳ εἶναι τὸ μετρεῖσθαι τῷ χρόνῳ καὶ αὐτὴν καὶ τὸ εἶναι αὐτῆς«. (Arist. Phys. IV, cap. 12, p. 221 a 4–5.) — Vgl. o. S. 210.

2) Euklid, Elemente VII, Def. 2. *ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος*. — Vgl. ferner die eigentümliche Kant-Stelle (Kritik der reinen Vernunft B. 300): »Den Begriff der GröÙe überhaupt kann niemand erklären, als eben so: daß sie die Bestimmung eines Dinges sei, dadurch, wievielmals Eines in ihm gesetzt ist, gedacht werden kann. Allein dieses Wievielmals gründet sich auf die sukzessive Wiederholung, mithin auf die Zeit und die Synthesis (des Gleichartigen) in derselben.« —

Allerdings ist zu bemerken, daß man bei einer infinitesimalen Maßeinheit sich mit der Gleichheit unmittelbar benachbarter »Einheitsstrecken« begnügen kann. (S. u. S. 225 Anm. 2.)

3) Als Quelle liegt im wesentlichen zugrunde ein vor der Marburger Theologenschaft am 25. Juli 1924 von Heidegger gehaltener Vortrag mit

Die Heidegger'sche Zeitexplikation hängt wesentlich zusammen mit seiner Explikation des (menschlichen) Daseins selbst, die näher bestimmt ist als Auslegung (Interpretation, *ἐρμηνεία*, wovon der Ausdruck »hermeneutische Phänomenologie«). Die eigentliche Auslegung menschlichen Daseins ist Selbstauslegung und »die Selbstauslegung des Daseins, die jede andere überragt, ist die auf seinen Tod« hin, d. h. »auf die unbestimmte Gewißheit der eigensten Möglichkeit des Zu-Ende-Seins«. Denn »das Dasein ist in der J eweiligkeit, es ist das meinige, – wie soll es da erkannt werden, bevor es zu seinem Ende gekommen ist? Vor seinem Ende ist es eigentlich nur das, was es sein kann« (und Dasein ist nach Heidegger wesentlich Möglichkeit, *δύναμις*), – »und ist es am Ende, so ist es nichts«. So zeigt sich das Dasein im Tode, oder besser im Vorblick auf den eigenen Tod in seiner äußersten (ontologischen) Möglichkeit. Der Tod aber steht vor dem Dasein zugleich in völliger Gewißheit und völliger Unbestimmtheit. So ist das Wissen um den (eigenen) Tod »das Vorlaufen des Daseins zu seinem Vorbei als einer gewissen, ganz unbestimmten Möglichkeit seiner selbst«. In diesem »Vorlaufen« »entdeckt sich das Dasein als einmal nicht mehr da«, und damit enthüllt sich das »Wie seiner J eweiligkeit«, demgegenüber alles Was seines alltäglichen Sorgens verschwindet.

Mit dieser Stellung des Daseins zu sich selbst, dem Vollzug seiner Selbst-Entdeckung hängt nun das Phänomen der »eigentlichen« [in unserer Terminologie: der *historischen*] Zeitlichkeit zusammen.

Denn in dem geschilderten »Vorlaufen zu seinem eigenen Vorbei« ist das menschliche Dasein »zukünftig«. »Es ist dann seine Zukunft, es kommt in diesem Zukünftig-Sein auf seine Vergangenheit und Gegenwart zu-rück.« »Das (menschliche) Dasein in dieser Möglichkeit ergriffen ist die Zeit selbst: es ist nicht nur in der Zeit, sondern ist selbst zeitlich.« Aus der Zukünftigkeit gibt sich das Dasein selbst seine Zeit. Im Vorlaufen zu seinem Vorbei hat es Zeit. Das Grundphänomen der Zeit ist also die Zukunft.

»Der ursprüngliche Umgang mit der Zeit kann also nie ein Messen sein, sondern das Zurückkommen im Vorlaufen ist das

dem Titel »Die Zeit«. (Nicht veröffentlicht. – Die jetzt gedruckte Ausführung in »Sein und Zeit« konnte im Text noch nicht berücksichtigt werden.) Die Wiedergabe schließt sich möglichst eng an eine Nachschrift des Vortrages an, die mir zur Verfügung stand. Vollständige Treue der Wiedergabe war natürlich nicht zu erreichen. Doch habe ich an den markantesten Stellen (nicht bei allen übernommenen Ausdrücken) Anführungszeichen gesetzt.

Zurückkommen auf ständig daselbe Einmalige, auf das Wie des Beforgens, in dem ich gerade verweile«. Dies Immer-Wieder-Zurückkommen kann nie langweilig werden. Die Jeweiligkeit hat aus dem Vorlaufen in die Zukunft alle Zeit jeweilig für sich. Die Zeit wird so nie lang; weil sie ursprünglich überhaupt keine Länge hat. Das Vorlaufen bricht aber in sich zusammen bei Fragen nach dem »Wann—etwas vorbei sein wird?« und dem »Wie lange — noch etwas andauert?«. Solche Fragen sind gar nicht im Vorbei, sondern halten sich an das »Noch-nicht-vorbei«, beschäftigen sich mit dem, was mir möglicherweise noch bleibt, ergreifen nicht die Unbestimmtheit der Gewißheit des Vorbei, sondern wollen sie im Bestimmen beseitigen; sie organisieren die Flucht vor dem Vorbei.

Trotzdem mißt das »Dasein in der Alltäglichkeit« ständig die Zeit, es »lebt mit der Uhr«, wenn auch nur mit der »Tag- und Nacht-Uhr«. Das soll heißen: die natürliche Rhythmik der kosmischen und biologischen (leiblichen) Abläufe (Tag und Nacht, Wachen und Schlafen, Jahreszeiten und Vegetationsperioden usw.) mißt die Zeit. Das alltägliche Leben wird dadurch veranlaßt die Zeit einzuteilen¹: »man« rechnet mit der Zeit.

Diese nichthistorische Daseinsweise des Menschen ist vor allem durch ein von dem historischen verschiedenes Zukunftsphänomen gekennzeichnet.

»Die Zukunft [dieses nicht-historischen Daseins] ist das, woran die Sorge [des Alltags] hängt. Nicht das eigentliche [d. i. das historische] Zukünftigsein des Vorbei [ist damit gemeint], sondern die Zukunft, welche sich die Gegenwart als die ihre ausbildet, als eine, welche Gegenwart werden soll. Das Vorbei als eigentliche Zukunft kann nie Gegenwart werden, — wäre sie das, dann wäre sie das Nichts!«

»... So in der Welt seiend, ist das Dasein zugleich das Dasein als die Zeit, in der man miteinander ist. Die Uhr, die man hat, zeigt die Zeit des Miteinander-in-der-Welt-Seins. Darin liegen die ... Phänomene der 'Generation' und 'Tradition'«.

Diese »gemessene Zeit« »fließt ab«, »diese Gegenwartszeit wird explizit als Ablaufsfolge, die ständig durch die Zeit rollt«. Die Zeit wird dabei »homogenisiert«, dies bedeutet: »Angleichung an die schlechthinnige Präsenz« (Angleichung der Zeit an den Raum,

1) Tempus heißt eigentlich (Zeit-)Abschnitt. Wurzel »tem«, wovon: templum, τέμενος, τέμνω usw.

[Bergson], Zeit als vierte Koordinate der »Weltmannigfaltigkeit« [Minkowski]). — — Soweit Heidegger¹. —

Für die gegenwärtige Problemstellung ist vor allem wichtig die Unterscheidung zweier Arten von Zeit, der historischen und der nicht-historischen; in der Terminologie Heideggers: der eigentlichen Zeit(lichkeit) und der Zeit des Daseins in seiner Alltäglichkeit oder des »man«² (d. h. also die Zeit, in der »man« lebt). Dem Mathematiker und Naturforscher liegt seinen ganzen Denkgewohnheiten nach die nicht-historische Zeit viel näher als die historische; wir wollen jene auch positiv als »Natur-Zeit« oder »naturhafte Zeit« bezeichnen³.

1) Man sieht schon aus dem gegebenen Auszug, daß Heidegger das Problem der Zeit in das philosophische Grundproblem des Seins (das ontologische Problem) hineinstellt. Es muß hier verwiesen werden auf seine Abhandlung »Sein und Zeit«. Dort heißt es in der Eingangs-bemerkung, das Ziel der Abhandlung sei die »Interpretation der Zeit als des möglichen Horizontes eines jeden Seinsverständnisses überhaupt«.

2) Für Heidegger ist das »man« des alltäglichen Umgangs das, was die eigentliche Zeit nicht hat. D. h. dieses »man« ist der Repräsentant des nichthistorischen Lebens (Daseins.) Vgl. die folgenden Stellen aus dem Zeit-Vortrag: »Dasein ist ferner bestimmt als »ich bin«: ebenso primär wie in der Welt sein ist es auch immer mein Dasein, je eigenes, jeweiliges Dasein. . . . So es ein Seiendes ist, das ich bin und dies zugleich im Miteinander-Sein, bin ich mein Dasein zumeist und durchschnittlich nicht selbst . . . Keiner ist in der Alltäglichkeit er selbst. Dieser Niemand, von dem man gelebt wird, ist das »man«, aus dessen Hartnäckigkeit das »ich bin« möglich ist.« — Hier scheint aber doch berücksichtigt werden zu müssen, daß das Phänomen »man« soziologisch eine ganz bestimmte späte »gesellschaftliche« (Tönnies) Struktur an sich trägt; der entwicklungsgehistorisch und sinn-genetisch die soziale Form der »Gemeinschaft« (Lebensgemeinschaft, Bluts-, Stammesgemeinschaft usw.) vorausgeht. Alle diese primitiveren »Wir«-Phänomene stehen im Gegensatz sowohl zum »Ich« wie zum »Man«. Die für sie kennzeichnende Zeitlichkeit ist nahezu die Naturzeitlichkeit; das faktische (heutige) »Man« ist dagegen ein naturhaft-historisches Mischphänomen.

3) Wir dehnen dabei den Begriff »Natur« über seinen gewöhnlichen Umfang hinaus aus. Wir nennen Natur alles Seiende, was »naturhaft« ist, also, außer der äußeren, »toten« und lebendigen, Natur, auch noch das naturhafte Sein der Naturvölker, des Kindes (des »Naiven«) und des menschlichen Trieb-lebens. (Vgl. den Wortgebrauch im Sprichwort: »naturalia non sunt turpia« und »naturam expellas furca, tamen usque recurret« (Horaz).) Es kommt also zur äußeren Natur noch hinzu das Primitiv-Seelische. — Alle diese Phänomenbezirke sind u. E. gekennzeichnet durch ihre »nichthistorische« Zeitlichkeit, in der sie nicht etwa nur sind, als in einer Leerform, sondern durch die sie ontisch wesentlich mit ausgemacht (konstituiert) werden. — Wieweit das Mathematische naturzeitlich ist, wird im Text erörtert.

Das Kennzeichnende der Naturzeit gegenüber der historischen Zeit ist das Bestehen der Möglichkeit der Wiederkehr des Gleichen, des Sich-Wiederholens des gleichen Ereignisses. Dagegen kennt die historische Zeit die Wiederkehr nicht; man könnte zugespitzt sagen: (echte) Zukunft schließt (echte) Wiederkunft aus. Indem die Dinge stets auf mich zu-kommen d. h. auf mein Dasein in seiner einmaligen Jeweiligkeit gewissermaßen zugespitzt sind, können sie nicht in der gleichen Weise wieder kommen, denn damit würden sie ihre eindeutige Zugespitztheit verlieren. Damit ist (in der historischen Zeit) genau genommen auch die Kategorie des Gleichen ausgeschlossen, es gibt dort nur Nämliches¹. (Identisches im strengen Sinn.) Die Zeit ist beide Male in ganz verschiedener Weise principium individuationis. Naturzeit ermöglicht das Wiederauftreten des genau Gleichen (ὁμοειδές) »zu verschiedenen Zeiten«. So ist etwa ein Schlag des Pendels wie der andere, der Lauf der Sonne nach genau einem Jahr so wie ein Jahr zuvor. Auch im Reiche des Lebendigen gilt ähnliches. Schopenhauer sagt (die Welt als Wille und Vorstellung, II. Bd., Kap. 91; S. 549). »Ich weiß wohl, wenn ich Einem ernsthaft versicherte, die Kage, welche eben jetzt auf dem Hofe spielte, sei noch dieselbe, welche dort vor dreihundert Jahren die nämlichen Sprünge und Schliche gemacht hat,

1) Über den Unterschied von Nämlichem und Gleichem vgl. H. Ammann, Die menschliche Rede I (Lahr i. B. 1925), I. Teil: die Idee der Sprache und das Wesen der Wortbedeutung, 6. Kapitel: der Name, bes. Seite 71f. Etymologisch kommt »nämlich« von Name, »gleich« von gelich = conformis »dieselbe Beschaffenheit habend«. (got.: galeiks = übereinstimmenden Leib habend, von got. leik = Leib.) – Ammann bemerkt weiter, man könne »das Verhältnis der »Nämlichkeit« . . . in voller Entschiedenheit nur auf den Menschen anwenden«.

» . . . Der letzte Sinn der »Nämlichkeit« liegt bei Gegenständen wie bei Tieren immer in der Bezogenheit auf den Menschen, in der Rolle, die »dieser« Gegenstand in meinem Leben gespielt hat«.

» . . . Die Einheit des Gegenstandes, die seine Identifizierung gestattet, ruht letzten Endes in der Einheit des Ich, das sich mit sich selbst identisch weiß.« Dies gilt (nach Ammanns wie nach unserer Ansicht) für den historischen Menschen (den »mit Bewußtsein ausgestatteten Menschen«). Der Primitive (»das frühmenschliche Denken«) kennt die Identität der Person noch nicht. (Vgl. die Ausführungen l. c. S. 73–76.) –

In diesen Bestimmungen, die – mit einigem Vorbehalt – ontologische genannt werden können, spiegelt sich derselbe Grund-Gegensatz zwischen Historischem und Nicht-Historischem, »Geist« und »Natur«, der sich beim Phänomen der Zeitlichkeit als Gegensatz zwischen »Zukunft« und »Wiederkunft« gezeigt hat. – –

er mich für toll halten würde: aber ich weiß auch, daß es sehr viel toller ist, zu glauben, die heutige Katze sei durch und durch und von Grund aus eine ganz andere, als jene vor dreihundert Jahren¹. (Vgl. Aristot., *Metaph. Z*, c. 7, p. 1032a 24–25: *ἡ κατὰ τὸ εἶδος λεγόμενη φύσις ἢ ὁμοειδής· αὕτη δ' ἐν ἄλλῳ· ἄνθρωπος γὰρ ἄνθρωπον γεννᾷ*.)

Die genaue Gleichheit ist empirisch (wie alles »Genau«) zwar niemals verwirklicht, aber sie ist (ideal) möglich: man kann sich genau gleiche Wiederholungen denken, die Abweichungen sind »zufällig«. Ein Naturvorgang läßt sich in zeitlicher Hinsicht direkt kennzeichnen als ein zeitlicher Ablauf, was besagt, daß eine genaue Wiederkehr wesenhaft möglich ist. So setzt z. B. eine Uhr idealiter eine solche genaue Wiederkehr voraus, sie ist ein Apparat, um einen rein periodischen Vorgang hervorzubringen². Denn nur so

1) Noch eine andere Stelle verdient angeführt zu werden (l. c. S. 543): »Durchgängig und überall ist das echte Symbol der Natur der Kreis, weil er das Schema der Wiederkehr ist: Diese ist in der Tat die allgemeinste Form der Natur, welche sie in allem durchführt, vom Laufe der Gestirne an bis zum Tod und der Entstehung organischer Wesen, und wodurch allein in dem rastlosen Strome der Zeit und ihres Inhalts doch ein bestehendes Dasein, d. i. eine Natur, möglich wird«. Die Vorstellung dieser Wiederkehr des Gleichen ist bekanntlich fast allgemein antiker Glaube: Plato, Aristoteles die Stoa, Plotin stimmen darin überein, Epikur macht eine merkwürdige Ausnahme. — (Vgl. Ernst Hoffmann in Deffoires Lehrbuch der Philosophie Bd. I (Berlin 1925), Seite 219f.) —

Nießsche hat in seiner Lehre von der »ewigen Wiederkunft« diese uralten Motive wieder aufgenommen.

2) Vom Gesichtspunkt der modernen Physik kann man gegen die Behauptung des Textes einen Einwand erheben: H. Weyl hat in seiner Weiterbildung der allgemeinen Relativitätstheorie zu einer reinen Infinitesimalgeometrie der Raumzeitmannigfaltigkeit auch für Raum- und Zeitstrecken das »Nahprinzip« eingeführt, demzufolge zwei kleine Strecken nur in unmittelbarer (räumlicher bzw. zeitlicher) Nähe miteinander verglichen werden können. Erst durch eine »unendlich häufige« Wiederholung einer derartigen Nahübertragung kommt man zu einem Fernvergleich. Es ist nun i. a. durchaus nicht notwendig, daß dieser Vorgang »vollständig integrabel« ist, d. h. durchwandert man mit Maßstab und Uhr einen geschlossenen Weg von kosmischen Dimensionen, so braucht man nicht mit dem gleichlangen Maß und der gleich schnell gehenden Uhr zum Ausgangspunkt zurückzukommen, wenn auch die Wanderung störungsfrei durchgeführt würde. Die »Wiederkehr« gilt also hier nur im Infinitesimalen. (Vgl. Weyl, »Raum, Zeit, Materie«. 5. Aufl., Berlin 1923, § 17 u. § 40 und meine Arbeit, *ds. Jahrb.* VI, S. 529ff.) — Man kann von diesem Gedanken eine Anwendung machen zur Bestimmung des Verhältnisses von biologischer Entwicklung und menschlicher Geschichte. Die Wiederkehr des

kann die zeitliche Maßeinheit von einer Stelle zur anderen übertragen werden.

Von der Seite des Gedächtnisses aus erscheint diese primitive, naturhafte Zeitform als die bildhafte Wiederholung einer vergangenen Situation und Situationskette (die wie ein Film wiederholt »abrollen« kann)¹ – im Gegensatz zur historischen Erinnerung, dem expliziten Sich-Aneignen der eigenen Vergangenheit, die man zuvor schon »ist«. – –

Dagegen individuiert die historische Zeit durchaus nicht in dieser Weise der »Vereinzelung« ganz gleicher, nicht mehr spezifizierbarer Gegenstände. Sie individuiert nur so, daß jedes Individuum jeweils auf seinen eigenen Tod verwiesen wird, für den es sich nicht irgendwie vertreten lassen kann. »Im Zukünftigen wird das Dasein es selbst, wird sichtbar als die einzige Diesmaligkeit seines einzigen Schicksals, in der gewissen Möglichkeit seines einzigen, einmaligen Vorbei. Dies verhindert aber gerade, das Individuum als Ausnahmeexistenz aufzufassen, schlägt gerade jedes Sich-Herausnehmen mit einem Schlage nieder, individuiert so, daß es sie alle gleichmacht: im Beisammensein mit dem Tode, wo keiner vor dem anderen ausgezeichnet ist, in einem Wie, in dem alles Was zerstäubt.« (Heidegger, Zeit-Vortrag.) – –

Es handelt sich nun darum, das Formale dieser historischen Zeitlichkeit herauszuheben.

Gleichen in der Kette der Zeugungen (*γενεσις ἀποσειδής* Aristoteles) gilt nur im infinitesimalen Bereich, der die gesamte zeitliche Erstreckung der menschlichen Geschichte enthält. Im Großen ist der Prozeß nicht integrierbar, d. h. Rassen und selbst Tierpezies ändern sich in den »biologisch großen« Zeiträumen. [Man führt »die Rückkehr zum Ausgangspunkte« durch, indem man etwa ein fossiles Skelett mit dem des entsprechenden heutigen Tieres vergleicht.] – – Doch ändert all dies an der Gegenüberstellung von Naturzeit und historischer Zeit nichts; denn die historische Zeit hat auch »im Infinitesimalen« grundsätzlich keine Möglichkeit der Wiederkehr.

1) Neuere psychologische und ethnologische Forschungen haben einerseits die »subjektiven optischen Anschauungsbilder« als primitive Gedächtnisleistung aufgewiesen (E. R. Jaensch), wobei es auf die »objektive« Treue im Verhältnis zum »Reizvorgang« nicht so sehr ankommt (diese ist im primitiven Seelenleben in mancher Hinsicht geringer als beim ausgebildeten), sondern nur auf die Gegebenheit des »eidetischen« Bildes (Jaensch) als eines gegenwärtigen.

Andererseits ist auf die ungeheure Gedächtnisleistung der Primitiven binzuweisen (wörtliches Rezitieren langer Epen, Wiedererkennen aller Einzelheiten eines langen unübersichtlichen Weges usw.), die sich nur durch ein »Wiederabrollen« des Original-Vorganges verstehen läßt. (Lévy-Brühl, H. Schweiger u. a.).

Zu diesem Zwecke werde dieser Zeitbegriff zunächst von seiner Zuspitzung auf die persönliche Existenz des Einzelnen abgelöst und auf die historische Zeit einer kulturell geschlossenen Menschengruppe übertragen, womit das von Heidegger erwähnte Problem der »Generation« berührt wird.

Die historische »Generation« ist zwar im Miteinander da, aber doch als Ganzes betrachtet, *sterblich*, – im Gegensatz zum »man«, das nicht stirbt.

Es handelt sich dabei nicht um die Generation im biologischen, sondern im historischen, »geistigen« Sinn¹. Jede solche »Generation« hat ihre spezifischen »Aufgaben«, ihren »Stil«, ihre Weise des Sehens usw. Schöpferisch ist sie in ihrer Jugend (Pubertät). Ihr erwachsenes Leben besteht im Explizieren und zu Ende bringen des in der schöpferischen Krise der Pubertät Konzipierten. (Was vielleicht nicht ausschließt, daß besondere »geniale« Individuen wiederholte Pubertätsperioden haben, wie Goethe von sich sagte.) Das heißt – zeitlich betrachtet – jede Generation ist geistig bezogen auf ihr eigenes Ende (*τελευτή*). Ihre »Geistigkeit« besteht gerade darin, sich zu Ende zu bringen (etwa zu Ende zu denken, zum »letzten« Ausdruck zu bringen). Was nach ihr kommt, ist ihr prinzipiell dunkel. Die nächste neue, heranwachsende Generation wird von der alten im Grunde nicht mehr verstanden, d. h. die alte versteht das Wollen, die Schaffensrichtung der neuen nicht mehr. Der Geist muß sich also selbst verleugnen, muß sterben, um aufs neue zu werden. »Stirb und werde!« ist der für ihn als Geist schlechthin konstitutive Imperativ. Der historische Geist (der stets nur, eben als wesentlich historischer in der jeweiligen Generation sein konkretes Dasein hat) hat sich also nur als solcher, wenn er »zu seinem eigenen Vorbei vorläuft«. (Heidegger.) Dann hat er seine eigentliche Zu-kunft, er kommt zu sich selbst in seiner einmaligen J eweiligkeit und Diesheit zurück und begreift darin erst seine ihm eigentümliche Weise des Seins.

Jede Bekümmernis um eine »Zukunft, die Gegenwart werden soll« (also etwa Sorge um künftige Kultur) lähmt die Schöpferkraft des Geistes. Nur wenn der Horizont, in den hinein er schreitet, dunkel ist – das »gewisse, aber unbestimmte Vorbei« –, hat der Geist

1) Wir bezeichnen das historische Leben (Dasein) als Geist und stellen ihm das nicht-historische, z. B. das »prähistorische« (frühmenschliche) und »subhistorische« Dasein (untermenschliches Triebleben) als Natur gegenüber. – Alles »Geistige« ist also für uns wesentlich historisch und keineswegs »übergeschichtlich«!!

die Freiheit des Schaffens, des Hineingestaltens in die Leere, die vor ihm liegt. Trotzdem wirkt er gerade damit zugleich aus seiner echten historischen Tradition heraus, aber diese ist ihm nicht als etwas Fremdes bewußt, wonach er sich richten müßte (als wie nach einer Norm), sondern er ist seine Geschichte selbst. (Graf York: »wir sind die Geschichte«.)

Der erste, der diese Zeitlichkeit des Geistes erschaut hat – wenn auch nicht unter diesem Namen –, war Hegel¹. Es sei folgende Stelle aus seiner Vorrede zur »Phänomenologie des Geistes« angeführt (Seite XXXVIII): »Der Kreis, der in sich geschlossen ruht und als Substanz seine Momente hält, ist das unmittelbare und darum nicht verwunderliche Verhältnis. Aber daß das von seinem Umfange getrennte Akzidentelle als solches, das Gebundene und nur in seinem Zusammenhange mit anderem Wirkliche ein eigenes Dasein und abgeforderte Freiheit gewinnt, ist die ungeheure Macht des Negativen; es ist die Energie des Denkens, des reinen Ich. Der Tod, wenn wir jene Unwirklichkeit so nennen wollen, ist das Furchtbarste, und das Tote festzuhalten das, was die größte Kraft erfordert. Die kraftlose Schönheit haßt den Verstand, weil er ihr dies zumutet, was sie nicht vermag. Aber nicht das Leben, das sich vor dem Tode scheut und vor der Verwüstung rein bewahrt, sondern das ihn erträgt und sich in ihm erhält, ist das Leben des Geistes. Er gewinnt seine Wahrheit nur, indem er in der absoluten Zerrissenheit sich selber findet. Diese Macht ist er nicht als das Positive, welches vom Negativen wegfieht, wie wenn wir von etwas sagen, dies ist nichts oder falsch, und nun, damit fertig, davon weg zu irgend etwas anderem übergehen; sondern er ist diese Macht nur, indem er dem Negativen ins Angesicht schaut, bei ihm verweilt. Dieses Verweilen ist die Zauberkraft, die es in das Sein umkehrt.« –

C. Mathematik und Zeitlichkeit.

Wir wiederholen nun unsere Frage: Welches ist nun die formale Struktur dieser historischen Zeit? Und weiter: Welcher Zusammenhang läßt sich finden zwischen ihr und den früher geschilderten mathematischen Phänomenen der Wahlfolge und des transfiniten Progresses?

1) Vgl. dazu Heidegger, »Sein und Zeit« § 82, wo zwar der hier nicht behandelte explizite Zeitbegriff Hegels in seiner naturhaften Struktur hauptsächlich dargestellt ist, aber doch auch (l. c., S. 435) auf den im Text hervorgehobenen Zusammenhang hingewiesen wird.

Die Bezeichnung der Wahlfolge als einer »frei werdenden« Folge führt auf den gemeinfamen Zug. Frei werden – das kann nur der Geist, das historische Dasein. Die Freiheit des Werdens ist wesentlich Freiheit des Schaffens – bei der Folge aber die Freiheit der Wahl, die das neue Folgeglied »schafft«. Diese ist – was den zugrunde liegenden Zeitcharakter anlangt – nur möglich durch die Dunkelheit der Zukunft, – des eigenen Vorbei. So ist jede einzelne Wahl »vorbei«, wenn die nächste vollzogen wird. Bei der ersten Wahl ist die folgende (und alle weiter folgenden) völlig unbestimmt – aber ihr Stattfinden ist gewiß. Man erkennt Zug um Zug die Eigentümlichkeiten der historischen Zeit.

Ob eine bestimmte Zahl in der Folge vorkommen wird, ist nicht entschieden; auch nicht »an sich«. Kein »ewiges Gesetz« beherrscht die Folge. Gerade deshalb ist die Folge ein »eigentlich zeitliches« Phänomen. Der ausschlaggebende Umstand, der die Entscheidung über das künftige Vorkommen einer bestimmten Zahl ausschließt, ist, daß keine noch so große feste Zahl M a priori angegeben werden kann, derart, daß die Entscheidung mit der $(M + 1)^{\text{ten}}$ Wahl fallen muß. Könnte irgendeine solche Zahl angegeben werden, dann wäre ihre Größe ganz gleichgültig; die Schnelligkeit der aufeinander folgenden Wahlen kann nicht gemessen werden, ist beliebig. Die Frage »wie lange es noch dauert« hat keinen Sinn.

Man kann diese Verhältnisse mit der Sterblichkeit des Menschen in Zusammenhang bringen: der Mensch als Mathematiker stirbt notwendig, bevor er die Folge zu Ende gewählt hat. Welches noch so entfernte Glied der werdenden Folge er auch ins Auge faßt, die Entscheidung kann möglicherweise erst später fallen: jenseits des ins Auge gefaßten Ziels, im Gebiete des »Vorbei« der zielenden Intention. Wäre der Mensch unsterblich, so gäbe es den Unterschied zwischen freien und gesetzlich gebundenen Folgen nicht.

Aber dagegen läßt sich folgendes einwenden¹: Auch wenn jemand »ewig« lebte, würde er doch niemals, so lange er auch lebte, die Entscheidung erreichen. Denn auch der »unsterbliche« Mathematiker müßte doch einen bestimmten Zeitpunkt ins Auge fassen, wo die Entscheidung fertig vorliegt. Und jeder solcher erzielte Zeitpunkt wird notwendig einmal von der Entwicklung der Folge überschritten. Also ist die Sterblichkeit des Mathematikers irrelevant. – Diesem Einwand ist nur zu begegnen, wenn man einen

1) Diesen Einwand verdanke ich Herrn Professor J. E b b i n g h a u s.

Unterschied berücksichtigt, den schon Plotin in gewissem Sinne macht, nämlich den zwischen Ewigkeit (*αἰών*) und Immerfein (*ἀιδιότης*)¹. Was vorhin vorausgesetzt wurde, ist nicht ewiges, sondern immerwährendes Leben des Menschen. Eine unbegrenzte Hinausschiebung des Todesdatums verschafft dem Menschen noch kein »ewiges Sein«. Der (historische) Mensch ist gewissermaßen so wesenhaft sterblich – eben wegen seiner historischen Zeitlichkeit –, daß er auch durch die Abschaffung des physischen Todes nicht ewig würde. Denn Ewigkeit ist in sich ruhendes, vollendetes Sein, Sein, das an sein Ziel (*τέλος*) kam und doch nicht Nichts ward. Ewigkeit ist allumfassende Gegenwart und deshalb dem Augenblick tief verwandt. (Kierkegaard.) Ein tiefsinniger antiker Mythos läßt den Tithonus, der sich von den Göttern Unsterblichkeit erbat und die Bitte um ewige Jugend vergaß, dahinschwinden in endlosem Altern, bis er endlich zur Heuschrecke wird. Er kommt also trotz seiner Unsterblichkeit schließlich »ans Nichts«². Ewige Jugend, das bedeutet Verwandlung des historischen Zeitcharakters (vermöge dessen der Mensch altert) in den naturhaften.

Für den Blick eines ewigen Wesens wäre in der Tat die Wahlfolge bis ans Ende mit einem Schlag erfassbar, sie wäre nicht mehr endelos. Gott zählt nicht (gegen Gauß). Der Unterschied gegen die gesetzliche Folge hätte seinen Sinn verloren. Ja, der Sinn der mathematischen Gesetzlichkeit, deren wesenhafte Bedeutung es eben ist, das Endelose mit endlichen Mitteln zu beherrschen, ginge verloren. Die Mathematik als Wissenschaft verschwände. –

1) Die Darlegungen Plotins darüber stehen im 7. Buch der VII. Enneade: *περὶ αἰῶνος καὶ χρόνου*, Kap. 3 ff. (Zitate nach der Ausgabe von R. Volkmann, Lips. 1883, Vol. I) p. 312, 17–21: ... αἰῶνα εἶδεν ἰδὼν ζωὴν μένουσαν ἐν τῷ αὐτῷ ἀεὶ παρὸν τὸ πᾶν ἔχουσαν, ἀλλ' οὐ νῦν μὲν τότε, αὐθις δ' ἕτερον, ἀλλ' ἔμα τὰ πάντα ... ἀλλὰ τέλος ἀμερές ...

p. 313, 6–9: ὁ οὖν μήτε ἦν, μήτε ἔσται, ἀλλ' ἔστι μόνον, τοῦτο ἔσῳς ἔχον τὸ εἶναι τῷ μὴ μεταβάλλειν εἰς τὸ ἔσται μὴδ' αὖ μεταβεβληκέναι ἔστιν ὁ αἰών.

p. 314, 21–24: ἡ οὖν τοῦ ὄντος παντελὴς οὐσία καὶ ὅλη ... καὶ ἡ ἐν τῷ μὴδὲν ὂν ἔτι ἐλλείπειν καὶ τῷ μὴδὲν ὂν μὴ ὄν αὐτῇ προσγενέσθαι.

Daraus geht klar hervor, daß bei Plotin αἰών mehr ist, als »Immerfein« ist. Die ἀιδιότης charakterisiert er aber nicht als selbständiges Phänomen, sondern (nach anfänglicher Unterscheidung) biegt er sie um in eine Eigentümlichkeit des αἰών selbst.

2) Derselbe Gedanke findet sich in entsetzlich eindrucksvoller Weise ausgeführt bei Swift, *Gullivers Travels*, Part. III, Ch. X (a particular description of the Struldbrugs etc. – Die »Struldbrugs« sind zwar unsterbliche, aber ständig alternde, unter den Gebrechen des Alters in furchtbarer Weise leidende Wesen).

Was von der Wahlfolge gesagt wurde, gilt *mutatis mutandis* auch von dem transfiniten Progreß. Auch da muß die Benennung neuer Transfiniten, wenn ein bestimmtes Bezeichnungssystem und eine bestimmte Weise, zum Limes überzugehen, erschöpft ist, neu geschaffen werden. Nur hängt hier das Vordringen wesentlich mit ab von dem bereits Geleisteten; durch Reflexion auf den jeweilig vollzogenen endlosen Prozeß, den jeweils durchschauten endlosen Horizont, wird die neue Stufe der strukturalen Komplikation erreicht. Hier ist also in gewissem Sinn die Analogie mit der historischen Entwicklung (und auch mit Hegels dialektischem Prozeß¹⁾) noch enger als bei der Wahlfolge, deren einzelne Schritte ganz unabhängig voneinander sind. — Nun sind wir endlich imstande, das Eigentümliche der historischen Zeit formal zu kennzeichnen.

Man hat bei ihr zu unterscheiden: *erstens* das formale Schema des Fortschritts, das sich gleichbleibt, das sich wiederholt: die ständige Wahl bei der Wahlfolge, die immer von neuem vollzogene Reflexion beim transfiniten Progreß, die ständig aufs neue zu leistende Überwindung der alten Generation durch die junge. Dieser formale Fortschritt geht ins Endlose.

Zweitens aber hat man den konkreten Vollzug des Fortschritts, der also nicht mehr durch das formale Schema erfaßt wird: die konkrete Wahl jeweils einer bestimmten Zahl, die konkrete Reflexion auf den jeweils gerade zuletzt durchschauten Horizont, die konkrete schöpferische Tat der Überwindung des Alten. Für diesen konkreten Vollzug gibt es keinen erhellen, vorauszufehenden Horizont. Und das formale Schema ist im konkreten Vollzug nicht gegenständlich da — wäre es das, so würde der konkrete Vollzug gehindert² —, sondern der Vollzug vollzieht sich nach dem Schema ohne sich dessen bewußt zu sein. Der eigentliche Ernst liegt in

1) Man kann sogar den letzten Schritt im dialektischen Dreischritt, die Synthesis, mit der Reflexion auf das jeweils Vollzogene in eine engere Parallele bringen.

2) Damit ist ein Phänomen von großer Tragweite berührt: das Reflektieren auf das Gleichförmige des Schemas (den Anteil, den die »schlechte Unendlichkeit« auch noch am historischen Prozeß hat) führt zum schwächlichen »Relativismus«, der die eigenen Erkenntnisse und schöpferischen Taten nicht mehr ernst nimmt, da sie ja doch überholt werden würden. Dadurch wird die spezifisch philosophische (ontologische) Erkenntnis der wesenhaft historischen Befangenheit des Menschen trivialisiert und gänzlich unfruchtbar gemacht.

Die streng historische Zeit ist im Grunde endlich, d. h. ihr fehlt das (in gewissem Sinne positive) Phänomen des endlosen Horizontes. (Die End-

dem exquisiten Faktischen, dem »Zu-fälligen« (dem, was ihm als Einmaligem gerade zu-fällt), diesem konkreten Vollzug, für den es keine allgemeingültige, überzeitliche Norm gibt. Der Geist ist in diesem Vollzug ganz auf sich selbst angewiesen, auf sich selbst zurückgeworfen, sich selbst allein verantwortlich, aus seiner eigenen Substanz lebend –: frei, aber einsam und im Dunkel, das er nie selbst erhellen kann. –

Die Struktur der historischen Zeit erweist sich so als eine doppelte: ein gleichförmiges formales Schema, das seinem Zeitcharakter nach eigentlich selbst natur-zeitlich ist, und ein ganz unschematisches Schaffen, das zugleich ein immerwährendes Sterben ist.

Die formale Struktur der historischen Zeit erscheint also mit einer merkwürdigen Paradoxie behaftet. Sie ist, soweit sie eigentlich formal ist, unrein, enthält ein ihr fremdes, nicht-historisches Moment, – soweit sie aber historisch ist, ist sie formal ganz unfassbar: der konkrete Vollzug hat keine Gemeinsamkeit der Form.

Das weist darauf hin, daß der Begriff der Form selbst ein nichthistorischer Begriff ist und daher dem Historischen letzten Endes nicht adäquat. Woher kommt denn dann aber der formale Anteil in der historischen Zeitlichkeit?

Die Antwort lautet: Es wurde in der vorangegangenen Erörterung der ursprünglich historische Zeitbegriff des Individuums außer acht gelassen zugunsten der Zeitlichkeit der historischen Gruppe. Damit ging aber viel von der letzten Zuspitzung des Heidegger'schen Zeitbegriffs verloren; so vor allem die Beziehung auf den eigenen Tod, mit dem es wirklich zu Ende ist. Die sterbende »Generation« kennt ihren Nachfolger, ihre Beziehung zur Jugend ist nicht eine rein negative, nicht nur Haß, sondern auch Liebe. Der einzelne Mensch hat in diesem Sinn keinen Nachfolger¹;

lichkeit kommt also durch so etwas wie eine doppelte Negation zustande!). Ich möchte glauben, daß mit dieser merkwürdigen Erscheinung Hegel's eigentümliche Lehre vom »Ende der Geschichte« zusammenhängt. Die Geschichte muß zu Ende gehen: – denn die dieser zugrunde liegende Zeitlichkeit (die, wie ich darzulegen versuchte, zuerst von Hegel mittels seines Begriffes des »Aufhebens« [= Vernichten und doch Bewahren] ihre, wenn auch unvollkommene, Explikation fand) ist endlich.

1) Das Verhältnis von Eltern und Kindern ist kein ursprünglich historisches, sondern ein naturhaftes. Geistige Schüler- oder Jüngerschaft wäre vielleicht die einzige, aber sehr inadäquate Parallele. Denn der Schüler ist nicht frei. Historisch denkt dagegen Nietzsche's Zarathustra, wenn er sagt: »Nun heiße ich euch, mich verlieren und euch finden; und erst, wenn ihr mich Alle verleugnet habt, will ich Euch wiederkehren.« (Also sprach Zarathustra, I. Teil, Von der schenkenden Tugend, 3.)

er ist stets jeweils der letzte. So sagt auch Heidegger: »Das Vorlaufen ins eigene Vorbei läßt das Dasein ganz allein bei sich selbst stehen, mitten im Lärm der Alltäglichkeit, stellt es in die Unheimlichkeit«.

Das bedeutet aber, daß das schematische, naturzeitliche Moment bei der Zeitlichkeit des Einzelnen keine Rolle spielt. Jeder Einzelne stirbt nur einmal; jede einzelne Generation allerdings auch, aber sie weiß sich ein Glied in der Kette der Generationen. Wenn auch völlig leer und dunkel, ist doch das formale Schema für beliebig viele folgenden Generationen vorgezeichnet. Es spielt eben hier offenbar das Naturhafte in der »Kette der Zeugungen« mit hinein. Der Name (generatio) selbst weist darauf hin. Das naturhafte Moment in der Zeitlichkeit der historischen Entwicklung einer Menschengruppe rührt also her von dem naturhaften Anteil dieser Gruppe selbst, die immer etwas von dem Heidegger'schen »Man« an sich hat.

Daher kommt es, daß das schematische Moment nicht ein streng verweisendes, auf die Jünglichkeit zurückwerfendes ist (also von der Art der sogenannten »formalen Anzeige« im Sinne Heideggers), sondern ein Nebeneinander oder Hintereinander, eben das Phänomen der »Kette«, gestattet.

Betrachtet man das Leben mehrerer Einzelnen, so kann man natürlich auch eine formal-schematische Analogie in ihrem Verhältnis zum Tode und zur Zeit finden; aber diese Analogie führt nie zu einem Nebeneinander, das die »Zukünftigkeit«, die Zugespitztheit der Zeitlichkeit auf den Einzelnen irgendwie beseitigte. Im Tode sind zwar alle gleich, im Wie, aber durch diese Gleichheit »individuiert« die historische Zeit gerade den Einzelnen, indem sie ihn einsam macht, ihm jeden Vergleich mit Anderen hinsichtlich des »Was«, seiner qualitativen Besonderheiten, seines Ranges, Wertes usw. unmöglich macht (i. S. 226). Die Schicksalsgemeinschaft des Sterbens erleichtert dem Einzelnen — als historischem Wesen — den Tod nicht¹. — Die Weise der formalen Gemeinsamkeit beim Einzelnen ist also eine wesentlich andere als bei den »Generationen«. — —

Diese Verhältnisse haben — so befremdend das zunächst auch klingen mag — ihre Analogie im Mathematischen.

1) Lebenslagen, wo Gemeinschaften (Menschen gleichen Stammes, Blutes, Glaubens usw.) gemeinsam in den Tod gehen, sind niemals von rein historischem Seinscharakter. Es findet irgendeine Weise der Identifizierung (Einsfühlung) statt, die die historische Individuation auslöscht.

Die freie Wahlfolge (als Repräsentantin des historischen Menschen) ist individuiert derart, daß ein Nebeneinander mehrerer Wahlfolgen in gewissem Sinne ausgeschlossen ist. Man kann nämlich Wahlfolgen nicht in Mengen zusammenfassen, nicht klassifizieren oder auch nur kolligieren. Man könnte das nur in ganz äußerlicher Weise nach ihren Anfangsstücken¹. Es sind also allein die gesetzmäßigen Folgen einer »Klassifikation« und Abstufung nach der Komplikation ihrer Strukturgesetze fähig, wie bei der Besprechung des Kontinuumproblems (§ 5 b) ausführlich erörtert wurde. — —

Die rein historische Zeitlichkeit, so können wir zusammenfassend sagen, ist die des individuellen historischen Lebens. Sie findet sich wieder in dem Zeitcharakter gewisser mathematischer Phänomene: der frei werdenden Wahlfolge und des transfiniten Progressus. Der Grund dafür ist, daß diese mathematischen Phänomene, die ebenso wenig wie irgendwelche anderen Phänomene, reine Gehalts- oder reine Bezugsphänomene sind, selbst historische Vollzugsmodi konstitutiv enthalten: Das freie Wählen und die Reflexion auf die eigene jeweilige Lebenslage². Freilich eignet jenen mathematischen Phänomenen ein gewisses formal-schematisches Moment nicht-historischen (naturzeitlichen) Charakters, das seinen Ursprung hat in dem Umstand, daß das Mathematische als solches nicht-historisch ist.

Dies führt nun endlich auf die letzte in dieser Abhandlung zu erörternde Frage, die nach dem Seinsinn des Mathematischen selbst. Die vorangehende Explikation der Zeitlichkeit mathematischer Gegenstände dient dazu als Vorbereitung. Denn die Zeit kann, nach Heideggers schon angeführtem Wort, interpretiert werden »als der mögliche Horizont eines jeden Seinsverständnisses«.

c) Der ontologische Sinn mathematischer Existenz.

I. Einführung in die Problemstellung.

Der Ausdruck »mathematische Existenz« hat zunächst den Charakter eines terminus technicus. Er bezeichnet innerhalb der mathematischen Wissenschaft und ihrer spezifischen Technik einen be-

1) Nicht völlig freie Wahlfolgen, sondern solche mit Nebenbedingungen, können freilich klassifiziert werden, aber eben nur nach ihren Nebenbedingungen (so kann man etwa Würfelolgen mit einem oder zwei Würfeln unterscheiden), d. h. also gerade soweit, als sie nicht frei, sondern gesetzlich gebunden sind.

2) Vgl. das in § 5 a, IIC im Anschluß an Dostojewskij erörterte Beispiel der »Parenthesen«-Reflexion. (S. 102 ff.)

stimmten Grundbegriff. Ihm hatten viele der vorangehenden Betrachtungen gegolten, die ja von einem Konflikt in der gegenwärtigen mathematischen (nicht philosophischen) Forschung ausgingen, obzwar es sich immerhin dabei um einen Streit um die Grundlegung der Mathematik als Wissenschaft handelte.

Aber, wollte man sich auf die eben gekennzeichnete Bedeutung der Worte »mathematische Existenz« beschränken, so käme man über ein Randproblem der Philosophie der Mathematik nicht hinaus. Das eigentlich philosophische Problem, das das Bestehen einer mathematischen Wissenschaft und das »Vorkommen« mathematischer Gegenstände in unserem Leben und seiner Welt stellt, kann sich nicht darauf beziehen, mit welchen technischen Mitteln man die »Existenz« mathematischer Entitäten in der Wissenschaft sichert. Mag auch klipp und klar entschieden sein, ob Konstruktion (und welche) oder Widerspruchsfreiheit die »mathematische Existenz« garantieren, welche Art des Unendlichen in der Mathematik zulässig sein soll usw., — philosophisch ist damit noch nichts von Belang geleistet. Und wenn man nicht der Meinung ist (— und wir sind es keineswegs!), daß die Philosophie als ancilla scientiarum, also in unserem Falle als Magd der Mathematik ihr Dasein fristen soll, für die sie »den Grund zu legen« habe¹, — so ist vor allem zu fragen, welches Problem sich denn nun eigentlich eine wirkliche Philosophie der Mathematik zu stellen habe.

Nach unserer grundsätzlichen Anschauung vom philosophischen Fragen (die hier nicht zu begründen ist) ist jede eigentlich philosophische Frage eine solche nach dem Sein: genauer dem Sinn des (jeweiligen in Rede stehenden) Seins und vielleicht auch nach seinem »Grunde« (dem »Seinsgrunde«). Eine solche Frage ist, mit anderen Worten, ontologisch.

Sofern nun »Existenz« ein Seinsausdruck ist², geht aber die Frage nach der »mathematischen Existenz« auf das Sein des Mathematischen, genauer auf die Wie seines Seins. Wir fragen also nach dem Wie des Seins des Mathematischen und damit philosophieren wir über das Mathematische.

1) Manche neukantischen Richtungen sind nicht fern von einer solchen Behauptung gewesen (f. o. S. 126 u. Math. Anh., Schlußbemerkung).

2) Um Mißverständnisse zu vermeiden, sei bemerkt, daß »Existenz« nicht etwa in dem besonderen Sinne gemeint ist, den ihm Heidegger in »Sein und Zeit« gibt. — »Existenz« heißt hier einfach »Seinsweise«.

Auch das Wort »ontologisch« ist zwar im Anschluß an Heidegger, aber doch in freierer Weise als bei ihm, nicht gemäß der in »Sein und Zeit« gebrauchten strengen Terminologie verwendet.

Um dieser Frage nunmehr näher zu kommen und auch um zu sehen, was die vorangehenden Betrachtungen für ihre »Lösung« nützen können, ist es zunächst notwendig zu wissen, was »das Mathematische« ist.

Eine solche Frage ist nur zu beantworten, wenn man auf die Geschichte der Philosophie zurückgeht und in echter, d. h. sachlicher Interpretation die Entwicklung verfolgt, die die Bedeutung des Ausdrucks durchlaufen hat. In diesem Sinne werden wir zunächst die geschichtlichen Wurzeln der Idee des Mathematischen in der antiken Philosophie zu ergründen versuchen und dann ihre Entwicklung in der neueren Zeit weiter verfolgen.

II. Historische Orientierung an der Antike.

A. Das Problem der *μάθησις* (Vorplatoniker [Archytas] und Plato).

Der Ausdruck »das Mathematische« ist mit Absicht doppeldeutig gewählt. Er kann, ebenso wie (noch deutlicher) das griechische Wort *μάθημα*, von dem er her stammt, bedeuten: *erstens* die Mathematik, *zweitens* die mathematischen Gegenstände als Thema der Mathematik.

Diese Doppeldeutigkeit ist nicht einfach eine lästige Äquivokation, sondern der Ausdruck für ein eigentümliches Moment am Seinscharakter des Mathematischen.

Μάθημα (die Worte auf *μα* stehen im Griechischen gewissermaßen zwischen Verb und Substantiv, vgl. S. 194, Anm. 1) heißt einerseits das, was gelernt (bzw. gelehrt) ist oder werden kann (der Gegenstand des Lernens), andererseits – ebenso wie unser deutsches Wort »die Lehre« – der Lebenszusammenhang, in dem man lernt (belehrt wird)¹; man denke an die Redewendungen: »er ging beim Meister in die Lehre« oder »das war mir eine bittere Lehre«. –

So hat es, bei seinem erstmaligen (wissenschaftlichen) Auftreten in einem wörtlichen Fragment des Archytas (Diels 35, B. 1) schon einen »mittleren« Sinn: »... καὶ περὶ γεμετρίας καὶ ἀριθμῶν καὶ σφαιρικῆς καὶ ... περὶ μουσικῆς. ταῦτα γὰρ τὰ μαθήματα δοκοῦντι ἡμεν ἀδελέα« zu deutsch: »denn diese »Lehren« scheinen uns *verschwiebert* zu sein«, – nämlich Astronomie, Geometrie, Arithmetik und Musik. Nach der beachtenswerten Untersuchung von B. Snell²

1) Im Griechischen ist die Sachlage von der Seite des Lernens (*μανθάνειν*), im Deutschen von der des Lehrens aus gesehen. (Ähnlich wie im Latein: »disciplina« = »Lehre« kommt von »discere« = »lernen«).

2) Bruno Snell, Die Ausdrücke für den Begriff des Wissens in der vorplatonischen Philosophie (Philologische Untersuchungen, herausgegeben von Kießling u. Wilamowitz, Heft 29, Berlin 1924); V. *μάθημα*, S. 72 ff.

hat μάθημα allerdings eine passive Bedeutung (Gegenstand des Lernens). Snell überseht auch in dem soeben genannten Fragment μαθήματα mit »Lehrgegenstände«. Wenn diese Interpretation auch offensichtlich einseitig ist, muß man doch andererseits Snell zugeben, daß die »passivische Bedeutung des Wortes« zu den Eigentümlichkeiten gehört, »die es dazu geeignet machten, eine ganz bestimmte Gruppe von Wissenschaften«, eben die mathematischen, »zu bezeichnen«. Snell sagt (l. c. S. 79): »Während alle bisher behandelten Begriffe vom Erkennen des sinnlich wahrnehmenden Subjekts ausgingen, ist durch μάθημα das Objekt als das Maßgebende gekennzeichnet. Das Wort μάθημα wies also auf eine Erkenntnis, die von der Zufälligkeit der Person und der Empirie abflieht, die vielmehr Gegenstände sieht, die mit völliger Sicherheit erkannt werden. Aber diese Gegenstände mußten »gelernt« werden können; ihre Erkenntnis mußte eindeutig und mitteilbar sein. Und dieser doppelten Forderung entspricht nur die Mathematik.«

Um dies besser zu verstehen, müssen wir wissen, welches die »anderen Weisen des Erkennens« sind, auf die Snell anspielt. Diese sind: 1. σοφία: das praktische Können (von σοφός, der Kundige); 2. γνώμη: das Erkennen durch das Auge; 3. σύνεσις: das Verstehen durch das Ohr (vor allem dessen, was jemand sagt); 4. ὁστρογία (von ὁστρον: der Augenzeuge): das Erfahren durch (das Verhör von) Augenzeugen.

Was ist nun für alle diese Weisen von Erkenntnis charakteristisch? Und wodurch unterscheiden sie sich alle vom μαρθάνειν?

Diese Erkenntnisweisen erwerben ihr Wissen alle selbst in der unmittelbaren Lebenserfahrung: durch tätigen Umgang mit den Dingen, durch Erblicken, durch Hinhören, durch eigenes Nachfragen bei Augenzeugen. Diese selbsterwerbende Erfahrung ruht ganz in der Faktizität des eigenen Daseins. (Das ist gemeint mit dem sehr unzulänglichen Ausdrucke Snells: »Zufälligkeit der Person und der Empirie«). Dagegen kann man ohne eigene Erfahrung auch von anderen etwas »lernen«, was der andere vielleicht in seiner Lebenserfahrung selbst erworben — der Meister des Handwerks zeigt dem Lehrling den und jenen praktischen Griff und Kniff — oder seinerseits von einem Dritten gelernt hat. — Aber kann man in der eigenen Lebenserfahrung Erworbenes schrankenlos auf andere übertragen? Kann man nicht das Beste nur »vormachen«, so daß es der andere dann, wenn's ihm »glückt«, »nachmachen« kann? Kann jener es nicht höchstens nur »ablernen«, — aber doch nicht eigentlich, als einen bestimmten »Gegenstand des Wissens«, lernen?

Der »Ablernende« muß sich mit seiner Faktizität der des Lehrers angleichen, er muß es »so machen wie er« und letztlich also auch selbst erfahren, in ähnlicher konkreter Lebenssituation, im faktischen Umgang mit den Dingen. Zu dieser Selbsttätigkeit allein leitet ihn der Lehrer an. — Der eigentlich oder »bloß« Lernende aber soll dies nicht brauchen. Ihm wird das Wissen gegeben, er braucht es nicht selbst zu erwerben; er braucht nicht irgendwie Hand anlegen, er läßt es sich vorführen, vorlegen.

Kann man aber auf diesem Wege überhaupt zu echtem Wissen gelangen? Ist dieses Lernen nicht ein bloßes uneinsichtiges Übernehmen von der Autorität des Lehrers, also ein »Sich-Einlernen«, das zu keiner eigenen Überzeugung führen kann?¹

In der Tat liegt eine Schwierigkeit im Begriffe des eigentlichen Lernens, das weder »Ablernen« noch »Sich-Einlernen« sein soll. Das, was in diesem strengen Sinn eigentlich erlernbar sein soll, muß in sich selbst einen ganz besonderen Sinncharakter haben. Es muß von der spezifischen Verschiedenheit der individuellen Lebenserfahrung unabhängig sein und es muß andererseits auch trotzdem der eigenen Einsicht zugänglich sein.

Dies ist nun in der Tat das Eigentümliche mathematischer Zusammenhänge, daß »ihr Gehalt offen zutage liegt«. (Aristoteles: τῶν δὲ (sc. μαθηματικῶν) τὸ τί ἐστὶν οὐκ ἄδηλον.)² Sie haben also einen eigentümlichen Sachgehalt, der in sich sinnvoll ist, ohne Rücksicht auf den Erfahrungszusammenhang, in dem er auftritt. Daher ist es in gewissem Sinn wirklich richtig, das Eigentümliche der mathematischen Erkenntnis vom »Objekt« her zu bestimmen.³

Auf der anderen Seite ist ein solcher erfahrungsunabhängiger Sinngehalt etwas sehr Rätselhaftes. Denn die Dinge der Umwelt sind doch nur im Zusammenhang der Lebenserfahrung. Sie sind

1) Es wird hier abgesehen von der Erwerbung von Wissen aus autoritativer Tradition, z. B. in religiösen Angelegenheiten, in der Sitte und im Recht. Dies möchten wir nicht als »Lernen« bezeichnen.

2) An der schon früher (S. 190, Anm. 2) zitierten Stelle Eth. Nic. VI, 9 (1142a 20). Der Kontrast dazu ist die Erkenntnis der wirklichen Natur, deren Ursprung in der Erfahrung liegt; davon können sich die jungen Menschen nicht selbst überzeugen, sondern sie reden bloß (ohne Einsicht) darüber. (τῶν δ' αἱ ἀρχαὶ ἐξ ἐμπειρίας· καὶ τὰ μὲν οὐ πιστεύουσιν οἱ νέοι, ἀλλὰ λέγουσιν, l. c. 19–20).

3) Snell erwähnt noch (l. c. S. 79 Anm. 5) die in der Tat merkwürdige Tatsache, daß die passive Verwendung von γινώσκω außer bei den mathematisch gerichteten »Pythagoreern« sehr selten ist. (Allerdings ist die Echtheit der Philolaos-Fragmente von E. Frank bestritten worden.) Das Mathematische »wird« in der Tat »eingesehen«; von wem, ist belanglos!

gar nicht ursprünglich »Dinge für sich selbst«, sondern Gebrauchsgegenstände, Werkzeuge, Nahrungsmittel, Waffen, freundliche und feindliche Naturgewalten, Rohstoffe u. dgl.¹

B. Das Apriori und die Anamnesis (der junge Plato).

Diese Rätselhaftigkeit ist früh empfunden worden: Plato hat sie als erster aufgedeckt und gedeutet, durch seine Lehre von der Wiedererinnerung (*ἀνάμνησις*) an die vorweltliche Schau der ewigen Ideen. Im Meno (80A–86C) handelt es sich um die Möglichkeit des Suchens (Forschens, *ζητεῖν*) und zugleich auch des *μανθάνειν*. Das sophistische Dilemma über das Suchen lautete so: Weder nach dem, was der Mensch weiß, wird er forschen, denn er weiß es ja schon, ... noch nach dem, was er nicht weiß, denn er weiß ja gar nicht, wonach er forschen soll. (*οὔτε γὰρ ἄν γε δ οἶδε ζητοῖ· οἶδε γὰρ οὔτε δ μὴ οἶδεν οὐδὲ γὰρ οἶδεν ὅ τι ζητήσει.*)² Man kann das Rätsel des Lernens (was Plato nicht tut) ebenfalls auf die Form eines derartigen Dilemma bringen: Wenn jemand die *μαθήματα* schon kennt, braucht er sie nicht zu lernen, wenn er sie aber noch nicht kennt, so kann er sie gar nicht lernen, denn sie sollen ja nicht in der Lebenserfahrung ihm begegnen, – wie soll er also auf sie stoßen? Er soll ja die *μαθήματα* nicht durch eigenen selbsttätigen Umgang mit den Dingen erwerben! – Oder anders ausgedrückt: Wie ist es möglich, daß einer, ohne eigene Erfahrung, die erst das alternde Leben sich erwirbt (*πληθὺς γὰρ χρόνον ποιεῖ τὴν ἐμπειρίαν* Aristot., l. c., 1142a 15–16), zu seiner eigenen Überzeugung belehrt werde?

Zur Beantwortung dieser Fragen stellt Plato die These auf: *τὸ γὰρ ζητεῖν ἄρα καὶ τὸ μανθάνειν ἀνάμνησις ὅλον ἐστίν*³ (»denn das

1) Die phänomenologische Analyse der »Umweltlichkeit« ist von M. Heidegger in die Wissenschaft eingeführt worden, s. jetzt »Sein und Zeit« § 15ff. –

Heidegger hat auch gelegentlich (in Marburger Vorlesungen W.-S. 1923/24) die verschiedenen griechischen Ausdrücke für »Gegenstände« wie folgt zusammengestellt: 1. *τὰ πράγματα* das, womit ich es zu tun habe (»Tatsachen«); 2. *τὰ χρήματα* Dinge, sofern sie im Gebrauch sind; 3. *τὰ ποιούμενα* das künstlich (*τέχνη*) Hergestellte; 4. *τὰ φυσικά* das, was von sich selbst aus wächst; 5. *τὰ μαθήματα* das Lehrbare (worüber es ein eigentliches Wissen gibt, das jedem beigebracht werden kann).

Auch in dieser vergleichenden Zusammenstellung hebt sich das *μάθημα* ab, durch seine formale Charakteristik. Ebenso formal charakterisiert müßte man (1)–(4) »das in der Lebenserfahrung (im Umgang) Begegnende« nennen.

2) Meno 80 D. 3) Meno 81 C D.

Suchen und das Lernen ist ganz und gar Wiedererinnerung¹). Weil die Seele in einem früheren Leben (Leben und Tod werden als miteinander abwechselnde periodische Zustände gedacht) Alles [kennen] »gelernt« hat (οὐκ ἔστιν ὃ τι οὐ μεμάθηκεν)¹, ist sie imstande durch Erinnerung »Alles« wieder aufzufinden. Das ist dann das, was die Menschen »Lernen« nennen (ὃ δὲ μάθησιν καλοῦσιν ἄνθρωποι)¹. Das primäre *μανθάνειν* der Seele im früheren Leben ist eine ursprüngliche Erwerbung, also kein *μανθάνειν* in dem hier problematischen Sinn. Dieses Urphänomen verbirgt das Dunkel des Mythos. Aber das »sekundäre«, d. i. das eigentlich problematische »Lernen« erklärt sich dadurch, daß wir uns bei ihm nur an etwas erinnern, was wir im Grunde schon von früher her wissen, ohne daß wir uns selbst darüber im klaren sind. »Τῷ οὐκ εἰδότει ἄρα περὶ ὧν ἂν μὴ εἰδῇ ἐνεῖ-σιν ἀληθεῖς δόξαι«. (»Dem Nichtwissenden wohnen also wahre Meinungen inne über das, was er nicht weiß«). »Οὐκοῦν οὐδενὸς διδάξαντος ἀλλ' ἐρωτήσαντος ἐπιστήσεται, ἀναλαβὼν αὐτὸς ἐξ αὐτοῦ τὴν ἐπιστήμην; — ναί«². (»Wird er nicht, ohne daß ihn jemand belehrt, nur dadurch, daß ihn jemand ausfragt, zum Wissen kommen, indem er selber aus sich selbst heraus das Wissen heraufholt?« — »Ja«). — So ist es nach Plato bei allem geometrischen und überhaupt »mathematischen« Wissen (ποιήσει περὶ πάσης γεωμετρίας ταῦτα ταῦτα καὶ τῶν ἄλλων μαθημάτων ἀπ' αὐτοῦ)³.

Damit hat Plato den »apriorischen« Charakter alles »mathematischen«, eigentlich erlernbaren Wissens entdeckt. Es ist in der Tat im wörtlichsten Sinne Wissen vor der Erfahrung dieses unseres Lebens.

Das mathematische Wissen ist also einerseits Wissen »von der Sache allein her«, unabhängig von persönlicher faktischer Erfahrung. Andererseits gerade deswegen nicht von außen kommend, uns im Leben im Sinn von »Erfahrung« belegend, sondern unbekannt in uns beschlossen, seit mythischer Vorzeit. Nur der Anstoß zu seinem Wiederbewußtwerden kann aus der Erfahrung kommen⁴, durch Fragen kann auf es aufmerksam gemacht werden, gelehrt werden kann es nicht. Das Rätsel von Lehren und Lernen wird also

1) Meno 81 C D.

2) Meno 85 C.

3) Meno 85 D.

4) Vgl. Kants bekanntes Wort: »Wenn aber gleich alle unsere Erkenntnis mit der Erfahrung anhebt, so entspringt sie darum doch nicht eben alle aus der Erfahrung.« (Kritik der reinen Vernunft; Einleitung, 2. Aufl., S. 1.)

dadurch »gelöst«, daß die Möglichkeit eigentlichen Lehrens und Lernens (im naiven Sinn) geleugnet wird¹.

Damit gewinnen aber die μαθήματα und die μάθησις eine ganz ausgezeichnete Stellung: jene stammen aus der mythischen Vorzeit, und diese hat gewissermaßen die magische Kraft, die Schatten des in jener Vorzeit Lebenden wieder herauf zu beschwören. Daher die Erhabenheit der Mathematik in der Meinung der Akademie und daher jener merkwürdige Spruch über ihrer Pforte: μηδεις ἀγεωμέτρητος εἰσίτω!²

Der Skeptiker von heute wird freilich sagen, es handele sich eben um einen jener bekannten platonischen Mythen und man dürfe die Sache nicht wörtlich nehmen. Ernsthaft habe nicht einmal Plato selbst an die Wirklichkeit des früheren Seelenlebens und an die »Erinnerung« daran geglaubt. Und sachlich sei die schöne Sage natürlich völlig indiskutierbar. Man habe in der ἀνάμνησις eben den noch stammelnden, halbmythischen Ausdruck für das allerdings für das philosophische Verständnis des Mathematischen grundlegende Phänomen der »reinen Anschauung a priori« im Sinne Kants.

Wir sind anderer Meinung. Wir wagen zu fragen: Sollte vielleicht der platonische Terminus ἀνάμνησις, philosophisch d. h. ontologisch betrachtet, tiefer und eigentlicher das Wesen mathematischer Erkenntnis treffen als die Kantische Bezeichnung »reine Anschauung – a priori«? Oder noch schärfer gefragt: Was heißt a priori? Was kann es anderes heißen als »von dem Früheren her«, d. h. »aus dem früheren Leben her«?

In welchem Sinn ist das aber zu verstehen? Das frühere Leben ist die »Vor-Zeit«, das prähistorische Dasein; dieses ist wahrhaft vor der ἱστορία, d. h. der leibhaften Erfahrung³. Es ist bei

1) Das vorhin aufgestellte Dilemma löst sich genauer so: In gewissem Sinne kennt man schon die μαθήματα, in anderem nicht. Man kann sie »lernen«, weil man sie innerlich schon im Besitz hat, man hat es aber auch nötig, sie zu lernen, denn dieser innere Besitz ist nicht »bewußt«; das bewußte (historische) Leben muß ihn sich erst aneignen. Dies ist aber nicht »Lernen« im Sinne der Übernahme einer fremden »Lehre«.

2) Es kann den symbolischen Wert dieses Spruches nicht antasten, daß die historische Tatsächlichkeit jener Inschrift zweifelhaft ist.

Nach H. Hankel (zur Geschichte d. Math. im Altert. u. Ma. S. 129) soll das Wort in der Form: »μηδεις ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μοῦ τὴν στέγην« bei der Eröffnung der Vorträge Platos in der Akademie (389) gesprochen worden sein. Die (erst byzantinische) Quelle ist Tzetzes, Chil. VIII, 972.

3) Ich nehme hier ἱστορία, ἱστορεῖν also in der Bedeutung »durch (eigene) Augenzeugenschaft erfahren«; obwohl neuerdings Snell (l. c. S. 59ff.) es wahrscheinlich gemacht hat, daß ἱστορεῖν ursprünglich »durch das Verhör

jedem Einzelnen seine eigene frühe Kindheit, bei jedem Volke seine vorgeschichtliche Epoche, bei der Menschheit überhaupt das »Frühmenschliche«, das primitive Seelenleben. Es ist nicht im groben Sinne »vergangen«, es lebt noch in uns, obzwar verborgen: als das sogenannt »Unbewußte« oder »Unterbewußte«, wie wir fagen wollen: als das Subhistorische.

Platos These von der ἀνάμνησις ist also zu interpretieren als die Behauptung des prähistorischen bzw. subhistorischen Ursprungs mathematischer Erkenntnis¹. Es ist gewiß nicht nachweisbar, daß Plato dies mit voller Klarheit gewußt hat. Schon deshalb nicht, weil ihm der explizite Begriff des Historischen fehlt², wie eigentlich der gesamten Antike. Aber er hat intuitiv die Spannung zwischen Historischem und Nicht-historischem erkannt und die Ableitigkeit und Ausgefondertheit des Mathematischen von allem übrigen Wissen empfunden³ und sie tiefinnig gedeutet als Zugehörigkeit zu jenem vorzeitlichen Bereich. Diese

von (anderen) Augenzeugen erfahren« bedeutet. Immerhin heißt auch nach Snell ἵστωρ (»Augenzeuge«, aber auch »Schiedsrichter«!) wörtlich: »der, der gesehen hat« und ἱστορέω = ἵστωρ εἰμι »ich bin der, der gesehen hat«. Es ist also wohl auch jetzt noch gestattet, ἱστορεῖν als »leibhaft erfahren« zu interpretieren und das Wort »historisch« in diesem Sinne terminologisch zu verwenden.

1) Es sei bemerkt, daß auch sonst Plato für das Prä- und Subhistorische öfters das feinste Verständnis zeigt. Hingewiesen sei nur auf die wunderbar hellfichtigen Bemerkungen über den Sinn des Traumes (Staat, Buch IX, 571 CD, 572 B), die geradezu wesentliche Teile der heutigen Psychoanalyse vorwegnehmen. — [In fachlicher Hinsicht vgl. o. S. 223 ff.]

2) Implizite existiert die Unterscheidung des Historischen vom Nicht-historischen (Naturhaften) bei Plato sehr wohl.

Zu nennen sind vor allem die verschiedenen Seelenmythen (Phaidros, Staat: Buch X, Symposion), die Erschaffung der Zeit im Timaios (37 CD), die Atlantisfrage usw.

Wesentlich sind vor allem die Zeitvorstellungen, das Verhältnis von zyklischer und einmaliger Zeitlichkeit u. ä. — Nach neueren Forschungen liegen (vielleicht!) altiranische Vorstellungen (die möglicherweise durch Eudoxos' Orientreisen der Akademie vermittelt wurden) zugrunde. (Vgl. W. Jäger, Aristoteles (Berlin 1923), Seite 133 ff.)

Für die altiranischen Zeitvorstellungen vgl. Heinrich Junker, Über iranische Quellen der hellenistischen Eion-Vorstellung, Vorträge der Bibliothek Warburg 1921/22 (Leipzig und Berlin 1923). Ferner: R. Reitzenstein, das iranische Erlösungsmythos (Bonn 1921). — Für das primitive Zeitbewußtsein: Cassirer, Philosophie der symbolischen Formen II. Teil: das mythische Denken (Berlin 1925) S. 132 ff. (Die Darstellung C.s enthält wichtiges Material, das aber noch nicht weit genug interpretiert ist. Hier liegt noch eine schwierige ungelöste Aufgabe vor.)

kühnen Ahnungen Platos können uns aber heute noch zum Leitfaden dienen und den Frageanlaß nach dem Seinsinn des Mathematischen wenigstens andeutungsweise geben.

C. Die Abstraktion (*ἀφαιρέσις*) als das Kennzeichen des Mathematischen.
(Aristoteles.)

Es kreuzt sich allerdings schon in der Antike noch ein ganz anderer Gedankengang mit dem platonischen, der ebenfalls unsere ernste Beachtung verdient. Er rührt von Aristoteles her und wurde teilweise schon früher (§ 6a) betrachtet. Es handelt sich um die Kennzeichnung des Mathematischen als des Abstrakten, als das was »δι' ἀφαιρέσεως ἐστίν«¹. Diese Kennzeichnung stempelt das Mathematische zu einem Moment am Sein, es nimmt ihm das selbstständige Sein, drückt es unter das volle Sein herab. Genauer gesagt: das Mathematische existiert eigentlich nur als Korrelat einer bestimmten »aphairetischen« Weise der Betrachtung. Diese betrachtet gewisse an und für sich nicht »getrennte« Seiten des sinnlich vernehmbaren Dinges als getrennte (*τὰ μαθηματικά οὐ κεχωρισμένα ὡς κεχωρισμένα νοεῖ*)². Damit betrachtet aber der Mathematiker die Eigentümlichkeiten des Naturdinges nicht als solche, in ihrem eigentlichen Wesen, sondern »als nicht-solche«, also uneigentlich. Es ist zum genauen sachlichen Verständnis erforderlich, auf die Texte im einzelnen einzugehen. *ὁ φυσικός περὶ ἅπανθ' ὅσα τοῦ τοιοῦδ' σώματος*

1) Eth. Nic. VI, 9 (1142a 18) [f. S. 190, Anm. 2].

2) Die Stelle (de anima III, 7; 431 b 12–16) lautet im Zusammenhang: *τὰ δὲ ἐν ἀφαιρέσει λεγόμενα νοεῖ [sc. τὸ νοητικόν] ὥσπερ ἂν εἰ τὸ σιμόν, ἢ μὲν σιμόν, οὐ κεχωρισμένως, ἢ δὲ κοῖλον, εἴ τις ἐνόει ἐνεργείᾳ, ἄνευ τῆς σαρκὸς ἂν ἐνόει ἐν ἢ τὸ κοῖλον· οὕτω τὰ μαθηματικά οὐ κεχωρισμένα ὡς κεχωρισμένα νοεῖ, ὅταν νοῇ ἐκεῖνα.* (Nach der Akad. Ausg. [Bekker] und auch nach Biehl-Apelt.)

Nach Bywater soll die Stelle (leichter verständlich) so heißen: *τὰ δ' ἐν ἀφαιρέσει λεγόμενα νοεῖ, ὥσπερ ἂν εἴ τις τὸ σιμόν ἢ μὲν σιμόν οὐ, ἢ δὲ κοῖλον ἐνόει, ἐνεργείᾳ νοῶν ἄνευ τῆς σαρκὸς ἂν ἐνόει ἐν ἢ τὸ κοῖλον, οὕτω τὰ μαθηματικά . . .*

Der Sinn ist: An sich verhält es sich mit den räumlichen und Zahl-Eigenschaften wie mit der Hohltauglichkeit (entsprechend im Deutschen wäre das Schielen oder die Scheelheit). Diese kommt ihrem eigenen Sinngehalt nach nur der Nase (bzw. dem Auge) oder stofflich dem Fleische zu; so auch die räumlichen oder Mengencharaktere konkreten Sinnendingen. Aber der Mathematiker betrachtet diese Charaktere so, wie wenn man das Hohltaugige (bzw. das Scheele) als das Gebogene oder Hohle (bzw. das Schiefe) betrachtet, d. h. ohne das Fleisch, in dem doch das Hohltaugige (bzw. Scheele) notwendig seinem Wesen nach ist. So betrachtet der Mathematiker das wesenhaft nicht Getrennte doch als ein Getrenntes.

Daraus folgt aber, daß das Mathematische nur als Korrelat dieser »abstrahierenden« Betrachtungsweise sein Sein hat.

καὶ τῆς τοιαύτης ἑλῆς ἔργα καὶ πάθη· ὅσα δὲ μὴ ἦ τοιαῦτα, ἄλλος (καὶ περὶ τινῶν μὲν τεχνίτης, ἐὰν τύχη, οἷον τέκτων ἢ λατρός), τῶν δὲ μὴ χωριστῶν μὲν, ἢ δὲ μὴ τοιούτου σώματος πάθη καὶ ἐξ ἀφαιρέσεως, ὁ μαθηματικός, ἢ δὲ κεχωρισμένα ὁ πρῶτος φιλόσοφος. (de anim. I, 1; 403b, 11–16.) (»Der Naturforscher betrachtet alles, was zu einem solchen Körper hier gehört und die Leistungen und Zustände eines solchen Stoffes. Was aber »nicht als solches«¹ angesehen wird, das untersucht ein anderer [so, wenn sich trifft, der Mann der Praxis, wie der Zimmermann oder der Arzt], das aber, was nicht (an sich) abgetrennt ist, betrachtet – aber insofern es nicht Zuständlichkeit eines solchen Körpers ist und sofern es aus der Abstraktion stammt – der Mathematiker; sofern es aber (an sich) Abgetrenntes ist, der erste Philosoph«.) Befremdend ist auf den ersten Blick vielleicht der Vergleich des Mathematikers mit dem τεχνίτης, dem Handwerker und Arzt. Aber dieser Vergleich führt gerade die Abhängigkeit des Mathematischen von der Weise der Intention, in der es erfaßt wird, deutlich vor Augen. Der Zimmermann nimmt den Stamm, der an sich selbst die Leiche eines pflanzlichen Organismus ist, als Baumaterial, der Arzt den Saft einer Pflanze oder ein Salz etwa als Arznei oder als Gift. Beide haben die Dinge unter einem bestimmten Aspekt. Ähnlich der Mathematiker, der etwa die steinerne Säule als Zylinder nimmt, den Ball als Kugel, die Kante des Steines oder den Lichtstrahl als Gerade². Allerdings ist diese Weise des Habens von Gegenständen immer noch wesentlich auf sie bezogen und »trifft« nicht einfach »auf sie zu« (συμβαίνει, wovon κατὰ συμβεβηκός)³.

Das geht am klarsten daraus hervor, daß die mathematischen Wissenschaften eine ganz bestimmte Beziehung zu den Wirklichkeits-

1) Der Text ist hier leider unsicher: 403b 12 haben die meisten Handschriften ὅσα δὲ μὴ ἦ τοιαῦτα Cod E hat ἦν; das hieße: »Was aber nicht so beschaffen ist« bzw. »war«. Simplicius zitiert aber die Stelle mit ἦ (dies übernimmt Biehl-Apelt nach dem Vorgang von Bonitz); danach haben wir übersetzt, denn nur so erhält die Stelle die volle Schärfe des Ausdrucks. Gerade die eigentümliche Wendung »μὴ ἦ τοιαῦτα« »nicht als solches« ginge sonst verloren zugunsten eines gänzlich trivialen Satzes.

2) Vgl. Physik II, 2 (der ganze erste Teil des Kapitels ist in Betracht zu ziehen bis 194 a 12). — 194 a 9 ff.: ἀλλ' ἡ μὲν γεωμετρία περὶ γραμμῆς φυσικῆς σκοπεῖ, ἀλλ' οὐχ ἡ φυσικῆ, ἡ δ' ὀπτική μαθηματικὴν μὲν γραμμὴν, ἀλλ' οὐχ ἡ μαθηματικὴ ἀλλ' ἡ φυσικῆ.

3) Die Weise, wie Aristoteles die Dinge der »Umwelt« sieht, ist der der hermeneutischen Phänomenologie (Heidegger) in gewissem Sinne entgegengesetzt. Ihre Bedeutsamkeit ist κατὰ συμβεβηκός, sofern sie nicht mit πράξις und ποίησις zusammenhängt. S. Metaph. E 2; 1026b, 2–10.

wissenschaften haben; »so daß die eine »unter« der anderen ist, indem es Sache der beobachtenden Disziplin ist, das »daß« (die bloße Tatsache), der mathematischen, das »warum« zu erkennen.« [*ὥστ' εἶναι θάτερον ὑπὸ θάτερον* (78b 36). *τὸ μὲν ὅτι τῶν αἰσθητικῶν εἰδέναι, τὸ δὲ διότι τῶν μαθηματικῶν* (79a, 2 – 3)]¹.

Jene angewandten Wissenschaften verhalten sich so, daß sie, obwohl sie ihrem Seinsinn nach anders sind, doch die (mathematischen) Formen gebrauchen. Die Mathematik handelt nämlich von den Formen, und sie ist nicht »gemäß einem zugrunde liegenden Substrat«. »Denn wenn auch die Geometrie irgendwie ein solches haben sollte, so ist sie doch als solche nicht von ihm abhängig.« (*ἔστι δὲ ταῦτα, ὅσα ἑτερόν τι ὄντα τὴν οὐσίαν, κέχρηται τοῖς εἶδεσιν. τὰ γὰρ μαθήματα περὶ εἶδη ἐστίν. οὐ γὰρ καθ' ὑποκειμένου τινός. εἰ γὰρ καὶ καθ' ὑποκειμένου τινός τὰ γεωμετρικά ἐστιν, ἀλλ' οὐχ ἢ γε καθ' ὑποκειμένου* [79a, 6 – 10].)

Diese Stelle zeigt nun zugleich noch eine andere Gedankenwendung, die die Abstraktionstheorie des Mathematischen etwas mildert. Sie befragt nämlich, daß die *εἶδη*, auf die sich das Mathematische bezieht, doch nicht schlechthin ein Moment am wirklichen Körper sind, sondern dem Seinsinn nach anders als der Körper. Die »rein mathematischen« Disziplinen (wie wir heute sagen) hängen nicht ab von dem materiellen Substrat, an dem sie im Leben als konkretes Wissen erworben werden. Das dies so gemeint ist, geht aus einer anderen Stelle der ersten Analytik (I, 41) hervor. Es wird dort gesagt, die Gültigkeit der formal-logischen Sätze sei nicht abhängig von der *ἐκθεσις* (expositio) der termini, die in dem Schlusse illustrativ figurieren. Denn wir brauchen nicht zum Beweise, daß diese als Illustration dienenden Verhältnisse wirklich so sind, sondern es ist so »wie der Geometer zwar sagt, diese Linie sei gerade und einen Fuß lang und ohne Breite, während sie es doch nicht (genau) ist, aber diesen Umstand nicht so benutzt, daß er daraus argumentiert« (sondern eben nur als Erläuterung)². Und weiterhin heißt es ein andermal noch deutlicher: »Der Geometer macht keine falschen Voraussetzungen, wie man ihn beschuldigt hat, wenn er von einer fußlangen Geraden spricht, wo doch die von ihm gezeichnete Linie weder gerade noch genau ein Fuß lang ist. Denn er zieht keinen Schluß

1) Vgl. die ganze Stelle: *Analyt. post. I, 13* (78b, 39 – 79a, 10).

2) *οὐ δεῖ δ' οἷσθαι παρὰ τὸ ἐκτίθεσθαι τι συμβαίνειν ἄτοπον· οὐδὲν γὰρ προσχρώμεθα τῷ τόδε τι εἶναι, ἀλλ' ὥσπερ ὁ γεωμέτρης τὴν ποδιαίαν καὶ εὐθείαν τήνδε καὶ ἀπλατῇ εἶναι λέγει οὐκ οὐσαν, ἀλλ' οὐχ οὕτως χρῆται ὥς ἐκ τούτων συλλογισμός.* (49b, 33 – 37).

daraus, daß gerade diese gezeichnete Linie die ist, die er angeführt hat, sondern aus nur dem, was die Zeichnung sichtbar werden läßt¹.

Aristoteles ist sich also durchaus darüber im klaren, daß die Mathematik auch von der Ungenauigkeit und den Störungen, die den materiellen Dingen anhaften, sich frei machen muß. Die mathematische ἀφαίρεσις ist also nicht nur eine abstraktive Heraushebung gewisser gestaltlicher (und allgemein »formaler«) Momente am materiellen Seienden, sondern zugleich auch das, was wir heute »Idealisierung« nennen. Weder die irdischen Gegenstände zeigen genaue Kreise und Gerade, noch selbst die Bewegungen der Gestirne am Himmel sind von vollendeter Regelmäßigkeit und auch schon die Sterne selbst sind nicht etwa mathematische Punkte².

Aber er hat doch eben die abstraktive Heraushebung und die »Idealisierung« zusammen unter dem Terminus ἀφαίρεσις begriffen, er sieht auch in der Idealisierung nichts als eine Fortsetzung der Abstraktion, — wie wir ja auch heute noch zu sagen pflegen, man müsse in der Geometrie nicht nur von dem Körperlichen und von der Farbigkeit der gezeichneten Figuren, sondern auch von ihrer Ungenauigkeit »abstrahieren«.

Infolgedessen bekämpft er die Lehre Platons von der Zwischenstellung der mathematischen Gegenstände zwischen Idee und Sinnending, wie sie von ihm in der schon früher (S. 198, Anm. 1) zitierten bekannten Stelle aus dem ersten Buch der Metaphysik³ kurz dargestellt wird.

Wir können hier diese Polemik nicht im einzelnen verfolgen, die im Laufe der Geschichte sich nicht als erfolgreich erwiesen hat: die Akademie bis zum Neuplatonismus (Proklos) hat die griechische Philosophie der Mathematik geschaffen. Aber wir müssen doch auf die Hauptunterschiede der platonischen und der aristotelischen Lehre eingehen.

D. Axiomatischer Elementaraufbau (στοιχειώσις). (Der spätere Plato.)

Die mathematischen Gegenstände (τὰ μαθηματικά τῶν πραγμάτων) bilden also nach Plato eine dritte Art von Wahrheiten neben den

1) *Analyt. post.* I, 10 (76 b 39 — 77 a 3): οὐδ' ὁ γεωμέτρης ψευδὴ ὑποτίθεται, ὥσπερ τινὲς ἔφασαν, λέγοντες ὡς οὐ δεῖ τῷ ψεύδει χρῆσθαι, τὸν δὲ γεωμέτρην ψεύδεσθαι λέγοντα ποδιαίαν τὴν οὐ ποδιαίαν ἢ εὐθεῖαν τὴν γεγραμμένην οὐκ εὐθεῖαν οὖσαν. ὁ δὲ γεωμέτρης οὐδὲν συμπεραίνεται τῷ τήνδε εἶναι γραμμὴν ἢν αὐτὸς ἐφθγγεται, ἀλλὰ τὰ διὰ τούτων δηλούμενα.

2) Vgl. *Metaph.* B 2, 997 b 32 — 998 a 6.

3) Für weiteres Material sowohl über Platons Lehre wie über Aristoteles' Polemik s. L. Robin, *la théorie platonicienne des idées et des nombres d'après Aristote.* (Paris 1908), §§ 99–126 (S. 199 ff.).

Sinnendingen und den Ideen, und zwar zwischen (*μεταξύ*) diesen. Sie unterscheiden sich von den sinnlichen Dingen (wie schon früher erwähnt) dadurch, daß sie ewig und unveränderlich sind; von den Ideen dadurch, daß sie in mehreren Exemplaren existieren, während jede Idee nur einmal da sein kann. (*διαφέροντα τῶν μὲν αἰσθητῶν τῷ αἰδία καὶ ἀκίνητα εἶναι, τῶν δ' εἰδῶν τῷ τὰ μὲν πολλὰ ἅντα ὁμοῖα εἶναι τὸ δ' εἶδος αὐτὸ ἐν ἑκάστων μόνον.* Aristot. *Metaph. A*, 6, 987 b, 16–18.)

Sie sind also damit auf dem Wege zum *ὄντως ὄν*, diesem verwandter als die Sinnendinge: vgl. Timäus 52 A: *τρίτον* (neben *εἶδος* und *αἰσθητόν*) *δὲ αὖ γένος ὃν τὸ τῆς χώρας αἰεί, φθορὰν οὐ προσδεχόμενον, ἔδραν δὲ παρέχον ὅσα ἔχει γένεσιν πάσιν . . .* (Die dritte Art des Seienden ist das Seiende des Raumes, ewig, der Vernichtung nicht unterworfen, allem Werdenden Platz gewährend.) – Wesentlich ist, daß dieses mittlere Seinsgebiet dem Werden und Vergehen entzückt ist. Es kommt ihm, wie wir heute sagen werden, ein anderer Zeitcharakter zu als der Welt des Werdens¹.

Nun bleibt aber zum mindesten der spätere Plato keineswegs bei dieser »ontologischen Hypostasierung« eines dritten Seinsreiches stehen, sondern gerade dieses Mittlere (*μέσα*) ist, wie die grundlegende Erörterung im *Philebos* (160 ff.) zeigt², das methodische Mittel, den Sinn des Mathematischen, nämlich seine Fähigkeit zur »Beherrschung« des *ἄπειρον* zur Geltung zu bringen. Das große Problem des Einen und Vielen, der Grenze und des Grenzenlosen (*ἄπειρον*) kann nur gelöst werden dadurch, daß man die gesamte Zahl der Vielheit überflieht, die zwischen dem Unbegrenzten und dem Einen liegt. (*πρὶν ἂν τις τὸν ἀριθμὸν αὐτοῦ πάντα κατίδῃ τὸν μεταξὺ τοῦ ἀπείρου τε καὶ τοῦ ἑνός.*) Der Unterschied zwischen der Dialektik und Eristik besteht gerade darin, daß jener »die Mittelglieder entgehen« (*τὰ δὲ μέσα αὐτοῖς* [sc. den Eristikern] *ἐκφεύγει*), weil sie unmittelbar nach dem Einen das Unbegrenzte setzen (*μετὰ δὲ τὸ ἐν*

1) Aristoteles betont demgegenüber (*Metaph. E* 1; 1026 a 7 ff.): *ἀλλ' ἔστι καὶ ἡ μαθηματικὴ θεωρητικὴ· ἀλλ' εἰ ἀκινήτων καὶ χωριστῶν ἐστὶ, νῦν ἔδηλον· ὅτι μέντοι ἔνια μαθήματα ἢ ἀκίνητα καὶ ἢ χωριστὰ θεωρεῖ (!), δῆλον.* (1026 a 7–10). – *ἡ μὲν γὰρ φυσικὴ περὶ χωριστὰ μὲν ἀλλ' οὐκ ἀκίνητα, τῆς δὲ μαθηματικῆς ἔνια περὶ ἀκίνητα μὲν οὐ χωριστὰ δ' ἴσως, ἀλλ' ὥς ἐν ὕλῃ· ἡ δὲ πρώτη* (sc. φιλοσοφία) *καὶ περὶ χωριστὰ καὶ ἀκίνητα* (1026 a 13–16). In gewissem Sinne steht also auch bei Aristoteles die Mathematik zwischen »Physik« und »erster Philosophie«. Aber diese Eigentümlichkeit der Mathematik kommt durch die Weise ihrer Betrachtung (*ἢ . . . θεωρεῖ*) zustande, nicht durch die Seinsart ihrer Gegenstände, die gar nicht selbständig vorhanden (*χωριστὰ*) sind.

2) Es sei auf die sehr wertvolle Interpretation Stenzels zu dieser Stelle (»Zahl u. Gestalt bei Plato und Aristoteles« S. 12 ff.) hingewiesen.

ἄπειρα εὐθύς. — Phil. 16 E). Was damit in concreto gemeint ist, hat dann bekanntlich Plato an zwei berühmten Beispielen auseinandergelegt: der Bestimmung der musikalischen Intervalle durch Zahlen (Phil. 17 D) und der Zerlegung des Lautbestandes der Rede in Buchstaben (Phil. 18 C). Das erste ist ein wirklich mathematisches Beispiel, das zweite ein viel allgemeineres und prinzipielles, das seine Tragweite aber gerade deshalb auch auf das Mathematische zurückerstreckt. Für die Interpretation im einzelnen verweisen wir auf Stenzel¹. Das Wesentlichste ist, daß in der »grenzenlosen« Rede bestimmt begrenzte Laute, und zwar in ihrer genauen (endlichen) Zahl erblickt werden, und zwar von dreierlei Art (Selbstlaute, Mitlaute, Stumme), die dann bis zu jedem Einzelnen hinab getrennt werden. (*Θεὸς . . . , ὃς πρῶτος τὰ φωνήεντα ἐν τῇ ἀπειρῇ κατενόησεν οὐχ ἐν ὄντα ἀλλὰ πλείω καὶ πάλιν ἑτερα . . . , ἀριθμὸν δέ τινα καὶ τούτων εἶναι . . . τὸ μετὰ τοῦτο διήρει τὰ τε ἄφθογγα καὶ . . . μέχρι ἐνὸς ἐκάστου . . . , ἕως ἀριθμὸν αὐτῶν λαβὼν ἐνί τε ἐκάστῳ καὶ σύμπτῃ στοιχείῳ ἐπωνόμασε.*) Die unzerlegbaren Einzellaute heißen dann **Buchstaben** (*στοιχεῖα*). Das heißt also, prinzipiell gesehen, Plato betrachtet die Zerlegung der Rede in Buchstaben als das typische Beispiel einer **Elementaranalyse** (*στοιχεῖον* = *elementum*²). Die Idee der Kombination endlich vieler Elementarstücke stammt aus der Atomistik, die eigentlich die erste *στοιχείωσις* durchführte. Implicit ist der Gedanke schon sehr viel früher in der griechischen Kunst vorhanden, nämlich im sog. »geometrischen Stil« (11. – 8. Jahrhundert), in dem (wenigstens im 8. Jahrhundert) Ornamente bereits mit dem Zirkel konstruiert wurden (l. o. S. 136, Anm. 2). So gibt es zum Beispiel eine die Sechsteilung des Kreises darstellende Figur auf peloponesischen Fibeln des 8. Jahrhunderts. Dies Ornament ist also aus sieben genau gleich großen Kreisen (und einem achten genau doppelt so großen) nach einer ganz genau bestimmten Konstruktion zusammengelegt; es liegt also ein wirklicher Elementaraufbau vor.

Nun liegt hier, in diesem grundlegenden Gedanken der *στοιχείωσις*³, der Analyse bis zu den Elementen und des Aufbaues aus Elementen,

1) l. c. S. 12 – 23.

2) Der Ausdruck *στοιχεῖον* für Element stammt von Plato (Simplicius, in Aristot. phys. p. 7, 10 – 14 ed. Diels), der Gedanke der Gleichsetzung von Buchstabe und Element ist weitgehend vorbereitet in der Atomistik (vgl. Diels, *Elementum*, Berlin 1899), der älteste Ausdruck für »Element« *ἀρχή* (»Ursprung«) stammt von Anaximander, Empedokles sagt *ρίζωμα* (»Wurzel«).

3) Das erste Vorkommen des Wortes ist mir unbekannt. (*στοιχειώτης* als ehrende Bezeichnung Euklids erscheint schon bei Archimedes.) Proclus,

die methodische Grundidee der griechischen Mathematik vor. Die von Stenzel aufgewiesenen Zusammenhänge bezüglich der »atomistischen« Mathematik und Physik Platos und des Xenokrates, ihrem Nachwirken bei einzelnen späteren Mathematikern (z. B. in Euklids Definitionen), endlich die merkwürdige Lehre von den Idealzahlen möge ihre große Wichtigkeit haben. Allein das, was die Entwicklung für Jahrtausende, bis heute, in der Mathematik bestimmt hat, das eigentlich Entscheidende und Fruchtbare des *στοιχείωσις*-Gedankens ist damit noch nicht genannt. Dies ist der Elementaraufbau der Mathematik selbst aus Axiomen und Postulaten, durch den »Beweis« der Theoreme, ebenso wie die Lösung der Probleme durch eine Kombination von »elementaren« Konstruktionen. Der Neuplatoniker Proklos zum mindesten hat dies mit völliger Klarheit gesehen und sich gerade dabei auf das Buchstabengleichnis bezogen [in Euclidem p. 72, 6 ff. (Friedlein)]:
ὥς γὰρ τῆς ἐγγραμμάτου φωνῆς εἰσιν ἀρχαὶ πρῶται καὶ ἀπλούσταται καὶ ἀδιαίρετοι, αἷς τὸ ὄνομα τῶν στοιχείων ἐπισημίζομεν, καὶ πᾶσα λέξις ἐκ τούτων ἐφέστηκεν καὶ πᾶς λόγος, οὕτω δὲ καὶ τῆς ὅλης γεωμετρίας ἐστὶ τινα θεωρήματα προηγούμενα καὶ ἀρχῆς λόγον ἔχοντα πρὸς τὰ ἐφεξῆς καὶ διήκοντα διὰ πάντων καὶ παρεχόμενα πολλῶν ἀποδείξεως συμπτωμάτων, ἃ δὲ στοιχεῖα προσαγορεύουσιν. (Wie es nämlich erste, unzerlegbare Anfänge (Elemente) der Rede gibt, denen wir den Namen der Buchstaben geben, und wie jeder schriftliche Text aus diesen besteht und auch jede Rede, so gibt es auch in der Geometrie gewisse Theoreme, die vorangestellt werden und das Verhältnis des Ursprungs haben zu den folgenden, die alles durchdringen und die Beweise für viele Eigentümlichkeiten gewähren, welche denn auch »στοιχεῖα« (Buchstaben, elementa) genannt werden¹.)

Daß also der Gegenstand der Mathematik eine »definite Mannigfaltigkeit« ist, der aus einer endlichen Anzahl von Konstruktionselementen mittels einer endlichen Anzahl von Konstruktionsprinzipien aufgebaut werden kann, diese bis heute grundlegende methodische Maxime verdanken wir Plato.

in Euclidem verwendet es häufig. (Aristoteles und die ältere Stoa [Fragm. coll. Arnim] verwenden es nach den Indices v. Bonitz bzw. v. Arnim. Adler noch nicht.)

1) Im weiteren Text (p. 72, 23 ff.) gibt Proklos die Meinung des Menaidmos (des Eudoxoschülers) über *στοιχεῖον* wieder, wo sich beide Bedeutungen des Aufbaues (*τὸ κατασκευάζον ἐστὶ τοῦ κατασκευαζομένου στοιχείου*, p. 72, 24–25) und des Ergebnisses der Analyse (*ἄλλως δὲ λέγεται στοιχεῖον, εἰς δὲ ἀπλούστερον ὑπάρχον διαιρεῖται τὸ σύνθετον* (p. 73, 5–6) finden.

Es gibt aber noch ein anderes spezielleres, aber glänzendes Beispiel für die im *Philebos* aufgestellte Methode¹: Das ist die Klassifikation der Irrationalitäten durch *Theätet*, eine hochbedeutsame mathematische Leistung, die sozusagen unter den Augen *Platos* vollzogen wurde¹. Denn hier wird die Unendlichkeit des geheimnisvollen und unheimlichen Irrationalen von den Elementen aus systematisch aufgebaut und damit der Grenze und der Zahl unterworfen. Wir haben früher (vgl. z. B. S. 158, Anm. 2), daß das (mathematische) Kontinuumproblem schon hier – mit der Spannung zwischen *Theätets* Konstruktionen und *Eudoxos'* »Nominaldefinition« des »Verhältnisses« (*λόγος*) — beginnt. Wir bemerken jetzt, daß es sich eingliedert in das Problem der Begrenzung des Unbegrenzten, wie es *Plato* im *Philebos* stellt und an dem Buchstabenbeispiel erläutert.

Im großen betrachtet, kann man sagen: Die Mathematik vor *Plato* war noch an das Anschaulich-Gestaltliche gebunden (»Wahrnehmungsgeometrie« *Zeuthen*). Auffallende (symmetrische u. dgl.) Figuren wurden auf ihre Eigentümlichkeiten hin untersucht, ohne daß diese Untersuchungen einen einheitlichen Zusammenhang gehabt hätten. Auch die »Konstruktionen« waren willkürlich und nicht von strengen Regeln beherrscht (»Einschiebung, allerlei kinematische Konstruktionen, wie etwa bei der Quadratrix (*τετραγωνίζουσα*) des *Hippias* von *Elis*). *Plato* führte erst die durchgreifende Reform durch, die uns die axiomatische Methode und die Definition der mathematischen Existenz durch Konstruktion schenkte².

Wie überhaupt, so waren auch bezüglich der Räumlichkeit und »Zahl«, die Gesamt-Gestalten das Primäre. Sie werden nicht primär in der frühen Mathematik (weder in der Arithmetik noch in der Geometrie) konstruiert, sondern vorgefunden und analysiert.

1) Fortgesetzt in Euklids X. Buch (f. o. § 5 b I. S. 135 ff.). – Gegenüber dieser Leistung kommen die abstrakten Spekulationen des *Xenokrates*, *Speusippos* usw. und selbst *Platos* eigene Idealzahlenlehre gar nicht in Betracht.

2) Vgl. dazu etwa *Zeuthen*, *Sur les connaissances géométriques des Grecs avant la réforme platonicienne*. *Oversigt over Danske Vid. Selsk. Forh.* 1913, p. 431 ff. *O. Toeplitz* hat demgegenüber darauf hingewiesen (»die Antike«, Bd. I, S. 201 ff.), daß der *στοιχείωσις*-Gedanke auch möglicherweise aus der konkreten mathematischen Forschung stammen und von dort aus *Plato* erst zugeflossen sein könnte. Diese Hypothese läßt sich bei den wenigen uns bekannten Urkunden aus der Zeit weder beweisen noch widerlegen. Soviel wird man aber doch wohl als sicher annehmen können, daß *Plato* als erster das klare Bewußtsein des streng methodischen Verfahrens des Elementaraufbaues gewonnen hat und dadurch auch die Entwicklung der positiven mathematischen Forschung entscheidend gefördert hat.

In einem entwickelteren Stadium erfolgt dann ihre Re-konstruktion aus den »Elementen«, die erst durch Analyse gewonnen werden mußten. Zugleich und in engster wesenhafter Verbundenheit leuchtet im Augenblick dieses Umschlags gleichsam von der Analysis in die Synthesis das Problem des Unendlichen (Grenzenlosen, ἄπειρον) auf. Die primitiven Gestalten werden in der Passivität des Vernehmens, das seinerseits wieder aus der naiven Aktivität des ursprünglichen »Umgangs« mit den Dingen erwuchs, noch nicht als abgehoben und in sich geschlossen vorgefunden: sie sind in einem strukturierten »Feld«, einer »Umwelt«, von vornherein eingebaut. Sobald sie in Elemente zerlegt werden, entsteht die Gefahr, daß die ihres natürlichen, »gewachsenen« Zusammenhangs beraubte Welt zu einem wüsten Trümmerhaufen zerfällt (die Welt des Werdens Hera-kli-tes, Kratyl-los', des jungen Plato), der dann als unbestimmbar, unbegrenzt, nicht zu durchlaufen, unübersehbar erscheint und mit dem wegwerfenden Ausdruck μὴ ὄν, »nicht seiend«, abgelehnt wird¹. Dieses Unheimliche – nachdem die ursprüngliche Heimlichkeit der Welt zerstört ist –, dieses ἄπειρον verlangt in Schranken gehalten, geordnet, beherrscht, übersehbar gemacht zu werden. Man kann sagen, das ἄπειρον ist, im Munde Plato-s, das zu Bändigende; die chaotische Unheimlichkeit², die zu bannen, das Untier, das zu fesseln ist. Es gibt in der Tat einen zentralen Gedanken Plato-s, der seine Stellung klar verdeutlicht, nämlich den des Syndesmos, wie er im Mittelpunkt der Stenzel'schen Interpretation steht³. Er ist im gegenwärtigen Zusammenhang zu verstehen als das Band des Gesetzes, wodurch dem grenzenlosen Chaos die Ordnung, die Beherrschbarkeit zuteil wird. Dies ist nicht nur anwendbar auf die Beherrschung der sinnlichen Welt des Werdens durch das Mathema-

1) Es ist dabei nicht etwa nur an »Physik« zu denken. Auch die natürlich erwachsenen Grundlagen des menschlichen faktischen Lebens selbst, in Religion, Sitte, Kunst, Staat werden zur Zeit des jungen Plato von der Sophistik »zerlegt«. Auch da oder vielmehr da in erster Linie droht der Trümmerhaufen!

2) Die Bedeutung von ἄπειρος (cf. Phileb. 17 E) schwankt, nach Natorp (Platos Ideenlehre¹ S. 302), zwischen »unendlich«, »unbestimmt«, »unkundig« (Gegensatz: ἐμπειρος!; auch ἀπορία ist entfernt verwandt). Vgl.: πείρα, πόρος, entfernter πέρα, πέρας usw.; ἄπειρος kann aber von beiden Stämmen, je nach der Bedeutung, abgeleitet werden; gemeinsam ist aber doch letztlich die Grundbedeutung 'per' = »durch«, »hinüber«. (Vgl. Boissacq, Dictionnaire étymologique de la langue grecque (Heidelberg-Paris 1916), p. 772).

3) Vgl. »Zahl und Gestalt«, die im Sachregister unter »Syndesmos« angeführten Stellen.

tische, auch nicht nur auf die mathematische Erfassung des anschaulichen Kontinuums, sondern vor allem zunächst innerhalb des rein mathematischen Bereichs selbst. Die unendlichen Möglichkeiten, die die unbegrenzte Kombinationsfähigkeit der mathematischen Elemente auftauchen läßt, etwa die unbegrenzte Mannigfaltigkeit der formal (durch Eudoxos) definierten *λόγοι*, müssen in erster Linie beherrschbar sein, damit Mathematik ihrem eigenen Sinn nach die Fähigkeit der Weltbeherrschung in sich bergen soll, indem der Mathematiker, wie der platonische »Gott Theuth«, »diese Fessel erdenkt, die selbst eine ist und dieses alles irgendwie zu Einem macht« (*τοῦτον τὸν δεσμόν αὐτὸν λογισάμενος ὥς ὅντα ἓνα καὶ πάντα ταῦτα ἐν πῶς ποιοῦντα*, Phil. 18 C)¹. Dies ist der grundsätzliche Sinn des intern mathematischen »Kontinuumproblems«, wie wir es früher (§ 5 b) ausführlich erörtert haben, des Problems (wie nochmals wiederholt sei), das Theätet zuerst in Angriff nimmt und das bis auf Hilbert nicht geruht hat.

Mit dieser spätplatonischen Gedankenreihe ist anscheinend die mythische Haltung der *ἀνάμνησις*-Lehre verlassen und eine »exakt-naturwissenschaftliche« Stellung gewonnen. So hat man es gelegentlich heute angesehen (Eva Sachs, E. Frank)². Aber dies wäre

1) Man wird diesen Gedanken der Beherrschung durch das Mathematische vielleicht unantik und spezifisch nordisch-abendländisch finden. Nannten doch die Griechen das, was wir die mathematische »Beherrschung« der Phänomene nennen: *τὰ γινόμενα σώζειν* (die Ph. retten). So hat etwa Scheler in seiner Abhandlung »Erkenntnis und Arbeit« (in »die Wissenformen und die Gesellschaft«, Leipzig 1926) den Machtgedanken gerade als Eigentümlichkeit der modernen Naturwissenschaft (seit der Renaissance) hingestellt. Gewiß liegen dort die Dinge insofern anders, als da an technische Beherrschung der Natur sofort gedacht wird (z. B. von Fr. Bacon), und das Experiment, das die Natur »zur Antwort zwingt«, die Hauptrolle spielt. Aber in der Tiefe hat doch alles mathematische Denken dies Gemeinsame, das Grenzenlose zu fassen, durch das Gesetz zu »fesseln«; ein Zug, der bis tief in die Urgeschichte der Menschheit zurückgeht und nicht an einen einzelnen Kulturkreis gebunden ist. (Babylonische, ägyptische, chinesische, indische Astronomie!)

2) Um die Aufklärung dieses Gegenstandes hat sich E. Frank (»Plato und die sogenannten Pythagoreer«, Halle 1923) wesentliche Verdienste erworben. Von den »sogenannten« Pythagoreern (Archytas und Schüler) sind aber die ersten zu unterscheiden, von denen man allerdings direkt nichts weiß. Es ist sehr schwer zu sagen, ob Franks Äthetese der Philolaos-Fragmente berechtigt ist, selbst die inhaltliche Übereinstimmung mit Speusippos zuzugeben. Denn die von Frank so gerügte apriorisch-konstruierende Methode der frühen Akademie ist in der Tat »archaisch«, d. h. sie geht irgendwie auf archaische Vorbilder zurück. Die Zahl als Gestalt ist sicher primitiv, das zeigen die ethnologischen und »ganzheitspsychologischen« Forschungen, und die von

eine falsche Auffassung. Nicht umsonst ist so ein später Dialog wie der *Timaios* von so orphisch-mythischem Stimmungsgehalt. Das Mathematische ist für Plato niemals zum bloßen Werkzeug der Naturerkenntnis herabgefunken. Das zeigt der Gegensatz zu der positivistischen kyzikener Schule (zu der man *Archytas* als *Eudoxos'* Lehrer hinzurechnen muß), der in der Musiktheorie, in der Astronomie und in der Lehre von den Grundlagen der Mathematik (Streit zwischen *Speusippos* und *Menaichmos*) hervortritt. Die bekannten Erörterungen im VII. Buch des Staates zeigen sehr deutlich die Ablehnung der Approximation der Beobachtungen durch die mathematische Theorie. Die wahrnehmbaren Gestirne bleiben weit zurück hinter dem Wahrhaften, hinter den Bewegungen, »in welchen sich die wahre (»seiende«) Schnelligkeit und die wahre (»seiende«) Langsamkeit nach der wahren Zahl und nach durchgängig wahren Figuren gegeneinander bewegen«. (*τῶν δὲ ἀληθινῶν πολλὰ ἐνδεῖν, ὅς τὸ ὄν τάχος καὶ ἡ οὐσα βραδυτής ἐν τῷ ἀληθινῷ ἀριθμῷ καὶ πᾶσι τοῖς ἀληθέσι σχήμασι πορώς τε πρὸς ἄλληλα φέρεται* *Republ. VII, 529 D.*) Ebenfowenig wie man von einem materiellen Modell eines mathematischen Körpers Genauigkeit verlangen könne, ebenfowenig könne man es vom sichtbaren Himmel und den hörbaren Tönen. Diese Parallelisierung zeigt aufs klarste, daß Plato – entgegen voll ausgebildeten exakten Tendenzen seiner Zeit – gar keine exakte Naturwissenschaft wollte¹. Man kann auch hier keine grundlegenden Unterschiede zwischen dem »Staat« und den Spätschriften finden: im »Timäus« kommt ja die »Tetraktys« vor, eine rein spekulative »Tonleiter«².

Stenzel im einzelnen verfolgte platonische Zahlenlehre hat deutlich primitive Züge. Rätselhaft ist viel eher die Modernität des *Archytas* (die nüchtern-korrekte Lösung des Problems der musikalischen Intervalle) als die Primitivität *Platos* (wie sie etwa in seiner rein spekulativen »Tetraktys« hervortritt).

1) Man bedenke, welche Ungeheuerlichkeit für uns darin liegt, ein mathematisches Modell, das doch nur zur Illustration eines »idealen« Sachverhaltes künstlich hergestellt ist, mit einem Naturvorgang zu vergleichen, dessen zu beobachtende Gesetzmäßigkeit mit mathematischen Mitteln »beschrieben« oder »dargestellt« werden soll!

In dem ersten Fall ist die mathematische Figur das Vorbild, das Modell das Abbild, im zweiten aber (nach unserer Meinung) doch der Naturvorgang das Original, das wir mit unseren Theorien rekonstruieren! Für Plato aber liegen beide Fälle ganz gleich; nämlich, ebenso wie im Falle des Modelles ist auch der sichtbare Himmel nur das unvollkommene Abbild eines rein »idealen« kinematischen Sachverhaltes.

2) Vgl. darüber die ausführlichen Erörterungen *E. Franks*, l. c. S. 13, 17 f., 140, 163, Anm. 1, 166 f., 181 ff., 264 ff.

Diese für unsere heutige Auffassung befremdliche, beinahe unbegreifliche Stellung Platons wurzelt in seiner Ontologie, ist also philosophisch bedingt. Das Mathematische ist eben dem eigentlich Seienden (*ὄντως ὄν*) näher als das Sinnliche. Man beachte den Gebrauch der Worte »seiend« (*ὄν, οὐσα*) und wahr (*ἀληθινόν*) in ganz demselben Sinne (in der zitierten Stelle Rep. 529 D). Es ist unter allen Umständen das mit dem größeren ontischen Gewicht Behaftete, und zwar als das Unbewegtere und Harmonischere. Daß die Mathematik die Dienerin der beobachtenden Wissenschaft sein könnte, ist ein ganz unplatonischer Gedanke, den man auch nicht in die Philebos-Stellen hineinlegen darf. Gerade das musiktheoretische Beispiel¹ zeigt ja klar, wie es gemeint ist, — nicht im Sinne der erfahrungsgemäßen Gesetze des Archytas, sondern im Sinne der aus selbstherrlichen, rein apriorischen, Motiven entworfenen Tetraktys.

E. Der platonisch-aristotelische Gegensatz.

Es besteht also ein unüberbrückbarer Gegensatz zwischen der platonischen und der aristotelischen Auffassung des Seins des Mathematischen. Für Plato ist es eigenständig, sein eigenes Gesetz in sich tragend, in seiner Seinsweise dem Physischen überlegen. Für Aristoteles ein Produkt der Abstraktion, für sich gar nicht existierend, sondern nur »als« (*ᾧ*) für sich seiend betrachtet. Entsprechend ist für Plato Mathematik die erhabene Lehre, die zur Schau der Idee führt und die zugleich die Kraft hat, das Gewühl der Sinnlichkeit zu binden. Für Aristoteles ist sie eine Hilfswissenschaft der Physik und auch der Metaphysik².

Damit sind aber zwei Grundansätze der Deutung des Mathematischen herausgestellt, die heute noch unverändert ihre Geltung bewahren:

1. Das Mathematische ist das über die Welt der Lebenserfahrung Erhabene, aus einer ursprünglicheren Sphäre stammend als das in der Erfahrung begegnende Sein; von diesem letztlich historischen Phänomen abgehoben durch seinen grundfänglich anderen Zeitcharakter.

2. Das Mathematische ist das Abstrakte, zugleich das »Idealierte«, wodurch seine Seinsbedeutung in zweierlei Hinsicht eingeschränkt ist. Einmal insofern es nichts Selbständiges ist, sondern das Ergebnis einer einseitigen Betrachtung eines Teilmomentes am

1) Vgl. Staat 530 C–351 C, dazu Frank, l. c. S. 151–153.

2) Bezüglich der Himmelsbewegungen: Met. A, 8, bef. 1073a 1ff.

konkreten Sein. Zweitens, weil es auch dieses Teilmoment nicht, so wie es ist, wiedergibt, sondern zurechtgerückt, aus methodischen Gründen vereinfacht und systematisch geschlossener gemacht. Beides sollte Anlaß geben, sich davor zu hüten, dem mathematischen Sein einen entscheidenden Anteil an dem Verständnis der konkreten Welt der Lebenserfahrung, d. h. des historischen Daseins, zuzuschreiben. »Die Mathematik ist nicht strenger, sondern weniger streng als die Historie« (Heidegger). –

Diese beiden Grundansätze sind in vielem entgegengesetzt gerichtet, aber trotzdem, recht verstanden, nicht unvereinbar. Denn man muß bedenken, daß sie beide den Seinsinn des Mathematischen abheben gegen den Seinsinn des historischen Lebens. Die »Erhabenheit« des Mathematischen ist Erhabenheit über das historische Dasein. Seine Unzulänglichkeit ist Unzulänglichkeit zur Auslegung eben dieses historischen Daseins. Beides entspringt derselben Wurzel – der Verschiedenheit seines Seinsinns vom historischen Seinsinn. Wir werden also auf diese Verschiedenheit hingewiesen, als auf das entscheidende Mittel zu einem ontologischen Verständnis des mathematischen Phänomenkreises.

F. Die Anfänge des Mathematisch-Formalen.

Ehe wir nun aber diese Deutung versuchen, ist noch ein dritter Ansatz zum Verständnis des Mathematischen zu erörtern, der anscheinend erst aus neuerer Zeit stammt, tatsächlich aber keimhaft schon in der Antike vorhanden ist. Das ist der Ansatz der Mathematik als des Gebiets der formalen Allgemeinheit in einem besonders zugespitzten Sinne, nämlich in dem einer alle inhaltlichen und auch die konkret feinsmäßigen Unterschiede überspringenden, die so unterschiedenen Gegenstände vermöge des Denkmittels der Analogie beherrschenden Formalität. Die so verstandene formale Allgemeinheit ist streng zu scheiden von der gattungsmäßigen Allgemeinheit, möge es sich auch um höchste Gattungen handeln¹.

Mit dieser eigentümlichen, die gattungsmäßigen Differenzen übersteigenden (ob schon nicht in derselben »generalisierenden« Richtung fortsetzenden) Allgemeinheit tritt das Mathematische in engen Zusammenhang mit dem Begriff des Seins selbst und als solchen, des $\text{ὄν} \xi \text{ ὅν}$ des Aristoteles. Das Sein ist zwar der allgemeinste Begriff (*καθόλου μάλιστα πάντων*, Met. B 4 1001 a 21), aber es ist keine oberste Geltung (*οὐχ οἷόν τε τῶν ὄντων οὔτε τὸ ξν*

1) Vgl. Hufferl, »Ideen« § 13.

οὔτε τὸ ὄν εἶναι γένος Met. B 3. 998 b 22). Nach der Ausdrucksweise des Mittelalters ist das *ens* ein *transcendens*¹.

Es ist hier nun die Aufgabe, den Berührungspunkt der Transzendenzlehre mit der Entwicklung der Idee des Mathematisch-Formalen aufzuzeigen.

In dieser Beziehung ist eine, wie uns scheint, zu wenig beachtete Stelle in der aristotelischen Metaphysik von Wichtigkeit:

Met. K 3 (1061 a 28 – b 6). καθάπερ δ' ὁ μαθηματικὸς περὶ τὰ ἐξ ἀφαιρέσεως τὴν θεωρίαν ποιεῖται (περιελὼν γὰρ πάντα τὰ αἰσθητὰ θεωρεῖ, ... μόνον δὲ καταλείπει τὸ ποσὸν καὶ τὸ συνεχές, ... καὶ τὰ πάθη τὰ τούτων ἢ ποσά ἐστι καὶ συνεχῆ, καὶ οὐ καθ' ἑτερόν τι θεωρεῖ, καὶ τῶν μὲν τὰς πρὸς ἄλληλα θέσεις σκοπεῖ καὶ τὰ ταύταις ὑπάρχοντα, τῶν δὲ τὰς συμμετρίας καὶ ἀσυμμετρίας, τῶν δὲ τοὺς λόγους, ἀλλ' ὁμῶς μίαν πάντων καὶ τὴν αὐτὴν τίθεμεν ἐπιστήμην τὴν γεωμετρικὴν) τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἔχει καὶ περὶ τὸ ὄν. τὰ γὰρ τούτῳ συμβεβηκότα καθ' ὅσον ἐστὶν ὄν, καὶ τὰς ἐναντιώσεις αὐτοῦ ἢ ὄν, οὐκ ἄλλης ἐπιστήμης ἢ φιλοσοφίας θεωρεῖται.

An dieser Stelle sind zwei Punkte bedeutsam. Erstens: Obwohl der Mathematiker ganz verschiedenartige Gegenstände betrachtet (Punkte, Linien, Flächen, Körper – dann »Größen« und auch wieder Zahlen) und an ihnen auch wieder Verschiedenes (die Lage, die Kommensurabilität und ihr Gegenteil usw.), so haben wir doch dafür nur eine Wissenschaft, die Geometrie. Zweitens (das wichtigere): Der Mathematiker betrachtet allerlei verschieden qualifizierte Sinnendinge (und auch andere) in der Abstraktion, d. h. nur auf das »wie mannigfach« (ποσόν)² und die Kontinuität hin. Es spielt also das sinnliche Aussehen (εἶδος), etwa Farbe oder Schwere,

1) Über die Geschichte des Terminus »transcendens« bzw. »transcendentalis« vgl. Heinrich Knittermeyer, »Der Terminus transcendental in seiner historischen Entwicklung bis auf Kant«. Marburger philol. Dissert. 1920. Das Wort geht ursprünglich, was Knittermeyer nicht sagt, auf Platos Wendung ἐπέκεινα τῆς οὐσίας (Staat VI, 509 B) zurück, welches Wort dann bei Plotin und Proklos (in Euclidem p. 137, 18 Friedlein) als Terminus vorkommt. Die Bezeichnung »transcendentia« findet sich in der hier relevanten Bedeutung zuerst bei Albertus Magnus, ausführlich erörtert wurden die transcendentia bei Thomas v. Aquin, u. a. in den »quaestiones disputatae de veritate«. Wichtig ist ferner, was Duns Scotus darüber geschrieben hat. Man findet dies dargestellt bei M. Heidegger, die Kategorien- und Bedeutungslehre des Duns Scotus (Tübingen 1916) I. Teil, Kap. 1 u. 2.

2) Ich erlaube mir (nach Heideggers Vorgang) τὸ ποσόν in dieser Allgemeinheit wiederzugeben, denn es bezieht sich doch hier offenbar sowohl auf die μέγεθος als auch auf die ἀριθμοί.

Härte, Kälte usw. keine Rolle. (Bezüglich des »Aussehens« der Raumgestalt kann man zweifeln!) Es werden also Gegenstände ganz verschiedenen Aussehens, ganz verschiedener anschaulicher Artung (species) zum Gegenstand einer Wissenschaft gemacht. Dies ist möglich durch die eigenartige mathematische Abstraktion (*ἀφαίρεσις*), vermöge der der Mathematiker die Zuständlichkeiten seiner Objekte nur sofern sie mannigfaltig und stetig zusammenhängend sind und nach keiner anderen Hinsicht betrachtet (*τὰ πάθη . . . ἢ ποσά ἐστι καὶ συνεχῆ καὶ οὐ κατ' ἑτερόν τι θεωρεῖ*). Ebenso, fährt nun Aristoteles fort, verhält es sich auch mit dem Seienden als solches (*ἢ ὄν*), sofern es Sein ist (*κατ' ὅσον ἐστὶν ὄν*). Unter diesem besonderen, in seiner Weise auch abstrahierenden Aspekt sieht die erste Philosophie das Seiende. Man kann also kurz sagen: der mathematischen Abstraktion tritt die ontologische (metaphysische) zur Seite. (Bemerkenswert ist, daß sich in den Parallelstellen in *Γ 2* diese Analogisierung der metaphysischen Betrachtungsweise mit der mathematischen *ἀφαίρεσις* nicht findet¹⁾). Genauer gesagt: dieselbe Betrachtungsweise im Modus des »als« oder »infofern« (*ἢ, κατ' ὅσον*: lateinisch: qua, prout, inquantum, secundum quid u. dgl.) ist kennzeichnend für die Mathematik und die erste Philosophie. Sie geht über die *εἶδη* und *γένη* hinaus, genauer: sie braucht sie nicht zu beachten, sie entzieht sich ihnen eben durch ihre eigentümliche abstrahierende Haltung. Keineswegs ist das formale Etwas (das *ὄν*

1) Man hat das Buch *K* dem Aristoteles abgesprochen. Neuerdings hat aber Jäger für die erste Hälfte *K*, 1–8 wieder überzeugend (vor allem gegenüber Natorp) die Echtheit nachgewiesen. Vgl. W. W. Jäger, »Studien zur Entstehungsgeschichte der Metaphysik des Aristoteles« (Berlin 1912) I. Teil, 3. Kap. (S. 63 ff.) und »Aristoteles, Grundlegung einer Geschichte seiner Entwicklung« (Berlin 1923), S. 216 ff.

Die im Text angeführte Stelle hat keine genaue Parallele in ihrer »Dublette« in *Γ 2*. Zwar wird dort auch der Mathematiker mit dem Philosophen verglichen (1004a 6 ff.) und es wird auch gesagt (1004b 10–16: *ἐπεὶ ὅσπερ ἐστὶ καὶ ἀριθμοῦ ἢ ἀριθμὸς ἴδια πάθη . . . ὁμοίως δὲ καὶ στερεῶ . . . ἐστὶν ἑτέρα ἴδια· οὕτω καὶ τῶ ὄντι ἢ ὄν ἐστι τινὰ ἴδια, καὶ ταῦτ' ἐστὶ περὶ ὧν τοῦ φιλοσόφου ἐπισκέψασθαι τὰληθές*). Aber es fehlt der Gedanke, die mathematische *ἀφαίρεσις* mit der Eigenart der ontologischen Betrachtung in Parallele zu setzen. Vielleicht scheint sich Aristoteles in der (nach Jägers Meinung späteren) Fassung in *Γ 2* der Gedanke einer metaphysischen Abstraktion, die der mathematischen analog wäre, naheulegen, wie dies in *K 3* offenbar der Fall ist. Dies würde mit der Auffassung Natorps (die jetzt auch Jäger zugibt, vgl. »Aristoteles«, S. 217, Anm. 2) übereinstimmen, daß in *K 1–8* platonisierende Spuren zu bemerken sind. Denn die Herabdrückung der ontologischen Bedeutung des Mathematischen, die man in *Γ 2* gegenüber *K 3* bemerken kann, ist eine Abwendung vom Platonismus.

oder ens), wie die Stoiker später meinten, eine höchste Geltung (*γενικώτατον*)¹.

In dieser Gemeinfamkeit von Mathematik und Ontologie, die auf dem formalen Charakter beider beruht, liegt der Keim der Idee einer mathesis universalis verborgen, der sich allerdings in der Antike nicht entwickelt hat, wenngleich es gewisse Tendenzen in dieser Richtung gibt.

Dies lag wohl hauptsächlich an dem geometrischen Charakter der griechischen Mathematik und dieser wieder, wie früher gezeigt, an dem konstruktiven Begriff der mathematischen Existenz, der seinerseits von dem im vorigen gekennzeichneten grundlegenden methodischen Gedanken der *στοιχειώσις* (Plato) abhängt².

Die klassische griechische Mathematik kam nie von der sinnlich-an anschaulichen (wenn auch idealisierten) Grundlage der geometrischen Figur los. Wohl gibt es gerade bei Aristoteles schon die Ausdehnung der Bedeutung von *σχῆμα* auf die Zusammenstellung der Termini zu einer Schlußfigur, und zwar nicht nur in dem Fall, wo ein Syllogismus wirklich möglich ist, sondern auch, wenn er unmöglich ist³. Ebenso wendet er in den Analytiken Buchstaben zur Bezeichnung ganz allgemeiner logischer Termini an, ohne aber über diese äußerst formale Bezeichnungsweise irgend eine Bemerkung zu machen⁴. Endlich findet sich bei ihm (Analyt. poster. I, 5; p. 74

1) Es ist bezeichnend, daß diese Bestimmung des *ὄν* oder *τί* in den einleitenden Betrachtungen der stoischen Logik oder Physik steht. (Eine Ontologie als selbständige philosophische Disziplin kennt die Stoa bekanntlich nicht, auf die Logik [Dialektik] folgt sofort die Physik.) Vgl. Stoicorum veterum fragmenta (coll. J. ab Arnim), Vol. III, p. 214, 31 (Diogenes Babylonius fr. 25) *γενικώτατον δὲ ἐστὶν ὃ γένος ὄν γένος οὐκ ἔχει, οἷον τὸ ὄν* u. ferner. Vol. II p. 217. (Chrysippus fr. 329, 332, 333, 334, 371.)

2) Es verdient bemerkt zu werden, daß schon früh die Arithmetik grundfähig der Geometrie vorgezogen wird:

Archytas fr. 4 (Diels, Vorsokr. 35 B 4), aus den Diatriben: *καὶ δοκεῖ αὐτῷ λογιστικὰ ποτὶ τὰν σοφίαν τῶν μὲν ἄλλων τεχνῶν καὶ πολὺ διαφέρειν, ἐπὶ δὲ καὶ τὰς γεωμετρικὰς ἐναργεστέρῳ πραγματεύεσθαι ἢ θέλει . . .*

Aristoteles, Met. A, 2 (982a 26f.) *αἱ γὰρ [sc. ἐπιστημαὶ] ἐξ ἐλαττόνων ἀκριβέστεραι τῶν ἐκ προσθέσεως λαμβανόμενων, οἷον ἀριθμητικὴ γεωμετρίας.*

Diese Rangordnung der mathematischen Disziplinen gewinnt dann im Neuplatonismus grundfähliche Bedeutung. (Proclus, in Euclidem: p. 59, 16—61, 17; p. 95, 23—96, 15 [Friedl.] S. u. im Text S. 261 ff.)

3) Vgl. Analyt. priora I, 4 (26a 13f.): *ἐν τούτῳ τῷ σχήματι πότε ἐστὶ καὶ πότε οὐκ ἐστὶ συλλογισμός.*

4) Boëthius, de syllogismo categorico tut dies als erster. Albertus Magnus nennt dann die durch Buchstaben bezeichneten leeren Termini

a 17 ff.) die für eine klare grundsätzliche Erfassung mathematischer Verhältnisse wichtige Bemerkung, daß man zuerst die Vertauschung der Innenglieder bei einer Proportion (*ἐναλλάξ*, vgl. Euklid V, Def. 13) einzeln betrachtet habe, nämlich bezüglich (*ἑῇ*) der Linien oder der Körper usw. Denn, weil alle die verschiedenen mathematischen Gegenständlichkeiten keinen gemeinsamen Namen hatten und auch dem »Aussehen«, ihrer sichtbaren Artung (*εἶδος*) nach, sich voneinander unterschieden, habe man sie für sich genommen. (*διὰ τὸ μὴ εἶναι ὀνομασμένον τι πάντα ταῦτα ἔν, ἀριθμοί, μήκη, χρόνος, σιτρεά, καὶ εἶδει διαφέρειν ἀλλήλων, χωρὶς ἐλαμβάνετο* [21–23].) Jetzt aber würde die Vertauschbarkeit der Innenglieder »im Ganzen«, d. h. allgemein, bewiesen. Denn sie bestände ja nicht in Bezug auf die Linien eben als solche (*ἡ γραμμαί*) usw., sondern bezüglich dessen, von dem sie voraussetzen, daß es »im Ganzen« zugrunde liegt. (*ἡ τοδί, ὃ καθόλου ἐκποτιθενται ἐπάρχειν*.) *καθόλου* heißt: »auf das Ganze hin (eigentlich hinunter) gesehen«, modern kann man nicht gut anders sagen, als »in formaler Allgemeinheit«. Aber dieser Begriff der »Form« ist der Antike ganz fremd. Er steht in geradem Gegensatz zur anschaulichen Gestalt, worauf die Worte *εἶδος* und *μορφή* gehen, wie später noch klarer hervortreten wird. In der Tat ist das *ἐναλλάττειν* und ähnliches Operieren mit Proportionen (vgl. Euklid, V. Buch Def. 13–17 usw.) im Grunde wirklich »formale«, also griechisch gesehen gerade über das *εἶδος* hinausgehende Mathematik. Man nannte dies *τὰ κοινά* oder auch die »sogenannten mathematischen Axiome«. Das Hinausgehen solcher Beziehungen (als Beispiel dient etwa, daß Gleiches von Gleichem weggenommen, Gleiches ergibt) über das übliche mathematische Gebiet, veranlaßt Aristoteles jenen *κοινά* oder *ἀξιώματα* der (ersten) Philosophie zuzuweisen¹. Unter diesen im Syllogismus »termini transcendentis«, »nihil et omnia significantes«. (Knittermeyer, l. c. p. 15.) Es besteht also eine ausdrückliche Beziehung zum *ens transcendentis*.

1) Vgl. Metaph. Γ 3 (1005 a 19–b 1); K 4 (1061 b 18–33). Der Inhalt der beiden Stellen ist im wesentlichen identisch, wie auch die Erläuterungen des Alexander bzw. Ps.-Alex. zu ihnen zeigen. Daß unter der *κοινά* wirklich die allgemeinsten mathematischen Axiome verstanden sind, die auch über das übliche mathematische Gebiet hinaus auf jedes »Mannigfaltige« (*ποσόν*) anzuwenden sind, hat W. Jäger gegen Natorp mit Recht betont. (Entstehungsgeschichte d. Met. S. 80–81.) Entscheidend ist die auch von Jäger herangezogene logische Vergleichsstelle über die *κοινά*, Analyt. post. I, 11 (77 a 22–32). Es werden nämlich da als Beispiele für ein solches *κοινόν* unmittelbar nacheinander der rein logische Satz vom ausgeschlossenen Dritten und das Größenaxiom »Gleiches von Gleichem gibt Gleiches« angeführt. (77 a 30 f.: *οἷον ὅτι ἔπαν φάνει ἢ ἀποφάναι, ἢ ὅτι ἴσα ἀπὸ ἴσων ἢ τῶν τοιούτων ἄλλα*).

»allgemeinen« Sätzen sind auch rein logische, wie der Satz von ausgeschlossenen Dritten. Es ergibt sich somit ein Gebiet allgemeinsten »formaler« Art, das das Thema der später (zuerst bei Descartes) explizit aufgetretenen mathesis universalis ist. Aristoteles scheut sich, daraus ein selbständiges Gebiet zu machen, da alsdann die Gefahr der Selbständigkeit jener »formalen« Entitäten auftaucht. Er sieht eben in ihnen durchaus οὐ κεχωρισμένα, die aber ἢ (ὡς) κεχωρισμένα beobachtet werden können.

Es ist allerdings nicht zu leugnen, daß ein gewisses Schwanken besteht. So wird Met. E 1 ausdrücklich gesagt, die erste Philosophie oder »Theologie« (θεολογική) beschäftige sich, im Gegensatz zur (gewöhnlichen) Mathematik, mit den χωριστὰ καὶ ἀκίνητα (1026 a, 16). Es ergibt sich hieraus aber sofort eine gewisse Schwierigkeit dadurch, daß die erste Philosophie als Wissenschaft vom Seienden als solchen (ὄν ἢ ὅν) einerseits »von formaler Allgemeinheit« (καθόλου) ist, andererseits aber doch, als θεολογική Wissenschaft von der οὐσία ἀκίνητος und χωριστή, also von einer ausgezeichneten, »göttlichen« Seinsweise. (§ 1, 1026 a, 23 – 32.)¹ W. Jäger erklärt dieses Schwanken aus der Entwicklung der aristotelischen Lehre vom Platonismus weg. Der spezifisch aristotelische Gedanke, das Sein mit dem Denkmittel der Analogie (τὸ ὄν λέγεται πολλαχῶς) philosophisch zu erfassen, oder anders ausgedrückt, es »formal« (καθόλου) zu nehmen, löst sich erst langsam von dem platonischen Gedanken los, das »Abgefonderte und Unbewegte«, d. h. das Göttliche als das ὄντως ὄν, das eigentlich Seiende allein anzusehen.

Auf das uns hier allein interessierende »Formal-Mathematische« (τὰ κοινά) bezogen, heißt das: Aristoteles faßt dieses κοινόν in seiner reifen Philosophie als ein Moment am ὄν ἢ ὅν selbst und damit als unselbständig im Sinne alles dessen, was wir, nach heutigem Sprachgebrauch (!), »formal« nennen. Gerade wegen dieser Unselbständigkeit, deshalb, weil es nicht abgefondert (χωριστόν) ist, kann es verschiedenen materialen Gebieten gemeinfam (κοινόν) sein. Es ist also kein γένος, das anderen γένη vergleichbar, wenn auch ihnen in der großen Reihenfolge der γένη τοῦ ὄντος übergeordnet ist.

1) Dazu W. Jäger, Aristoteles, S. 226 f. (das ganze 4. Kap. d. II. Teils ist im Zusammenhang zu lesen) und auch schon Bonitz. — Bemerkenswert ist auch die Ratlosigkeit Alexanders, der schließlich καθόλου in dem ihm unverständlichen aristotelischen Satz »καὶ καθόλου [sc. ἡ πρώτη φιλοσοφία] οὕτως ἐστὶ πρώτη« (1026 a, 30 f.) folgendermaßen umdeutet: »τὸ καθόλου οὐ τοιοῦτον ἡρώτα οἶον ἡμεῖς ἐξεδεξάμεθα ἀντὶ τοῦ περιέχον τὰς ἄλλας (was es doch offenbar bedeutet!), ἀλλὰ τοῦ καθόλου ἀντὶ τοῦ βελτίων καὶ τιμιωτέρα« (p. 413, 4–5 Bonitz).

Die Abgrenzung gegen diese platonische und auch neuplatonische Auffassung gibt Aristoteles deutlich in Met. M 2 (1077 a, 9–12). Wenn man das Mathematische zwischen die Ideen und die Sinnendinge stellt, so wird folgerichtigerweise »Einiges«, was von den Mathematikern »allgemein aufgestellt wird« (καθόλου γράφεται) als eine vierte Stufe noch zwischen das gewöhnliche Mathematische und die Ideen eingeschoben werden müssen. (ἔσται οὖν καὶ αὕτη τις ἄλλη οὐσία μετὰ τὴν πεχωρισμένην τῶν τ' ἰδεῶν καὶ τῶν μετὰ τούτων, ἥ οἷον ἀριθμὸς ἔστιν οὔτε στιγμαὶ οὔτε μέγεθος οὔτε χρόνος¹.)

Im Neuplatonismus findet sich der Gedanke dann wirklich positiv vertreten. So sehr klar und ausführlich bei Proclus (in Euclidem p. 7, 13 ff. Friedlein): »... καθόλου θεωρούμενα καὶ κοινῶς, οὐ καθόσον ἔστιν ἐν σχήμασιν ἢ ἀριθμοῖς ἢ κινήσεσιν, ἀλλ' αὐτὰ καθ' αὐτὰ τούτων ἐκάτερον φύσιν τινὰ ἔχον κοινὴν καὶ γινώσκιν ἑαυτοῦ παρεχόμενον ἀπλουσιτέραν. (7, 27 — 8, 4.) (Ein Theorem ist »allgemein« und »gemeinsam«, nicht sofern es von Figuren oder Zahlen oder Bewegungen handelt, sondern indem es selbst an sich selbst eine jedem von diesen gemeinsame Natur hat und eine einfachere Erkenntnis seiner selbst gewährt.)

Zugleich damit wendet sich der Charakter der mathematischen Erkenntnis von der anschaulichen Gestalt (εἶδος, σχῆμα oder μορφή: »Form« im klassischen Sinn) weg und wird zur γνῶσις ἀσχηματίστος καὶ ἀμόρφωτος. Die wahre Mathematik soll τὰ διαστατὰ ἀδιαστάτως, τὰ μεριστὰ ἀμερίστως, τὸ σχῆμα ἀσχηματίστως usw. betrachten, also das anschauliche Außereinander (den »Abstand«), das Geteilte und die Figur in der Weise eines Ineinander (ἀδιαστάτως), eines Unterteilten, eines Nichtfigürlichen ansehen². Die Gesamtanschauung des Proklos kommt etwa in folgender schwungvollen Stelle zum klaren Ausdruck:

Die geometrische νόσις μετὰ φαντασίας bahnt zwar den Weg zur διανοητικῇ οὐσίᾳ, aber: »sie ist noch nicht zu jener hinaufgestiegen, weil die διάνοια auf das außerhalb Befindliche hinsieht... Wenn sie aber einmal die Abstände zusammenfalten und die geprägten Formen und die Mannigfaltigkeit unbildlich und eingeformt anschauen und sich auf sich selbst zurückwenden könnte, dann würde sie (obchon

1) Dazu vgl. Pseudo-Alexander, der jene vier Stufen ausführlich auseinanderlegt, ohne jedoch die neu eingeführte zweithöchste anders als durch Umschreibung kennzeichnen zu können. (ἕτερον τούτων ἀπάντων [sc. τῶν μαθηματικῶν] ἔσται καθολικώτερον ὅν, p. 706, 6 Bonif.).

2) Vgl. die entsprechende Bemerkung über die (zu verwerfende) Anschauung (Proclus, p. 52, 23 ff.): [ἡ φαντασία τὸ γνωστόν] ἐκ τοῦ ἀμεροῦς τῆς ζωῆς εἰς μερισμὸν καὶ διάστασιν καὶ σχῆμα προάγει... καὶ διὰ τοῦτο πᾶν, ὅπερ ἂν νοῆ, τύπος ἔσται καὶ μορφή νοήματος...

sie unterscheidend) die geometrischen Sachverhalte ungeteilt (d. h. ohne extensives Außereinander und ohne Vielfachheit) sehen, die unabtändigen, feinsgestaltigen, deren es eine Fülle gibt. Und dieses wirkende Sein (*ἐνέργεια*) wäre wohl das schönste Ziel der Bekümmernung um die Geometrie und in Wahrheit das Werk einer hermetischen Gabe, die sie von irgendeiner Kalypso hinaufführt zur vollendeten und einsichtigen Erkenntnis und sie ablöst von den gestalthaften Verfahrungsweisen der Phantasie«¹.

Diesen von der etwas dunklen Glut jener spätantiken Zeit erfüllten Spekulationen entspricht freilich bei Proklos keine positive mathematische Leistung. Die im Grunde schon sehr alte (von Eudoxos stammende!) und wenig ausgedehnte »formale« Theorie der Proportionen ist das einzige Stück »formaler«, d. h. in Proklos' Sinn über das *εἶδος*, die *μορφή*, das *σχῆμα*, den *τύπος* hinausgehender Mathematik, das die Antike kannte. Höchstens die Arithmetik des Diophant, die sogar *ἀριθμοί* und *μεγέθη* nicht mehr scheidet, wäre anzuführen, wenn sie jemals zu einem strengen System erwachsen und der griechischen Mathematik eingegliedert worden wäre. Aber Proklos ist doch scharf sinnig genug, um die Kritik, die Geminus einige Jahrhunderte früher gelegentlich der Erörterung des 5. euklidischen Postulats an dem blinden Vertrauen in die Evidenz der Anschauung geübt hatte, in seinem Sinn auszunutzen. Gegen diejenigen, die sich betrügen ließen (*ἀπατώμενοι*) und das 5. Postulat anerkannten, weil es »von sich aus Überzeugung gewähre« (*αὐτόθεν τὴν πίστιν παρεχόμενον*), habe Geminus mit Recht gesagt, »daß wir von den Führern dieser unserer Wissenschaft selbst gelernt haben, daß man durchaus nicht den vertrauenerweckenden anschaulichen Vorstellungen der Phantasie Beachtung schenken dürfe bei der Übernahme von Sätzen in der Geometrie«². Das Zusammenfallen der Geraden gemäß

1) Vgl. den Urtext: Proclus, in Euclidem p. 55, 13–27 (Friedlein): *εἰ δέ ποτε συμπύξασα τὰς διαστάσεις καὶ τοὺς τύπους καὶ τὸ πλῆθος ἀτυπώτως καὶ ἐνοειδῶς θεασαμένη πρὸς αὐτὴν ἐπιστρέψαι δυναθείη, τότε ἂν διαφερόντως τοὺς λόγους τοὺς γεωμετρικοὺς ἴδωι τοὺς ἀμερίστους, τοὺς ἀδιαστάτους, τοὺς οὐσιώδεις, ὧν ἐστὶ πλῆρωμα. καὶ ἡ ἐνέργεια αὐτῆς αὕτη τέλος ἂν εἴη τὸ ἄριστον τῆς περὶ γεωμετρίας σπουδῆς καὶ ὄντως τῆς Ἑρμῆως δόσεως ἔργον, ἀπὸ τίνος Καλυστοῦς ἀναγούσης αὐτὴν εἰς τελειοτέραν καὶ νοερωτέραν γνῶσιν καὶ ἀπολυούσης τῶν ἐν φαντασίᾳ μορφωτικῶν ἐπιβολῶν. καὶ ταύτην δεῖ τὴν μελέτην μελετᾶν τὸν ὡς ἀληθῶς γεωμετρικόν, καὶ πρὸς τὴν ἔγερσιν καὶ τὴν ἀπὸ τῆς φαντασίας μετὰστασιν εἰς μόνην τὴν διάνοιαν αὐτὴν καθ' αὐτὴν ποιῆσθαι τέλος*

2) πρὸς οὓς ὁ Γεμῖνος ὁρθῶς ἀπήντησε λέγων, ὅτι παρ' αὐτῶν ἐμάθομεν τῶν τῆς ἐπιστήμης ταύτης ἡγεμόνων, μὴ πάνυ προσέχειν τὸν νοῦν ταῖς πιθαναῖς φαντασίαις εἰς τὴν τῶν λόγων τῶν ἐν γεωμετρίᾳ παραδοχὴν. (192, 5–9.) Die im Text benutzten Stellen find; 192, 1–4; 13–29; zu vergleichen ist noch 177, 13–21.

dem 5. Postulat sei »zwar glaubhaft, aber nicht notwendig, wenn nicht jemand einen Beweis führt« (. . . συμπεσεῖσθαι ποτε πιθανόν, ἀλλ' οὐκ ἀναγκαῖον, εἰ μὴ τις ἀποδείξειεν λόγος), daß gewisse Linien (wie die Hyperbel) asymptotisch verliefen, sei »obwohl unglaublich und paradox, dennoch wahr« (καίτοι δοκοῦν ἀπίθανον εἶναι καὶ παράδοξον, ὅμως ἀληθές ἐστι) und auch im Falle der Geraden »verführt das für andere Linien Gezeigte die Phantasie, bis wir den Sachverhalt durch Beweis niedergebunden haben« (ὥς γὰρ ἂν δι' ἀποδείξεως αὐτὸ καταδησώμεθα, περισπᾷ τὴν φαντασίαν τὰ ἐπ' ἄλλων δεικνύμενα γραμμῶν.)

Diese Skepsis gegen die Anschauung führt aber dann nicht etwa zu einer nicht-euklidischen Geometrie, sondern zu Scheinbeweisen des 5. Postulats. Ebenföwenig kommt es zu einem positiven Ansatö für eine von der φανταστὴ ἔλη freien Geometrie¹; es bleibt beim Postulat einer solchen die Anschauung hinter sich lassenden Mathematik.

Aber man kann sagen, daß in gewissem Sinn jener spätantike Traum des Proklos in der abendländischen Mathematik in Erfüllung ging, die klassische antike und orientalische (indisch-arabische) Motive mit autochthonen, nordisch-germanischen (die man nicht unterschätzen darf!) vereinigte und damit eine weit über alles Frühere hinausreichende Stoßkraft gewann. Denn die »abendländische«, unausgebreitete, abstrakt analytische »Formel«, durch die recht eigentlich das ganz »Uneidetische« (ἀνείδεστον) und »Amorphotische« (ἀμόρφωτον) des neuen Mathematisch-Formalen ausgedrückt ist, umfaßt oft eine Fülle von gestaltlich ganz verschiedenen Dingen durch die Analogie ihres inneren Gesetzes. (λόγος.) Damit ist die Mathematik vor eine grundfäglich neue Aufgabe gestellt, diese nicht mehr anschauliche »Form« zu differenzieren und in begrifflicher Weise zu explizieren, ohne sie in einem raumhaften und überhaupt quantitativen Medium auszubreiten. Es wird damit zugleich etwas höchst Allgemeines und Beherrschendes erreicht, indem gewissermaßen die formalen Charaktere alles Seins (des ὄν ἢ ὄν) festgestellt werden. Jetzt ist das Formale nicht mehr durch »Generalisierung« schrittweise vom anschaulichen Sonderfall aus zu erreichen – wie etwa bei Plato im Symposion die Idee des Schönen von den schönen Leibern und Seelen aus –, sondern man gelangt zu ihm durch eine radikale Umbiegung des Aufwärtsstiegs in eine ganz andere Richtung. (»Formalisierung.«) Auch zwischen dem allgemeinsten Anschaulichen (φανταστόν), der höchsten anschaulichen Gattung (εἶδος, γένος) und dem »Formalen« klappt noch

1) Der Gedanke einer ἔλη νοητή bzw. ἔλη τῶν μαθηματικῶν ist schon akademisch, vgl. Aristoteles, Met. Z 10 (1036 a 8–12), K 1 (1059 b 16).

dieselbe prinzipielle Kluft, wie zwischen konkretem Einzelding und »Form«.

Dieses abendländische »Mathematische Formale« hat also einerseits enge Beziehung zu dem durch die aristotelische ἀφαίρεσις gewonnenen ὄν ἡ ὅν, das sein ἴδιον hat. Andererseits ist es doch durchaus nicht »abstrakt« im Sinne der Unselbstständigkeit, sondern eine selbstständige Seinsphäre von überragender Bedeutung im abendländischen Rationalismus, dessen Gedankengänge wir nun ein Stück weit verfolgen müssen.

III. Die Weiterentwicklung des Mathematischen Formalen im Abendland.

A. Begrenzung dieser Darstellung.

Die weitere Geschichte der Idee der Mathematik kann aus verschiedenen Gründen nicht mit der bisherigen relativen Ausführlichkeit weiter verfolgt werden. Einmal nimmt der Stoff sofort einen gewaltigen Umfang an, der zur äußersten Beschränkung zwingt, und dann verflucht sich in der neueren Zeit die Geschichte der reinen Mathematik in unauflöslicher Weise mit der der mathematischen Naturwissenschaft. Die Antike hat nur vereinzelt mathematisch-naturwissenschaftliche Theorien von größerem Umfang entwickelt: die Astronomie, die Statik und Hydrostatik und (teilweise) die geometrische Optik. Stets hat sie an unmittelbar Beobachtbares angeknüpft oder hat sich mit sehr einfachen Instrumenten und Vorkehrungen, die auch sonst aus der täglichen Praxis bekannt waren, begnügt, niemals hat sie die im täglichen Leben auftretenden Naturerscheinungen in ihrer natürlichen Gestaltung von Grund auf »aufgelöst« (in Komponenten) wie die moderne Wissenschaft, sondern sie höchstens in ihre schon anschaulich sichtbaren Gestaltmomente »zerlegt«¹. Die Antike kennt nicht das systematische Experiment, sie zwingt die Natur nicht auf der Folter zur Antwort. So läßt die antike Wissenschaft auch nicht hinter der sichtbaren, »phänomenalen« Oberfläche der Natur eine der Anschauung im Laufe der Entwicklung immer fremder werdende »wahre Welt« zum Vorschein kommen, die nun zufolge ihrer Fremdartigkeit auch wieder neue begriffliche Beherrschungsmittel von der reinen Mathematik fordert. Dagegen besteht, von einem umfassenden Gesichtspunkt aus gesehen, eine ständige Wechselbeziehung zwischen Mathematik und Physik in der neueren Zeit. Die abendländische (so stark nordisch bestimmte) For-

1) Vgl. meine Rezension des Buches von E. Frank »Plato und die sog. Pythagoreer« im »Logos«, Bd. XIII, S. 133 ff., bes. S. 137, u. o. S. 252, Anm. 1.

schung dringt in die »Tiefe« der Natur in einem der gefalt-
denkenden Antike ganz fremden Maße ein und gelangt schrittweise
zu immer weniger anschaulichen Sachverhalten. Heute, am Ende
einer langen Entwicklung, haben wir die allgemeine Relativitäts-
theorie mit ihrer im großen unvorstellbaren nichteuklidischen Räum-
lichkeit und ihrer Aufhebung der Gleichzeitigkeit entfernter Ereignisse
erlebt und sind schließlich bis zu den vieldimensionalen Räumen der
Quantentheorie (Schrödinger)¹ und zu Hilberts bloß »idealen«
transfiniten Aussagen gelangt, die trotz ihrer sogar formal-onto-
logischen Unbegreiflichkeit dennoch sich auf »Wirkliches« beziehen,
allerdings nur als Bestandteile eines auch »eigentliche« Aussagen ent-
haltenden Systems.

Die abendländische Forschung ist einem Zauberlehrling zu ver-
gleichen, der sich in die magischen Zusammenhänge der Natur zu-
weit hineinwagte und der darüber seinen der natürlichen Gestalt-
haftigkeit des alltäglichen Lebens angepaßten »Verstand« verlor.
Das ist vielleicht mehr als eine Fabel, wenn man Verstand streng
im Kantischen Sinn auffaßt, in dem er lediglich die »klassische«
Galilei-Huyghens-Newton'sche Physik zu »verstehen« im-
stande ist.

Eine tiefgehende Erörterung der neueren Mathematik ist also
nur in Verbindung mit der neueren Physik möglich, und damit wäre
der Rahmen dieser Untersuchung überschritten. Es soll daher im
folgenden nur eine kurze Darstellung der drei Hauptstadien des
Begriffs des Mathematisch-Formalen, die durch die Namen Des-
cartes, Leibniz und Kant repräsentiert werden, nebst einigen
ergänzenden Bemerkungen gegeben werden.

B. Descartes und seine Zeit.

Die sogenannte »moderne« Mathematik nimmt ihren Anfang mit
der Entstehung dreier neuen Disziplinen, denen bald darauf noch
eine vierte, wichtigste folgte. Es sind das die Algebra (Buch-
stabenrechnung, Lösung algebraischer Gleichungen), die projektive

1) Vgl. darüber H. Weyl, im »Handbuch der Philosophie« (München 1926,
Oldenbourg), Abt. II, A, Seite 142, 20ff., bes. Zeile 48ff.: Ein »materieller
Vorgang«, den man als rein virtuell betrachten mag, ist zu supponieren, der
sich in einem vieldimensionalen Medium abspielt und strengen Gesetzen, näm-
lich partiellen Differentialgleichungen vom Typus der Schwingungsgleichung
genügt. Die wirkliche vierdimensionale Welt ist in jenes Medium ein-
gebettet. Durch eine auf statistischen Prinzipien beruhende »Projektion« des
supponierten materiellen Vorgangs auf diese wirkliche Welt ergeben sich die
beobachtbaren »Feldererscheinungen«.

Hufferl, Jahrbuch f. Philosophie. VIII.

und die analytische Geometrie, denen allmählich die Infinitesimalanalyse, die im Grunde eine Theorie der Funktionen ist, folgt. Die Buchstabenrechnung entsteht allmählich während des Mittelalters (Jordanus Nemorarius um 1200) und erreicht im wesentlichen mit Viète (1540 – 1603) ihren Abschluß¹. Vorher noch erfolgt die allgemeine Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades durch die großen italienischen Algebraisten (Tartaglia 1539, Ferrari 1545). Die projektive Geometrie wird von Desargues (1593 – 1662) begründet, die analytische von Fermat (1601 – 1665) und Descartes selbst (La Géométrie 1657). Fermat und Pascal (1623 – 1662) legen gleichzeitig den Grund für die infinitesimalen Disziplinen, deren systematische Ausbildung erst der nächsten Epoche (Ende des 17. Jahrhunderts) angehört.

Alle diese neuen mathematischen Disziplinen haben das Gemeinsame, daß sie die spätantike Sehnsucht nach einer über die anschauliche Gestalt hinausführenden Mathematik erfüllen. (Man könnte dies höchstens für die projektive Geometrie bezweifeln, aber es ist doch auch ihre spezifische Eigenart gegenüber der antiken, daß sie anschaulich Disparates kontinuierlich ineinander überführt mittels des »idealen« Unendlichfernen, etwa die Ellipse über die Parabel in die Hyperbel und dgl.).

Zwei methodische Mittel (die in späterer Zeit in eine nahe Beziehung treten) spielen dabei eine entscheidende Rolle: die (nicht immer eindeutige) Abbildung bzw. Zuordnung, die mit dem Begriff der Funktion eng zusammenhängt und nicht nur zwischen Gebilden gleicher Art, sondern z. B. auch zwischen abstrakten Zusammenhängen und ihren Symbolen stattfinden kann, und das Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze. Es wird immer noch zu wenig beachtet, daß diese beiden fundamentalen nicht-antiken² Begriffe im abendländischen späten Mittelalter anscheinend unbeeinflußt von anderen Kulturkreisen entstanden sind.

1) Grundlegend: Vieta, in artem analyticam isagoge, Tours 1591.

2) Es gibt immerhin auch in der Antike gewisse Anwendungen des Begriffs der Abbildung, wie perspektivische und stereographische Projektion, aber da nur zwischen anschaulichen Gegebenheiten gleicher Art. Außer der formalen Proportionenlehre, die, wie wir sahen, ja als einziges mathematisches Beispiel eines über die εἶδη hinausführenden κοινόν fortwährend genannt wird, gibt es – nach den Erläuterungen von H. Czwalina, des Übersetzers der archimedischen Schriften in »Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften« – bei Archimedes einzelne tiefe, aber in der antiken Darstellung ganz verdeckte Beispiele. (Vgl. darüber den »Anhang« zur Übersetzung der Schrift »Über Spiralen« [Nr. 201], besonders S. 63–71).

Sie finden sich ebensowenig im Orient wie in der Antike und sie sind es doch im Grunde, die die freischwebende »reelle« Zahl der Orientalen für das Abendland erst fruchtbar gemacht haben. Nicole Oresme (der um 1360–1370 schrieb) begründet zuerst eine zwar primitive, aber doch genial vorausahnende Theorie der Funktion (f. oben S. 149 ff.) und wendet zuerst das Permanenz-Prinzip an, auf das Rechnen mit Potenzen mit gebrochenen Exponenten. (»Algorismus proportionum«)¹. Die symbolische Darstellung abstrakter Zusammenhänge entwickelt sich allmählich, nicht ohne orientalischen Einfluß.

Die ungeheure Bedeutung des Abbildungsbegriffes und des Permanenz-Prinzips bis in die heutige Zeit ist bekannt, aus dem ersten leitet sich die moderne Koordinatengeometrie, die Funktionen- und vor allem die Gruppen- und Invariantentheorie her, und auch in der Mengenlehre spielt er eine entscheidende Rolle (eindeutige und »ähnliche« Abbildung und dgl.); aus dem zweiten entspringen alle jene Erweiterungen des Zahlbegriffs (negative, imaginäre, ideale, z. T. auch transfinite Zahlen) und anderer mathematischer Begriffe, die schließlich in der Hilbertschen Mathematik der transfiniten »idealen« Aussagen gipfeln².

Wenn also auch die Wurzeln der gesamten modernen Mathematik schon vor Descartes liegen und er selbst an ihrer Entstehung entscheidenden Anteil hat, so ist doch andererseits nicht zu verkennen, daß die kartesische Epoche die abendländische Wissenschaft noch in einem relativ primitiven Stadium zeigt. Die Assimilation der antiken und orientalischen Mathematik ist rein inhaltlich vollendet, und viel Neues ist über das antike und orientalische Wissen hinaus gefunden, aber in den Methoden ist die Gebundenheit an antike

Es ist aber auch hier, wie sonst, das Genie des Archimedes über die Schranken des wissenschaftlichen »Stils« seiner Zeit und seines Kulturkreises hinweggeschritten.

1) Vgl. dazu: H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter (Leipzig 1874), Seite 350–51. Hankel ist übrigens derjenige Mathematiker, der das Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze zuerst systematisch unter diesem Namen in die Mathematik eingeführt hat. (»Theorie der komplexen Zahlensysteme«. 1867.) – Die nächste Anwendung des Prinzip nach Oresme erfolgte von Chuquet (um 1500): Potenzen mit negativen Exponenten; die negativen Zahlen selbst führt erst Stifel (1544) systematisch ein; zugleich oder nur wenig später rechnet man bereits mit imaginären Zahlen: Cardano, »Ars magna« 1545, Bombelli, »l'algebra« 1579 (Lösung des casus irreducibilis der kubischen Gleichung).

2) Vgl. bef. die Darstellung Hilberts in dem oft erwähnten Aufsatz »Über das Unendliche« (Math. Ann. 95).

Vorstellungsweisen noch längst nicht überwunden. Dies ist nun von schwerwiegendem Einfluß auf die Philosophie der Mathematik des Descartes und deshalb mußten wir auch die mathematische Entwicklung bis zu ihm kurz skizzieren.

Die antike Gebundenheit Descartes' äußert sich einmal in seiner an der antiken Form des axiomatischen Aufbaus orientierten allgemeinen wissenschaftlich-philosophischen Methode in den »Regulae ad directionem ingenii« und im »Discours sur la méthode«. Sie wurde von Spinoza auf die Spitze getrieben (*demonstratio more geometrico*), findet sich aber auch gelegentlich schon in rein philosophischen Fragen bei Descartes. (Vgl. die »Einwände und Erwiderungen« zu den Meditationen, Anhang zu den »zweiten Erwiderungen«; p. 217 ff. der Original-Ausgabe.)

Sie ist freilich die allgemeine exakt-wissenschaftliche Darstellungsform der ganzen Zeit (man denke an die Hauptwerke von Galilei, Kepler, Huyghens). Aber Descartes hat als Philosoph das Auszeichnende, daß er sich über das Wesen dieser Methode klar werden will¹. Sein grundlegendes Prinzip der Evidenz (*clara et distincta perceptio*) rührt daher. Es ist im Grunde ein geometrisches Prinzip, gegründet auf reine Anschauung (*intuitio, intellectio*). Nicht nur wird die Wissenschaft von der materiellen Welt ganz auf die *extensio* gegründet, sondern auch die *res cogitans* hat doch in der klaren Durchsichtigkeit ihrer Struktur etwas »Geometrisches« im übertragenen Sinn. Es ist bei dieser allgemeinen Haltung nicht verwunderlich, daß auch die allgemeine Idee der Substanz sich ihrem Seinscharakter nach nicht eigentlich über die dinglich-raumhafte Sphäre erhebt. Sie wird charakterisiert durch ihre Unbedürftigkeit². (*Per substantiam nihil intellegere possumus, quam rem quae ita existit, ut nulla alia re indigeat ad existendum. Princip. philos. I, 51.*) Im eigentlichen, radikalen Sinn ist daher nur Gott als *ens perfectissimum* Substanz (*Et quidem substantia, quae nulla plane re indigeat, unica tantum potest intellegi, nempe Deus. ibid.*) Die geschaffenen Substanzen, Materie und Geist bedürfen wenigstens nur Gottes Hilfe zum Sein. (*solo Dei concursu egent*

1) Außer den »regulae« und der Schrift über die Methode ist der erste und z. T. der zweite Teil der »*principia philosophiae*« von Wichtigkeit, wo der systematische Aufbau der kartesischen Philosophie am klarsten hervortritt.

2) Zu den folgenden ontologischen Bemerkungen ist die kurze, aber alles Wesentliche hervorhebende Darstellung, die Heidegger in »*Sein und Zeit*« §§ 19–21 (S. 89 ff.) von den Grundzügen der kartesischen Ontologie gegeben hat, zu vergleichen.

ad existendum. Princ. I, 52.) Die Selbständigkeit der Substanzen drückt sich in ihrer Dauer gegenüber dem Wechsel der Modi bzw. Qualitäten aus, ihre spezifische Eigentümlichkeit zeigt sich der Erkenntnis als ein »Attribut«¹. Jede Substanz hat eine ausgezeichnete Eigenschaft, aus der ihr spezifisches Wesen ableitbar ist. (Et quidem ex quolibet attributo substantia cognoscitur: sed una tamen est cujusque substantiae praecipue proprietas, quae ipsius naturam essentiamque constituit et ad quam aliae omnes referuntur. Princ. I, 53.) Für die Materie ist das die Ausdehnung (extensio), für den »Geist« (mens) das »Denken« (cogitatio).

Unter den »Universalien«, die auf jegliches Seiende angewandt werden können, figurieren also Dauer, Ordnung, Zahl (duratio, ordo, numerus). Von diesen wird gesagt, daß sie, auch ohne daß ihnen der Begriff einer Substanz hinzugefügt würde, erkennbar seien, denn sie seien nur Modi, unter denen wir die Dinge auffaßten². Es erscheint also hier das Mathematische als »formal« im modernen Sinn, oder als »abstrakt« (ὁλ' ἀφαίρεσως) in der aristotelischen Bedeutung, denn die »Modi, gemäß denen wir die Dinge betrachten« entsprechen genau den Hinsichten, nach denen der Mathematiker nach Aristoteles (Met. K3, 1061a, 34s.) die Dinge und ihre Zustände betrachtet (τὰ πάθη τὰ τούτων ἢ ποσά ἐστι καὶ συνεχῆ καὶ οὐ καθ' ἑτερόν τι θεωρεῖ; f. oben S. 286³). Aber andererseits wird doch in den »Regulae« die »Mathesis universalis«, die die formalen Eigentümlichkeiten unterschiedslos aller Dinge betrachten soll, charakterisiert als »eine bestimmte allgemeine Wissenschaft« von allem, »was der

1) »Verumtamen non potest substantia primum animadverti ex hoc solo, quod sit res existens: quia hoc solum per se nos non afficit: sed facile ipsam agnoscimus ex quolibet ejus attributo . . .« (Princ. I, 52). » . . . sed cum consideramus substantiam ab illis [modis latiore sensu] affici vel variari, vocamus modos; cum ab ista variatione talem posse denominari, vocamus qualitates; ac denique, cum generalius spectamus tantum ea substantiae inesse, vocamus attributa. (Princ. I, 56.) Vgl. ferner Princ. I, 64, 65.

2) »Duratio, ordo et numerus, a nobis etiam distinctissime intelliguntur, si nullum iis substantiae conceptum affingamus, sed putemus durationem rei cujusque esse tantum modum, sub quo concipimus rem ipsam, quatenus esse perseverat. Et similiter, nec ordinem nec numerum esse quicquam diversum a rebus ordinatis et numeratis, sed esse tantum modos, sub quibus illas consideramus.« (Princ. I, 60.)

3) Vgl. hierzu noch Principia I, 57–59, besonders I, 58: »Ita etiam, cum numerus non in ullis rebus creatis, sed tantum in abstracto, sive in genere consideratur, est modus cogitandi duntaxat: ut et alia omnia quae universalialia vocamus.«

Ordnung und dem Maße unterworfen, ohne Anwendung auf eine besondere Materie, als Problem auftreten kann«¹. Die Universalmathematik, die eine geheim gehaltene Methode der alten Geometer (!) – Spuren davon seien bei Pappos und Diophant überliefert – zur allgemeinen Kenntnis bringen soll, von der Geometrie und Algebra »spontane Früchte sind, die aus den einzelnen Prinzipien der Methode entspringen«, ist also an dem Begriff des Maßes (mensura) orientiert. Es fragt sich nur, ob sie damit nicht die ihr eigentlich zukommende »formale« Sphäre verläßt und sich nicht, wenn auch nicht eingeständenermaßen, nach dem »materialen« Wesen des anschaulichen Raumes richtet. Wenn als Eigenschaften der ausgedehnten Materie Größe (magnitudo), Gestalt (figura), örtliche Bewegung (motus localis) usw. genannt werden, so fragt es sich, ob denn nicht nur auf diese konkreteren Eigentümlichkeiten »Ordnung« und »Maß« angewandt werden können. Die denkende Substanz, die diese Eigenschaften nicht hat, kann eigentlich nur ihrer Zeitdauer nach (duratio ist ein universale!) dem Maße unterworfen werden. Dabei ist aber die Zeit offenbar genau so gemeint wie die objektive Zeit der Natur; die »Bewegtheit« des Geistes (mens) ist von der Seins-Art der Ortsbewegung in der Natur.

Die Stellung der Universalmathematik wird nun von zwei ganz verschiedenen Eigentümlichkeiten der Descartes'schen Philosophie und Mathematik noch schärfer beleuchtet.

Erstens von einer mathematischen Eigenart: Die mathematische Existenz ist (wie wir in § 5b II A sahen) bei Descartes, wie auch bei Viète, noch durchaus im klassisch-antiken Sinn auf Geometrie begründet. Der symbolische Kalkül (die Buchstabenrechnung) trägt sich nicht selbst, ist nicht der Ausdruck einer in sich gegründeten abstrakt-analytischen Mathematik, sondern die kartesische Mathematik ist ontologisch durchaus analytische Geometrie: es wird keine irrationale Zahl zugelassen, die nicht im klassisch-antiken Sinn konstruierbar ist, die allgemeinste von Descartes betrachtete algebraische Kurve ist der »Ort zu 2n Geraden« des Pappos, der allgemeinste »lineare Ort« den die Antike kennt (s. oben S. 139, Anm. 2; S. 149).

1) Regula IV. (S. 11/12 der Originalausgabe): »... illa omnia tantum, in quibus ordo vel mensura examinatur, ad Mathesim referri, nec interesse, utrum in numeris, vel figuris, vel astris, vel sonis aliove quovis objecto talis mensura quaerenda sit, ac proinde generalem quandam esse debere scientiam, quae id omne explicat quod circa ordinem et mensuram nulli speciali matereriae addicta quaeri potest...«

Zweitens ist in logischer Hinsicht ein klarer Unterschied zwischen generalisierender und formalisierender Verallgemeinerung (im Sinne Hufferls, Ideen § 13) nicht bei Descartes zu finden. Er stellt (Princ. I, 59) als Beispiel eines universale die Zahl und die Figur eines Dreiecks unmittelbar nebeneinander. Die Art der Abstraktion, die vom Beispiel der zwei Steine oder zwei Vögel zur Zahl zwei führt, ist genau dieselbe, die uns von verschiedenen dreieckigen Figuren zur »universalen« Idee des Dreiecks bringt.¹

Endlich hängt mit dieser mangelnden Unterscheidung auch die eigentümliche Stellung zusammen, die Descartes zum überlieferten scholastischen Problem der »Analogie des Seins« (analogia entis) und der Lehre von der »Transcendentalien« hat. Er stößt notwendig auf das Problem der Analogie beim allgemeinen Begriff der Substanz, die nicht »univoce«, in demselben Sinn, von dem unendlichen, ungeschaffenen Wesen Gottes und den endlichen geschaffenen Wesen des Geistes und der Materie ausgesagt werden kann²: »Atque ideo nomen substantiae non convenit Deo et illis univoce, ut dici solet in Scholiis, hoc est, nulla eius nominis significatio potest distincte intellegi quae Deo et creaturae sit communis.« (Princ. I, 51) Die Scholastik faßt den gemeinsamen Sinn des Wortes Substanz als ein »analoges Bedeuten«, das weder einseitig (univoce, *συνωνύμως*) noch bloß gleichnamig (aequivoce, *δμωνύμως*) ist. Descartes aber weicht dem Problem aus, indem er leugnet, daß eine »gemeinsame« Bedeutung von Substanz im Falle

1) »Fiuntque haec universalia ex eo tantum, quod una et eadem idea utamur ad omnia individua, quae inter se similia sunt cogitanda: ut etiam unum et idem nomen omnibus rebus per ideam istam representatis imponimus, quod nomen est universale. Ita cum videmus duos lapides nec ad ipsorum naturam, sed tantum quod duo sint attendimus, formamus ideam ejus numeri quam vocamus binarium, cumque postea duas aves aut duas arbores videmus, nec etiam earum naturam, sed tantum quod duae sint consideramus, repetimus eandem ideam quam prius, quae ideo est universalis, ut et hunc numerum binarium eodem universali nomine binarium appellamus. Eodemque modo, cum spectamus figuram tribus lineis comprehensam, quandam ejus ideam formamus, quam vocamus ideam trianguli, et eadem postea ut universali utimur, ad omnes alias figuras tribus lineis comprehensas animo nostro exhibendas.« — Es wird offenbar nicht der geringste Unterschied gemacht zwischen der »formalisierenden« Verallgemeinerung, die zur Zahl zwei, und der in der materialen Region »Raumgestalt« verbleibenden »Generalisierung«, die zur Idee des Dreiecks führt.

2) Vgl. zum folgenden Heidegger »Sein u. Zeit«, S. 93, der für die scholastische Lehre auf Caietanus (Opuscula [Lugduni 1580] III, Tract. V, p. 211–219 »de nominum analogia«) verweist.

Gottes und der Kreatur überhaupt möglich sei. Das heißt: Descartes verzichtet darauf, dem »transcendentalen« Sinn eines formal-ontologischen Begriffs wie Substanz nachzugehen. In der Tat gehört ja auch die Substanz traditionell zu den Kategorien (noch bei Kant) und nicht zu der Transcendentien, obwohl ihr formaler, den Unterschied zwischen Gott und Kreatur überspringender Gebrauch eigentlich »transcendental« ist.

Die Transcendentienlehre selbst erwähnt zwar Descartes mit keinem Wort, aber trotzdem erfleht gewissermaßen seine Idee der Mathesis universalis und des allgemeinen Substanzbegriffs die alten Transcendentien. Das Seiende als solches wird als ständige Vorhandenheit gefaßt (*remanens capax mutationum substantia* = *subsistens*), die der intellectio, dem schauenden Erfassen in der Weise des Mathematikers entspricht¹.

Über die Transcendentienlehre selbst sei bemerkt, daß sie an sich der Mathematik inhaltlich ganz fernsteht, daß sie aber, wie wir sahen, schon bei Aristoteles, als Lehre vom $\delta\upsilon\ \eta\ \delta\upsilon\upsilon$, dem die Kategorien (die $\epsilon\acute{\iota}\delta\eta$ und $\gamma\acute{\epsilon}\nu\eta$) und auch den Gegensatz von Gott und Welt übersteigenden Sein, doch mit der »formalen«, das $\epsilon\acute{\iota}\delta\omicron\varsigma$ hinter sich lassenden Mathematik methodisch (wie sich schon in der gemeinsamen Partikel η bzw. $\omega\varsigma$ ausdrückt) verwandt ist. Auch in der »Operation« der *additio* ($\pi\rho\acute{o}\sigma\theta\epsilon\sigma\iota\varsigma$, nicht $\sigma\upsilon\nu\theta\epsilon\sigma\iota\varsigma$)² bei Alexander Halensis, Thomas Aquinas und Duns Scotus³ liegt immerhin ein Verfahren vor, das aus dem leeren *ens transcendens* eine Reihe *modi entis* entwickelt unter sorgfältiger Vermeidung aller Spezifizierung und alles Kategorialen. Dieser *additio* müßte das Verfahren einer wirklichen *mathesis universalis* entsprechen. Es gibt tatsächlich auch im Mittelalter in der Idee des Raimundus Lullus (1235–1315), durch eine kombinatorische *scientia generalis*⁴ ein allen Wissenschaften gemeinsames System von Grundbegriffen aufzustellen, einen gewissen universalmathematischen Ansatz, der stark auf Leibniz gewirkt hat. Allerdings steht der Autodidakt Lullus nicht in der Tradition der Transcendentienlehre. —

1) Vgl. Heidegger, l. c. 95–96. Dazu ist noch zu bemerken, daß sich das Sein der *res cogitans* von dem der *res extensa* im Grunde seinem Wie nach nicht unterscheidet.

2) Ich möchte vermuten, daß der Terminus »*additio*« = $\pi\rho\acute{o}\sigma\theta\epsilon\sigma\iota\varsigma$ von der Stelle: Aristoteles, *Met. Γ 2* (1003 b 30 f.) herrührt: »... ὥστε φανερόν ὅτι ἡ πρόσθεσις ἐν τούτοις ταῦτ' ὁλοῖ, καὶ οὐδὲν ἕτερον τὸ ἐν παρὰ τὸ ὄν.«

3) Zitate bei Knittermeyer, l. c (f. o. S. 256, Anm. 1).

4) Vgl. die kurze aber klare Darstellung bei Joh. Ed. Erdmann, *Grundriß der Geschichte der Philosophie* (4. Aufl., Berlin 1896), Bd. I, S. 417 ff.

Anhangsweise sei noch, zur Vergleichung mit späteren Stellungen die Stellung des Descartes zum Unendlichkeitsproblem kurz gekennzeichnet. Sie hängt in gewissem Sinn mit seiner Umgehung der Frage der Analogie des Seins von Gott und Kreatur zusammen. So wie nämlich alle Gemeinsamkeit zwischen der unendlichen und endlichen Substanz abgelehnt wird, so wird auch ein unüberbrückbarer Abstand zwischen dem »infinitum«, der Unendlichkeit Gottes und dem allein dem Menschen als endlichem Wesen zugänglichen indefinitum (dem Endlosen) angenommen¹. Von Gott sehen wir positiv ein (»positive intellegimus«), daß er keine Grenzen hat, von der Ausdehnung der möglichen Dinge aber kennen wir nur die Grenzen nicht, aber sie können möglicherweise vorhanden sein. (Negative tamen eorum limites, si quos habeant, inveniri nobis non posse confitemur.)

Descartes bleibt also auch hier auf dem antiken Standpunkt des ἀπειρον δυνάμει ὄν, denn das ist das indefinitum, stehen².

So sehen wir, daß er auf allen Gebieten zwar die Wendung zur modernen Mathematik einleitet, aber keineswegs durchführt, wie er auch in seiner Physik, darin sogar hinter seinen Zeitgenossen Galilei und Huyghens zurückbleibend, noch keineswegs sich zum neuen dynamischen Standpunkt hindurchringt. Grundlegend ist überall Descartes' geometrische Orientierung, der Raum ist ihm noch nicht problematisch geworden; vielleicht zeigt sich in nichts deutlicher als gerade darin seine Gebundenheit an das gestalthafte Denken der Antike.

Darin liegt zugleich, daß er den Grundgedanken der finiten Konstruktion, der aus der klassischen Antike als »στοιχείωσις« überkommen war, niemals verläßt. Er ist in demselben Sinne wie die Antike »naiver Intuitionist«, das Problem, das in dem Gegensatz der möglichen Auffassungen »Intuitionismus — Formalismus« liegt, ist ihm noch nicht aufgegangen³.

1) Princ. I, 26: ita nullis unquam fatigabimus disputationibus de infinito. Num sane, cum sumus finiti, absurdum esset, nos aliquid de ipso determinare atque sic illud quasi finire ac comprehendere conari Haecque (geschaffene endlose Dinge) indefinita potius dicemus quam infinita.

2) Man vgl. Galileis Äußerung im Dialogo (Opere compl., Firenze 1842/56, Bd. I, S. 116) über den Unterschied der menschlichen, Schritt für Schritt von Schluß zu Schluß fortschreitenden, mathematischen Erkenntnis und dem göttlichen Intellekt, der durch bloße Erfassung des Wesens ohne zeitliches Erwägen die unendliche Fülle seiner Eigenschaften ergreift.

3) Die intelletio (das διανοεῖν) baut sich auf den intuitio (dem νοεῖν als reinem Hinsehen) problemlos auf. Vgl. Heidegger, l. c. S. 96.

Descartes Philosophie der Mathematik ist daher für unser fachliches Problem nicht mehr von ins Gewicht fallendem Belang, nur als Inauguration der neuen Mathematik ist sie von historischem Interesse. Dagegen ist Leibniz, dem wir uns nunmehr zuwenden, geradezu als diejenige Persönlichkeit der neueren Geschichte aufzufassen, in der die innige Durchdringung bahnbrechender philosophischer und mathematischer Gedanken in einer weder früher noch später auch nur annähernd erreichten Intensität gelang.

C. Leibniz.

Die historische Betrachtung Leibnizens ist von einschneidender fachlicher Bedeutung für die systematischen Probleme dieser Untersuchung, denn in Leibniz erst gelangt das abendländische mathematische Denken zum philosophischen Bewußtsein seiner Eigenart gegenüber der Antike. Im Gegensatz zu Descartes ist Leibniz der große Arithmetiker¹. Er ist der erste Mathematiker, der die moderne abstrakte Mathematik ganz auf sich selbst stellt, d. h. von der Arithmetik aus entwickelt. Trotz seiner veröhnlichen Haltung gegenüber der antik-mittelalterlichen Tradition vollzieht er doch den methodisch entscheidenden Schritt über die antike geometrische Konstruktion als Basis der mathematischen Existenzbeweise hinaus. Unabhängig von Barrows und Newtons geometrisch-kinematischer Betrachtungsweise begründet er den arithmetischen, d. h. den rein analytischen Funktionsbegriff und auf diesem basierend die Infinitesimalanalyse, die er allein zu einer eigentlichen Rechnung entwickeln kann, wodurch erst die Analysis zum systematischen Lehrgebäude wird. Dieses »algorithmische« Moment ist auch in vielen anderen Untersuchungen für ihn charakteristisch, in der Zahlentheorie (Algebra, Determinantenlehre), in der sogenannten »Analysis situs« (womit eine »direkte Analysis« zur Geometrie, etwa im Sinne unserer heutigen Vektor- und Tensorrechnung intendiert ist), im Logikkalkül. Darüber hinaus gipfeln alle diese Disziplinen in einer echten Mathesis universalis. Sie ist nicht mehr, wie bei Descartes, die allgemeine Wissenschaft von der Größe oder Quantität, sondern die allgemeinste Wissenschaft der Ordnungsformen und qualitativen Relationen, die die von ihm selbst geschaffene

1) Den Gegensatz des Descarteschen »Geometrismus« und des Leibnizschen »Arithmetismus« hat Schmalenbach in seiner Leibniz-Darstellung (München 1921) betont. Wir übernehmen von ihm die Termini, ohne damit seine fachlichen Darlegungen, die teilweise sehr anfechtbar sind, uns in größerem Umfange zu eigen zu machen.

Kombinatorik mit umfaßt. Indem alle diese deduktiven Systeme in der Zeichenschrift der »allgemeinen Charakteristik« ausgedrückt werden, wird die Mathesis zur »Algebra universalis«, die in »Logistik« (symbolischen Mathematik der Quantität) und »kombinatorische Charakteristik« (symbolische Mathematik der Qualität) zerfällt¹. Unter die zweite fällt auch die »geometrische« Charakteristik; damit ist endgültig die Geometrie von der Kombinatorik bestimmt und (auch als »synthetische«) als mathematische Grundwissenschaft überwunden.²

Der zentralste Punkt ist aber vielleicht, daß dieses Problem der »universellen Charakteristik«, der Darstellung abstrakter, ja jeglicher (menschlicher) Anschauung transzendenten Zusammenhänge durch sinnlich-anschauliche Symbole in den Mittelpunkt seiner Philosophie tritt. Wenn man einen Begriff als den tragenden und eigentlich ausschlaggebenden des Leibnizischen Systems bezeichnen darf, so ist es der der Repräsentation. In ihm laufen alle Fäden der verflochtenen Motivation des gigantischen Gewebes der Leibnizischen Philosophie zusammen: der grundlegende mathematische Begriff der Abbildung (nicht nur zwischen gleichartigen, sondern auch zwischen [anscheinend] verschiedenartigen Gefügen)³, der uralte mythisch-magische Gedanke der universellen »Sympathie« aller Dinge und gewisse speziellere Lehren der philosophischen Tradition (die antike Bildchen [*εἰδωλον*]-Theorie der Erkenntnis und Mikrokosmoslehre und die christlich-mittelalterliche »analogia entis«-Theorie in der Metaphysik)⁴. Es ist von besonderer Wichtigkeit, daß diese repräsen-

1) Vgl. L. Couturat, la logique de Leibniz. Paris 1901. Vgl. (Mahnke, ds. Jahrb. VII., S. 338.)

2) Charakteristisch ist folgende (frühe) Stelle (Gerhard, philos. Schriften VII, 184 = Cassirer-Buchenau I, 30 »... Manches weist keine Teile auf und entzieht sich somit der Messung ... Dagegen gibt es nichts, was nicht der Zahl unterworfen wäre. Die Zahl ist daher gewissermaßen eine metaphysische Grundgestalt und die Arithmetik eine Art Statik des Universums, in der sich die Kräfte der Dinge enthüllen.«

Es klingen in dieser frühen Stelle noch zahlenmythische Motive an. Aber grundfänglich ist doch die Kategorie der Qualität überwunden und die Zahl als Eigentümlichkeit alles Seienden (als solchen) gegenüber dem »Maße« herausgehoben.

3) Daß es eigentlich nichts ganz Verschiedenartiges gibt, ist der Sinn des Kontinuitäts-Prinzips.

4) Die folgende Darstellung stützt sich vor allem auf die die gesamte wichtige moderne Leibnizliteratur zusammenfassende und kritisch unter Rückgang auf die primären Quellen darstellende ausgezeichnete Arbeit D. Mahnkes »Leibnizens Synthese von Universalmathematik und Individualmetaphysik«.

tierende »Abbildung« nicht bloß zwischen in ihrer Seinsart übereinstimmenden Systemen stattfinden kann, sondern auch zwischen (anscheinend) gänzlich disparaten, wie zwischen Gott und Kreatur. Während noch Descartes leugnete, daß der Begriff der Substanz in gleicher Weise auf Gott und Kreatur angewandt werden könne, ist für Leibniz Gott eine Monade (individuelle Substanz), in gewissem Sinne sogar neben den anderen Monaden, mit ihnen dadurch zu tiefer Gemeinsamkeit verbunden, daß sie alle »das Univerſum widerſpiegeln«. (Was nicht als ein paſſives Reflektieren, ſondern als ein aktives Schaffen und Nachſchaffen zu verſtehen iſt). Der vereinzelteten Iſoliertheit (»Fenſterloſigkeit«) der »individuellen Subſtanz« hält das Eingebettetheit in dem univerſalen harmoniſchen Zuſammenhang immer die Wage: ganz aus ſich ſelbſt heraus lebend repräſentieren alle Individuen doch daſelbe Univerſum¹.

Zu dieſem vielleicht tiefften Leibnizſchen Begriff der Repräſentation, in dem das Individuelle wie das Univerſale gleichmäßig zu ſeinem Rechte kommt, tritt hinzu das Prinzip der Kontinuität aller Monaden, d. h. des Beſtehens einer ſtetigen Reihenfolge, beginnend mit der »transfiniten« Ideenwelt Gottes über ihre klare und deutliche Repräſentation in der indefiniten Gedankenwelt der vernünftigen Geiſter zu ihrer verworrenen, aber immer noch klaren Vorſtellung in den Sinneſphänomenen der Seele der höheren Tiere und endlich zu ihrer ganz dunklen Darſtellung in den petites perceptions der unterbewußten Monaden (der niederen tieriſchen und pflanzlichen Organismen und der lebloſen Körper)².

In dieſem unendlich reichen Kontinuum von Möglichkeiten (in der Geſamtheit aller Möglichkeiten gibt es nicht wie in der Wirklichkeit ein vacuum formatum) iſt jedes einzelne individuelle Glied durch ein »individualiſierendes Bildungſgeſetz« oder »volldeutig« (Pichler) beſtimmt.³ Dieſer eigenartige Begriff

(In dieſem Jahrbuch Bd. VII, S. 305 ff. u. auch ſeparat [Halle 1925] erſchienen. Ich zitiere ſtets nach dieſer Separatausgabe, deren Paginierung auch im Jahrbuch mit angegeben iſt.) Von da aus ſind die Einzelnachweiſe leicht zu finden. — Für die »Repräſentation« vgl. l. c. § 21, beſ. S. 214 ff.

1) Dieſ iſt eigentlich das immerwährende Grundthema der Mahnkeſchen Ausführungen, daß jeder Verſuch, einſeitig den individualiſtiſchen oder den univerſaliſtiſchen Pol der Leibnizſchen Philoſophie hervorzukehren, an der Hand der Quellen zurückgewieſen wird.

2) Vgl. Mahnke l. c. S. 156, dazu S. 188 f. (Schwarz), S. 190 (Windelband).

3) Für das folgende vgl. Mahnke l. c. § 20 über Pichlers Leibnizdeutung.

der *universitas ordinata*, die das eigentliche totum im Gegensatz zum bloßen *compositum* oder *aggregatum* kennzeichnet, ist ein *principium individuationis*, das den ganzen Begriffsinhalt der Individuen erschöpfend darstellt. Die Leibniz-Wolffsche Lehre von der *ratio sufficiens*, nach der jede logische Wahrheit auf einer ontologischen, jeder »Erkenntnisgrund« auf einem »Seinsgrund« ruht, bedeutet nach Pichler, daß überall »ordo in varietate« herrscht, d. h. daß die Welt aus einer Hierarchie von »universitates ordinatae« ist. Das ist nichts anderes, als daß sie überall den aristotelisch-scholastischen »Transcendentalien«, dem *unum*, *verum*, *bonum* untersteht. Aber nicht nur die wirkliche Welt, sondern auch jede mögliche Gegenständlichkeit überhaupt, hat ihre innere Möglichkeit (»Widerspruchslosigkeit«), recht verstanden lediglich in dem Unterworfensein unter die allgemeinsten formal-analytischen Prinzipien. Während aber später Wolff das *principium contradictionis* allein für ausreichend hält, fügt Leibniz das selbständige *principium rationis sufficientis* hinzu und erweitert damit die formelle Logik zur Universalmathematik.¹ Denn nunmehr befaßt »innere Möglichkeit« die Einordnung in konkret-individualisierende Systembegriffe, darin liegt erst die »Verträglichkeit« der logischen Gegenstände (Pichlers, »Logik der Gemeinschaft«).

Diese drei Prinzipien, das der Repräsentation, der Kontinuität und des *ordo in varietate*, bzw. der *universitas ordinata* (der »volldeutigen Bestimmtheit« oder des »individualisierenden Bildungsgesetzes« nach Pichler) bestimmen nun auch die Leibnizsche Philosophie der Mathematik. Die große Leistung Leibnizens auf diesem Gebiet ist, die neuen »abendländischen« Möglichkeiten der Mathematik in ihrer ungeheuren Ausdehnungsfähigkeit und damit freilich unlösbar verbundenen tiefen Schwierigkeit, ja Fragwürdigkeit, entdeckt zu haben. Und vielleicht hat er sogar das

1) Diese Universalmathematik ist allerdings nicht mehr »analytisch« im Kantischen Sinne. Die ganze Frage der Bedeutung des Ausdrucks »analytisch« ist eine sehr verwickelte. Leibnizens Terminus »*in esse in subjecto*« ist nicht gleichbedeutend mit Kants »in einem (Subjekts-) Begriffe verdeckter Weise enthalten sein.« (K. d. r. V.², 10.) Gerade der Umstand, daß Wolff, der (nebst Baumgarten) Kant die Tradition des deutschen Rationalismus vermittelte, das *principium rationis sufficientis* fallen ließ und das *princ. contradictionis* allein als Grundlage formal-ontologischen Denkens beibehielt, scheint entscheidend bei dem geringschätzigen Urteil Kants über die rein analytischen Argumentationen, daß durch sie »unfere Erkenntnis gar nicht erweitert werde« (K. d. r. V.¹, 7), mitgesprochen zu haben.

Mittel zur Überwindung dieser Schwierigkeiten wenigstens grundföhllich angegeben.

Aus den bisher gegebenen geschichtlichen Darstellungen (nicht nur in § 6c, sondern auch in § 5b und § 6b) ergibt sich als das groöe mathematische Grundproblem die Frage nach dem Wesen und der Beherrschbarkeit des Unendlichen. Die antike Mathematik hatte sich (durch die schon so früh entdeckten Zenonischen Paradoxien vorfichtig gemacht) entschlossen für das *ἄπειρον δύναμει ὄν* entschieden und damit für das Prinzip der finiten, anschaulich-geometrischen Konstruktion als einziges Mittel des mathematischen Existenzbeweises. Dazu trat dann der unendliche (genauer: indefinite) konvergente Grenzprozeß, der aber nicht als selbständiges Beweismittel mathematischer Existenz diente. (Vielmehr mußten mechanisch-gestalthafte Betrachtungen als Ersatz dienen.) Erst kurz vor Leibniz (durch Gregory 1667¹⁾ wurde der konvergente Grenzprozeß als Definitionsmittel zugelassen. Leibniz selbst geht nun über diese bescheidene Konzeption des »indefinitum« weit hinaus. Gott, als ens perfectissimum, war seit langem (zulezt von Descartes, Spinoza u. a.) als infinitus im eigentlichen Sinne angefohen worden. Aber an seiner positiven Erkennbarkeit als infiten verzweifelte man (i. o. bezüglich Descartes S. 713f., und auch Spinoza faßt omnis determinatio als negatio, die gewissermaßen aus dem infiniten Urwesen durch Einschränkung Figuren herausfchneidet). Leibniz dagegen wird durch seinen Gedanken der universellen Repräsentation unmittelbar dahin geführt, in jedem noch so kleinen Weltstück, als Abbild bzw. Spiegel des Universums, eine aktuale Unendlichkeit von Einzelheiten anzunehmen².

Die Welt ist nach ihm eine »unendlichfache aktuale Unendlichkeit« indem erstens die Anzahl der Monaden aktual unendlich ist und dann noch jede einzelne Monade die »Konzentration« des

1) *Vera circuli et hyperbolae quadratura* Padua 1667 (sic, nach Eneström, *Bibl. Math.* X, (1909/10), S. 348f.). Vgl. Mahnke, *Abh. d. Preuß. Akademie* 1925, *Phyl. Math. Kl. Nr. 1*, Seite 29 mit Anm. 2; Seite 30 mit Anm. 2.

2) Vgl. Mahnke l. c. S. 138 u. Anm. 169, wo die folgende berühmte Belegstelle aus einem Briefe an Foucher zitiert ist (Gerhardt, *Philos. Schriften* I, 416): »Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer les perfections de son auteur. Ainsi je crois qu'il n'y a aucune partie de la matière qui ne soit je ne dis pas divisible mais actuellement divisée, et par conséquent, la moindre particelle doit estre considérée comme un monde plein d'une infinité de creatures differentes.«

aktual-unendlichen Universums ist, vermöge der doppelten sowohl intentionalen als realen Funktion der »Repräsentation«: als »Vorstellung« wie auch als »Darstellung«, als intentionales »Bewußthaben von ...« wie als reale »Vertretung« der göttlichen Ideenwelt. In bezug auf die erste Unendlichkeit der Monaden selbst tritt der *ordo in varietate* in sein Recht: die individuelle Monade ist durch das »individualisierende Bildungsgeſetz volldeutig beſtimmt« (Pichler), ſie hat in der *universitas ordinata* ihre ſyſtematiſche Stelle, wie eine natürliche Zahl in der Zahlenreihe, wie eine beſtimmte Irrationalität im Syſtem aller Irrationalen.

Hierin liegt nun offenbar ein ſchweres mathematiſch-philophiſches Problem. Denn in dieſem Gedanken der »volldeutigen Beſtimmtheit« iſt das finite Konſtruktionsprinzip der Antike und auch die indefinite Beſtimmungsmethode mittels des konvergenten Grenzprozeſſes überſchritten: die »Konſtruktion« der *universitas ordinata* iſt, in der Sprache Hilberts ausgedrückt, *transfinit* (aktual-transfinit, nicht bloß *transfinit* im Sinne eines erweiterten indefiniten Prozeſſes). Die »Volldeutigkeit« iſt, wie Mahnke mit Recht ſagt¹, das »höhere« Analogon der Definitheit im Sinne Hufferls. Während die definite Mannigfaltigkeit dadurch gekennzeichnet iſt, daß aus einer endlichen Anzahl von Begriffen und Sätzen die Geſamtheit aller möglichen Geſtaltungen innerhalb ihrer in der Weiſe rein analytiſcher Notwendigkeit vollſtändig und eindeutig beſtimmt iſt², fällt bei der volldeutigen Mannigfaltigkeit die Bedingung der Endlichkeit weg. Es werden auch Syſteme »von unendlich vielen Dimensionen und mit unüberſehbaren Bildungsgeſetzen« (Pichler) zugelaffen.

Bei zwei Gelegenheiten wird dieſe Idee der aktual-transfiniten Mannigfaltigkeit von Wichtigkeit: einmal beim Problem der »Realdefinition« und der »Tatſachenwahrheiten« (»*Contingentiae radix est infinitum*«³) und dann bei der ſchwierigen Frage des »Labyrinths des Kontinuums«.

Das erſte Problem zerfällt in zwei inhaltlich verſchiedene aber doch formal noch verwandte Unterfragen. Erſtens: ein Verfahren zu finden, um ſich *a priori* der Gültigkeit einer Realdefinition, d. h. der Verträglichkeit (*compossibilitas*) der begrifflichen Elemente des durch ſie beſtimmten Gegenſtandes zu verſichern. Zweitens:

1) »Leibnizens Syntheſe uſw.« S. 42f., 102, 198.

2) Vgl. Hufferl, »Ideen uſw.« S. 135 und Becker, *df. Jahrb.* VI, Seite 403ff.

3) Mahnke l. c. Anm. 43 am Schluffe (= Bodemann, L.-Handſchr. S. 121).

die »kontingenten« oder Tatsachenwahrheiten (*verités de fait* oder *contingentes*) auf identische (d. i. tautologische, formallogisch evidente) Sätze zurückführen. Die *verités de fait* sind nun, gegenüber den *verités de raison*, dadurch charakterisiert, daß sie (ähnlich wie die Irrationalzahlen gegenüber den Rationalzahlen) unendlich verwickelt sind. Ebenso gehört zur Zerlegung eines Begriffs in Elementar-begriffe ein unendlicher Regreß; die begriffliche Auflöfung ist in beiden Fällen für den Menschen nur asymptotisch erreichbar. Ein unendlicher Intellekt würde zwar auch weder die Begriffe noch die »zufälligen Wahrheiten« (*verités contingentes*) »zu Ende analysieren« können, aber, das Gesetz des Regresses gleichsam durchschauend, sich die Verträglichkeit der unendlich vielen Elementar-begriffe und den Zusammenhang der kontingenten mit den notwendigen Wahrheiten evident machen können¹. Denn die Elementar-begriffe bilden eine nicht endlich erschöpfend definierbare Mannigfaltigkeit². Es fragt sich nun, wie man sich der Gültigkeit einer Realdefinition als Mensch versichern kann. Dies kann man entweder durch empirische Beobachtung des empirischen Gegenstandes oder a priori durch die Angabe der Erzeugungsweise des Begriffs, durch die sogenannte »kausale Definition«, wie z. B. die Konstruktionsmethode einer Kurve. Im gewissem Sinne ist also die Frage der Verträglichkeit (*compossibilitas*) bei tatsächlichen Gegenständen ein logisch-analytisch unlösbares Problem, das nur Gottes infallibilis visio lösen kann³. Zur apriorischen Erkenntnis der Möglichkeit müssen

1) Siehe über Tatsachenwahrheiten: Ma h n k e, l. c. S. 37/38, dazu Anm. 43 (S. 240f.).

2) L. c. S. 42. — Ferner über Realdefinition S. 25, Anm. 32, S. 121–123.

3) S. Ma h n k e l. c. Anm. 32 (S. 236ff.): »Habemus ideas simplicium, habemus tantum characteres compositorum . . . Non habemus ideam Dei . . . Et hoc facit, ut non possimus facile judicare de rei possibilitate ex cogitabilitate ejus requisitorum, quando singula ejus requisita cogitavimus atque in unum conjunximus. . . Non possumus in unam conjungere cogitationem ideas diversas, etsi ope characterum unire possimus et cogitationum diversarum seriem totam simul repraesentare . . . quod non potest fieri nisi sentiendo sive imaginando simul characteres omnium. (Jagodinsky, Leibnitiana 4, 6.)

Auch die Fortsetzung des Zitats ist für die Beurteilung der Stellung der Charakteristik mit ihren fin n l i c h e n Symbolen wichtig: et quoniam aliquando tantus est characterum numerus, ut totus imaginationi observari non possit, opus est delineatione in materia . . . Ideam defectum in nobis supplet imago aliqua sensibilis aut . . . phantasma aliquod, quod totum simul sentitur. Solius Dei est ideas habere rerum compositorum.

fäntliche (aktual-unendlich viele!) Elementarbegriffe deutlich unterschieden, zugleich aber in einer Anschauung zusammengefaßt werden; dies ist dem Menschen nur durch das Surrogat von Symbolen möglich. Es kann so unter Umständen das synthetische Gesetz des unendlichen zerlegenden Prozesses konstruktiv erfaßt werden.¹

Daselbe gilt natürlich mutandis mutatis für die kontingenten Wahrheiten und ihre Auflösung in identische Sätze. Es verdient bemerkt zu werden, daß nach Leibniz zur vollständigen Analyse der Sätze nicht die der Begriffe erforderlich ist². Denn sonst könnte man, in Anbetracht der sehr umfangreichen, ja häufig unendlichen Menge der Elementarbegriffe, überhaupt kaum einen formal-analytischen Beweis einer Wahrheit führen. Man braucht aber tatsächlich die Zerlegung nur soweit zu führen, daß das Enthaltensein des Subjekts im Prädikat evident wird, und das ist in vielen Fällen auch durch eine endliche Anzahl von Denkschritten möglich. Diese Bemerkung ist wichtig, denn sie wirft ein gewisses Licht darauf, wie es möglich ist, mittels einer finiten symbolischen Darstellung der unendlich komplizierten Begriffe Schlüsse zu ziehen, wie es im Logikkalkül geschieht³.

Bevor aber die entscheidende Rolle der symbolischen Darstellung (der »Charakteristik«) in der mathematischen Philosophie Leibnizens dargelegt werden kann, ist es noch erforderlich, auf das zweite große mit dem Unendlichen verknüpften Problem einzugehen, auf das des Kontinuums. Es handelt sich um folgende grundlegende Schwierigkeit, die in ihrer ganzen Schärfe vor allem von Russell und Schmalenbach in ihren Leibnizdarstellungen herausgearbeitet worden ist⁴. Eine stetige GröÙe kann in eine indefinit unend-

1) Ma h n k e l. c. Anm. 43 (S. 241): »propositio vera contingens non potest reduci ad identicas, probatur tamen, ostendendo continuata magis magisque resolutione, accedi quidem perpetuo ad identicas, numquam tamen ad eas perveniri. Unde solius Dei est, qui totum infinitum Mente complectitur, nosse certitudinem omnium contingentium veritatum . . . ex ipsa progressionem resolutionis, seu ex relatione quadam generali inter resolutiones praecedentes et sequentem. . . . Quodsi ex continuata resolutione et inde nata progressionem ejusque regulam saltem appareat nunquam orituram contradictionem, propositio est possibilis. (Couturat, Opusculum inédit p. 371, 374, 388.)

2) Vgl. Ma h n k e, l. c. S. 121 (nach Heimsoeth).

3) Man denke besonders an das Verhältnis etwa des Hilbertschen transfiniten Axioms, das in Symbolen geschrieben durchaus finit ist, zu seiner transfiniten Bedeutung.

4) Vgl. den Bericht von Ma h n k e, l. c. S. 28 ff. (Russell), S. 151 f., 156 (Schmalenbach), wo nähere Zitate zu finden sind.

liche Anzahl Teile weitergeteilt werden. Diese indefinite Teilbarkeit verhindert, daß man jemals zu letzten Elementen des Stetigen kommt und daß man je das Stetige aus Elementen aufbauen kann. (Vgl. Aristoteles: οὐ γὰρ χαλεπὸν ἀνελεῖν τὰς ἀτόμους γραμμάς. Physik III, 6; 206 a, 17.) Denn eine aktual-unendlich große Anzahl ist ein widerspruchsvoller Begriff. (Vgl. wiederum Aristoteles; Physik III, 4 [203 b, 34] und III, 5 [204 b, 7–10].) Dagegen enthält, aus metaphysischen Gründen realiter jedes noch so kleine Weltstück (als Spiegel des Universums) aktual-unendlich viele einfache Wefen. Es entsteht also der Widerspruch, daß einerseits die Welt ein Aggregat aus diskreten »Einsheiten« (Schmalenbach) in aktual-unendlicher Anzahl ist, also die Elemente dem »tamquam unum« der Welt vorhergehen – Schmalenbach nennt diese Anschauung nicht mit Unrecht »Arithmetismus« –, andererseits aber doch die Welt stetig aussieht, als ob das Ganze den Teilen voran ginge. Aber in dieser Formulierung liegt schon die Leibnizsche »Lösung« angedeutet: realiter enthält die Welt zwar aktual-unendlich viele diskrete Monaden, aber phänomenal ist sie stetig. Die Stetigkeit ist also lediglich in der unwirklichen Ideenwelt, der Welt der bloßen Denkmöglichkeit zu Haufe, ist lediglich Phänomen. Wenn auch ideell-geometrische Punkte (ebenso wie die *ἄτομοι γραμμαί* nach Aristoteles) unmöglich sind, so sind doch die Monaden als metaphysische Punkte (und zwar in aktual-unendlicher Anzahl) möglich und wirklich.

Weder Russell noch Schmalenbach können diesen Leibnizschen Versuch, den Ausweg aus dem »Labyrinth des Kontinuums« zu finden, anerkennen. Denn man könne, wenn die Stetigkeit (indefinite Teilbarkeit) etwas Unwirkliches ist, niemals aus ihr die Wirklichkeit einer realen aktualen Unendlichkeit erschließen. (Russell)¹. Ferner sei es inkonsequent, einerseits die »transfinite« Unendlichkeit Gottes als ursprünglichste wirklich anzuerkennen, andererseits die Irrealität der Kontinua aus ihrer indefiniten Zerlegungsfähigkeit zu folgern. Leibniz habe den Begriff des Kontinuums zusammen mit dem der transfiniten Unendlichkeit aus dem mythischen Erlebnis des allumfassenden göttlichen Einen gewonnen, in allen Fällen lägen Ganzheiten im echten Sinn vor (tota, nicht Aggregate: composita), die vom »arithmetischen« Verstand nicht zu Ende analysiert werden könnten². Letztlich stünden eben Monismus und Pluralismus, konti-

1) Die weitere subtile Argumentation Russells, die allerdings von seinen eigenen erkenntnistheoretischen und metaphysischen Grundanschauungen stark abhängig ist, wolle man bei Mahnke, l. c. 28 ff. nachlesen.

2) l. c. S. 153. – Über Kants Lösungsversuch f. u. S. 299, Anm. 1.

nuierlicher Zusammenhang (univerfelle Harmonie) und diskrete Sonderung (fensterlose Monaden) in unauflösbarem Widerspruch. (Schmalenbach).

Gegenüber dieser Kritik (die allerdings hier nur ganz andeutungsweise und notwendig unzulänglich wiedergegeben werden konnte und die der eingehenden Beachtung wert ist) verteidigt nun Mahnke Leibniz, indem er mit Nachdruck auf den Grundbegriff der Repräsentation und zwar als symbolischer Darstellung (»Charakteristik«) hinweist. Hier ist nun die Stelle, wo die Leibnizsche Begriffsbildung für die heute aktuellen Probleme des Transfiniten von außerordentlicher Wichtigkeit wird. Es handelt sich dabei eigentlich nicht nur um das Kontinuumproblem, sondern um die Frage der Erkenntnismöglichkeit transzendenter transfiniter Strukturen überhaupt. (Es fallen unter diesen Problembegriff auch die »Realdefinition« und die kontingenten Wahrheiten).

Es besteht nach Mahnke¹ für Leibniz weder zwischen »Einheit« und Kontinuität, noch zwischen objektiver Idealität (im Geiste Gottes), d. h. metaphysischer Realität, und subjektiver Phänomenalität (im menschlichen Geiste) ein radikaler Gegensatz. Es führt ja eine stetige Stufenreihe möglicher Zwischenglieder von der transfiniten Ideenwelt Gottes zu ihren bloß indefinit unendlichen Repräsentationen im menschlichen Geist; das Transfinite erscheint »perspektivisch verkürzt« als Indefinites. So liegt auch zwischen der Diskretheit des Realen und der Kontinuität des Idealen oder Phänomenalen keine unüberbrückbare Kluft, sondern eine Weltregion wird durch die andere mit asymptotischer Annäherung dargestellt.

Es kommt nun für die Durchführbarkeit eines solchen Gedankengangs, der schon oben anlässlich der Explikation des Repräsentationsbegriffs kurz dargestellt wurde, alles darauf an, von dem sehr allgemeinen und etwas unbestimmten Begriff der »Repräsentation« und den metaphorischen Ausdrücken »Abbildung«, »Spiegelung«, »Perspektive«² u. dgl. zu einer eigentlichen präzisen Charakterisierung zu gelangen.

Die Hauptfrage, auf die sich alles zuspitzt, scheint nun in dieser Beziehung die zu sein, ob die Repräsentation als *isomorphe* Ab-

1) l. c. S. 156f.

2) Ein präziser perspektivischer Vergleich (elliptische Projektionen der Hyperbel) findet sich bei C o u r a t, Opuscles p. 15, der von K o e h l e r zur Erläuterung der Repräsentation verwendet wird. Vgl. M a h n k e, l. c. S. 223f.

bildung (d. h. als eineindeutige, alle Relationen des Originals adäquat in ihrer formalen Struktur wiedergebende Abspiegelung) aufzufassen ist oder nicht. Darauf ist zu antworten, daß zwar das Ideal einer Repräsentation erst durch eineindeutige Entsprechung aller wesentlichen Momente von Original und Bild erreicht wird, daß man sich aber in vielen Fällen mit der Wiedergabe einiger Züge begnügen kann und muß. Das Ideal wäre offenbar, daß bei der symbolischen Darstellung jedem Symbol (Buchstaben) ein und nur ein Elementarbereich entspräche und jeder »Relation der Gedanken« eine ganz genau bestimmte Verbindung von Zeichen¹.

Dieses Ideal kann aber offenbar der endliche menschliche Intellekt nicht erreichen, ihm ist die Anschauung des Unendlichen verschlossen und zwar nicht nur die sinnliche Wahrnehmung (*sensatio*), sondern auch die idealisierende *imaginatio* des Aktual-Unendlichen. Es ist die »*cogitatio intuitiva*«, die nicht nur alle einzelnen Teilbegriffe klar und deutlich erkennt, sondern sie auch sämtlich »zugleich denkt«, bei unendlicher Komplikation unmöglich. Daher muß sich die menschliche Wissenschaft mit der »*cogitatio symbolica*« begnügen, die statt der (evtl. transfiniten) Gegenstände die übersehbaren (finiten, höchstens Indefinites ausdrückenden) Zeichen betrachtet².

Insbesondere kann die *compossibilitas* der Begriffselemente (etwa die Widerspruchsfreiheit der in einem Axiomensystem implizit definierten Begriffe) nicht unmittelbar eingesehen werden, außer durch Gottes vollkommene *intuitio*. Sie muß auf die der finiten menschlichen Anschauung zugänglichen Betrachtung der Widerspruchsfreiheit der Symbole und ihrer Verknüpfungen zurückgeführt werden. Denn ein »mathematischer Existenzbeweis« kann nicht ohne *imaginatio* geführt werden; die Mathematik ist, im Gegensatz zur Metaphysik die *scientia imaginationis*, was aber ihrem logischen Charakter nicht widerspricht. (Leibniz reißt Anschauung und Denken, »Sinnlichkeit« und »Verstand« nicht auseinander wie Kant, sondern hält

1) Vgl. dazu und zum folgenden D. M a h n k e, »Leibniz als Begründer der symbolischen Mathematik«, Abschnitt I (»Istis«, Zeitschr. d. intern. Gesellsch. f. Geschichte d. Wiss., 1927); insbesondere l. c. Anm. 8: »*Arts characteristica est ars ita formandi atque ordinandi characteres, ut referant cogitationes, seu ut eam inter se habeant relationem, quam cogitationes inter se habeant. Expressio est aggregatum characterum rem quae exprimitur repraesentantium. Lex expressionum haec est: ut ex quarum rerum ideis componitur rei exprimendae idea, ex illarum rerum characteribus componatur rei expressio.*« (Bodemann, Leibniz-Handschriften, S. 80f.)

2) Siehe *Meditationes de cognitione, veritate et ideis* (Acta eruditorum, Nov. 1684; Philof. W. (Gerhardt) IV, 423f. (M a h n k e, l. c. Anm. 15.)

eine kontinuierliche Vermittelung zwischen ihnen für möglich.) Denn es wird z. B. von der geometrischen Charakteristik (die die anschauliche Geometrie im Verlauf der Geschichte überwand) gesagt, sie sei eine *logica imaginationis, per quam Geometria ad Logicam refertur*¹.

Aber die Symbole sind, wenn sie »Transfinites« darstellen, nicht den repräsentierten Dingen in allen Stücken, sondern nur »in dem, worum es sich handelt, ähnlich²«.

Allerdings besteht nach Leibniz die (ideelle) Möglichkeit des kontinuierlichen Übergangs von der symbolischen zur immer adäquateren bis schließlich zur intuitiven Erkenntnis auch des Aktual-Unendlichen. Selbst wenn dem Menschen wegen seiner kontingenten Beschränktheit dies ewig unmöglich sein sollte, so sind doch höhere Monaden zwischen Gott und Mensch wenigstens denkbar, die die kontinuierliche Annäherung an das Transfinite unbegrenzt weit treiben könnten.

In diesem Punkte entstehen freilich, wenn man die Sache vom phänomenologischen Standpunkt aus ansieht, für Leibnizens Optimismus große Schwierigkeiten. Nach Hufferl ist es auch einem »idealisierten Erkenntnisvermögen« unmöglich, Aktual-Unendliches zu erkennen. Faßt man Gott als »erkenntnistheoretischen Grenzbegriff« (Hufferl), so könnte das Aktual-Unendliche in seiner Ideenwelt keinen Platz haben; ist Gott dagegen dem Menschen völlig transzendent und unvergleichlich, dann ist auch keine kontinuierliche Vermittelung bis zu ihm denkbar. Sehen wir einstweilen von diesem Punkte ab (s. u. S. 310 ff.), so müssen wir sagen: dadurch, daß er sich mit Problemen des Verhältnisses von Transfinitem und Indefinitem tief-eindringend beschäftigte, hat Leibniz in Wahrheit tiefer geblickt³ als Bolzano, dem die ersten schüchternen mathematischen Ansätze zu verdanken sind, und tiefer als Cantor⁴, Dedekind, Frege und Russell, denn diese Forscher vermeinten alle das Transfinite »über philosophische Vorurteile hinwegschreitend« unmittelbar erfassen zu können. Bezüglich der fachlich-mathematischen Ansätze

1) Ma h n k e, IIs-Auffaß, Anm. 14 (Math. Schr. V, 173; Opuscles 348); vgl. auch Ma h n k e, »L.'s Synthese usw.«, Seite 203.

2) Vgl. Ma h n k e, IIs-Auffaß, Anm. 15. »id autem (die Erkenntnis der Verträglichkeit, compatibilitas) patet non fieri posse, nisi experimento vel rei vel alterius rei similis, in eo saltem de quo agitur . . . « (Opuscles 374f.).

3) In grundsätzlich-philosophischer, nicht in positiv-mathematischer Hinsicht.

4) Cantor ist allerdings in gewisser Hinsicht auszunehmen. Vgl. oben § 5a I, S. 82 ff.; bes. S. 85, 89 Anm. 1.

ist Leibniz (wenn auch vielleicht nicht ganz konsequent und bloß in der Formulierung der Grundbegriffe und Grundfälle, nicht in der exakten Durchführung der Theorie) Intuitionist, aber dabei bleibt er nicht stehen, sondern erfaßt die Möglichkeit einer symbolisch-formalen Mathematik, die über alles der Intuition Erreichbare hinausgeht¹. Freilich hat diese auch eine sachliche Bedeutung, aber nur in Gott.

Es läßt sich nicht verkennen, daß mit diesen Grundanschauungen Leibniz in die Nähe derjenigen modernen Position in der Philosophie der Mathematik rückt, die man »Formalismus« (Hilbert) oder »symbolische Mathematik« (Weyl in seiner neuesten Phase) nennt². Diese Position wendet sich gleichermaßen gegen zwei Fronten: gegen die intuitionistische (Brouwer) und die ältere logizistische (»existential-abolutistische«) Anschauung (Frege, Russell u. a.). Weder läßt sich das aktuelle Transfinite unmittelbar, im Sinne der klassischen Mengenlehre, erfassen, wie die Logizisten meinten³, noch läßt es sich

1) Vgl. folgende, in Mahnkes Isis-Aufsatz (Anm. 9 u. 10) zitierte Stelle: »Invento quod quaeritur in characteribus facile idem inveniatur in rebus per positum ab initio rerum characterumque consensum (Math. Schr. V, 191). Cuiusque rei nomen [characteristicum] clavis est omnium quae de ea . . . ratione atque ordine sciri possunt . . . et interiores rerum formas detegit (Philos. Schr. VII, 13–15) . . . tanto perfectiores esse characteres quanto magis sunt ἀνταρκεῖς, ita ut omnes consequentiae inde duci possint (Opusculi 284). – Die Homorphie ist also das zu erstrebende Ideal. –

Größere Reichweite der symbolischen im Vergleich zur anschaulichen Mathematik: »raisonnements qui se peuvent faire par les operations de caractères, qui ne se scauroient exprimer par des figures . . . ea ad quae imaginatio per linearum ductus attigere nequit. (Math. Schr. IV 455, 479; II 20f.)

2) Vgl. Mahnke (»L.'s Synthese usw.«), S. 203, Anm. 146; ferner: »Von Hilbert zu Hufferl« (Unterrichtsbl. f. Math. u. Naturwissensch. XXIX, 35ff.); »Leibniz und Goethe« (Erfurt 1924), S. 58–66; »L. als Begründer der symbol. Math.« (»IIs« 1927).

3) Russell hat hierin eine merkwürdige Wandlung durchgemacht. In der »Principles of Mathematics« (1903) ist er noch durchaus überzeugter Existentialabolutist, wenn auch schon die Entdeckung der Antinomien wie eine Drohung auftaucht, in den »Principia Mathematica« (1910) werden die Ansprüche der logizistischen Begründung schon stark eingeschränkt (das »Axiom des Unendlichen« und das »Auswahlaxiom« werden als Hypothesen eingeführt), endlich in der »Introduction to mathematical philosophy« (1919) wird (auf Seite 191f.) sogar das grundlegende logische »axiom of reducibility« nicht mehr kategorisch aufrecht erhalten und von den allein noch gesicherten, finiten »tautologischen Axiomen« (S. 203ff.) unterschieden. (Vgl. auch S. 131 bis 143 über das »axiom of infinity«.) Damit ist aber Russell im Grunde

auf intuitiv indefinite und »transfinite« (*δυνάμει*) Prozesse zurückführen. Aber die transfiniten Beziehungen, als solche dem menschlichen Geist unzugänglich (und nur durch Erschleichung scheinbar zugänglich, indem subreptiv Endliches anstelle des Unendlichen gesetzt wird), sind in finiten Symbol-Zusammenhängen darstellbar, deren Widerspruchsfreiheit, nicht anschaulich ausweisbare »Wahrheit«, gezeigt werden kann. Es entsteht freilich die fundamentale Schwierigkeit, ob damit nicht die gesamte transfinite Mathematik zum leeren Formelspiel degradiert ist (f. o. § 3a, b; § 4b [Schluß]; § 6a.) Hilbert begegnet der Schwierigkeit durch einen Kantischen Gedanken (Totalität in der Idee, f. u. § 6c III D), Weyl dagegen sieht die Bedeutsamkeit der transfiniten formalen Mathematik in ihrer Fähigkeit reale physikalische Zusammenhänge symbolisch darzustellen¹. Insofern nun nach Leibniz die — allerdings letztlich metaphysische — Struktur des Universums adäquat (d. h. »isomorph«) in Gottes Ideenwelt repräsentiert ist, und die symbolische Mathematik Leibnizens in immer größerer Annäherung, wenn auch sie nie erreichend, Gottes unendliche Verwicklung vereinfachend abbildet, erstrebt auch nach Leibniz die menschliche Mathematik die symbolische Darstellung des realen Universums.

Man kann also grundfänglich Hilberts formalistische Mathematik und ihre Interpretation seitens Weyls als symbolische Darstellung transfiniter sachlicher Zusammenhänge mit Leibnizens Auffassung in Einklang bringen. Es ist aber von entscheidender Wichtigkeit, dabei auch auf einen fundamentalen Unterschied zwischen Leibniz und Hilbert-Weyl hinzuweisen. Während die heutigen Forscher Intuitives und Formales, inhaltliche Metamathematik und formale eigentliche Mathematik scharf scheiden, der ersten eine phänomenologische, der zweiten eine sich auch der kategorialen Anschauung völlig entziehende Bedeutung zuweisen, ist Leibniz vom Bestehen eines kontinuierlichen Übergangs von der transfiniten (aktual-unendlichen) Ideenwelt Gottes bis zur bloß indefiniten Welt des menschlichen Geistes überzeugt. Hier liegt auch der wohl wesentlichste Unterschied in der Grundauffassung Leibnizens und Kantens: Leibniz, der »harmonische Synthetiker«, vermittelt

zu einer Art Finitismus gelangt, ähnlich wie Hilbert. Vgl. auch das merkwürdige Festhalten der finiten Einschachtelung der logischen Typen, worüber oben § 5a III, S. 117, berichtet wurde. — In dieser Richtung gehen weiter die Arbeiten der sog. »Halbintuitionisten«. (Chwistek, Wittgenstein u. a.).

1) Weyl, Math. Zeitschr. 20, S. 149f., Symposium I, S. 30ff. Handbuch der Philos., Abt. II A., S. 40ff. (über Leibniz S. 49, 3ff.) und passim.

kontinuierlich zwischen Gott und Mensch; Kant, der unerbittliche Kritiker, sieht zwischen beiden den unüberbrückbaren Abgrund¹.

Mit dem unerhört kühnen Gedanken, daß die Macht menschlicher Symbolik bis an Gott heranreiche, hat Leibniz vielleicht am tiefsten von allen Philosophen dem geheimen Motiv nachgespürt, das den himmelftürmenden, die Grenzen des »Eidos« durchbrechenden Flug der abendländischen, in ihrem Kern nordisch-germanisch bestimmten Mathematik emportrieb. Ein Gedanke, der mit dem mystischen Ursprung der Leibnizschen Philosophie² und ihres Mittelbegriffs der Repräsentation eng zusammenhängt. Wir können also in Leibniz den mit Plato größten »mathematischen Mystiker« verehren. Was dies für eine systematische (ontologische) letzte Deutung des Seinsfinns des Mathematischen befagt, werden wir noch am Schlusse dieser Untersuchung zu entwickeln haben.

Kant hat allerdings dieser überschwänglichen mathematischen Mystik die ganze Schärfe seiner schneidenden Kritik entgegengesetzt. Wir haben heute die Pflicht der Kühnheit Leibnizens und Kantens unbeirrbarer Nüchternheit gleichmäßig Rechnung zu tragen, sie beide in dem ganzen Gewicht ihrer Argumente wirken zu lassen.

D. Kant.

Mit Kant tritt die Entwicklung der abendländischen Philosophie der Mathematik in ihre dritte Phase. Während Descartes noch in vieler Hinsicht an den überlieferten antik-mittelalterlichen Grundauffassungen festhielt, so bahnbrechend er besonders durch seine analytische Geometrie (mehr als durch seine sehr unbestimmte und wenig radikale Idee der mathesis universalis) geworden ist, haben wir in Leibniz das neue nordisch bestimmte mathematische Denken sein philosophisches Selbstbewußtsein erreichen und seine letzten Möglichkeiten aufleuchten. Demgegenüber folgt endlich in Kant nach jenem

1) Auch Weyl lehnt ausdrücklich jede »anschauende Einsicht« des nur symbolisch Erkennbaren als »mystischen Irrtum« ab. Vgl. Symposion I, S. 30f.: »Theoretische Gestaltung ist etwas anderes als anschauende Einsicht; ihr Ziel nicht minder problematisch wie künstlerische Gestaltung. . . . Aber er [Fichte] unterliegt noch dem mystischen Irrtum, daß jenes Transzendente (d. i. das Transfinite Hilberts) letzten Endes doch innerhalb des Lichtkreises der Einsicht von uns erfaßt werden könne. Hier bleibt uns aber nur die symbolische Konstruktion«

2) Vgl. die bei Mahnke l.c. referierten Forschungen von Kabitj (S. 68ff.), Feilchenfeld (S. 74f.), Jagodinsky und Jafinowski (S. 76ff.), Baruzi (S. 111ff.), Heimfoeth (S. 133ff.) u. a. — In die »große Linie der mathematischen Mystik« ordnet Mahnke (S. 140) selbst Leibniz ein.

allzu weit ausgreifenden Vorstoß die kritische Selbstbefinnung und die nüchterne Erkenntnis der Grenzen menschlicher Spekulation.

Die geschichtliche Rolle Kants entspringt einmal seiner Leibniz in Vielem entgegengesetzten Persönlichkeit, dann aber auch dem »Zeitstil«, d. h. der inneren Logik der geistesgeschichtlichen Entwicklung selbst.

Kant kann sich bezüglich seines Anteils an der Entwicklung mathematischer Forschung nicht mit Leibniz messen, er ist positiv mathematisch ebenso wenig produktiv gewesen wie Aristoteles¹. Nur die Idee der n -dimensionalen Geometrie, die er, im einzelnen freilich unbestimmt genug, wohl als erster in seiner Erstlingschrift (1747) entwickelt, ist ihm als bedeutende Leistung auf mathematischem Gebiete anzurechnen². Diese Konzeption der Jugendschrift hat aller-

1) Über die mathematisch-naturwissenschaftlichen Leistungen Kants vgl. das gründliche Werk von Adickes, Kant als Naturforscher. 2 Bde. (Berlin 1924); bef. die ausführliche und wohlabgewogene Gesamtcharakteristik in der »Einleitung« (§§ 1–23; Bd. I, Seite 1–64). Es wird dort (S. 64) treffend Kant als »Ausnahmegeist von großer Divinationsgabe, starkem monistischen Drang und einer nicht gewöhnlichen Kraft der Synthesis und Synopsis« bezeichnet, dem »eine Reihe glücklicher Intuitionen und treffender Aperçus beschieden war«, die sich aber nicht »auf das naturwissenschaftliche Detail, sondern auf die Anwendung allgemeinsten Grundsätze und Gesetze, die Durchführung prinzipieller erkenntnistheoretischer bzw. methodologischer Erwägungen« beziehen und »also nicht aus speziell wissenschaftlichem« (wir können hinzufügen: erst recht nicht mathematischem), sondern aus allgemein philosophisch-methodologischem Geist geboren« sind. — Über den Mangel der positiv-mathematischen Leistung bei Kant f. insbes. l. c. §§ 5–8 (I, S. 15–39).

2) Siehe »Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte« I. Hauptstück, §§ 7, 8, 9, 10, 11, bef. § 10, 2. Absatz. (Vgl. auch Adickes, l. c. § 32, Bd. I, S. 84–89.) — Der Grundgedanke Kants geht von der von Leibniz übernommenen Annahme aus, daß »jedwedes selbständige Wesen [= Monade] die vollständige Quelle aller seiner Bestimmungen in sich enthält«. Es sei daher möglich, daß Substanzen ohne äußerliche Relation gegen andere, wodurch doch der Ort erst zustande komme, existieren oder auch gegeneinander isolierte Systeme jeweils untereinander räumlich verbundener Substanzen. So könne »im metaphysischen Verstande« mehr als eine Welt existieren. Die Substanzen unserer Welt hätten »wesentliche Kräfte von der Art, daß sie in Vereinigung miteinander nach dem doppelten umgekehrten Verhältnis der Weiten ihre Wirkungen von sich ausbreiten«, weshalb »das Ganze, was daher entspringt, vermöge dieses Gesetzes die Eigenschaft der dreifachen Dimension habe.« Dieses Gesetz und daher auch die Dreidimensionalität des Raumes sei aber willkürlich und Gott habe bei Erschaffung der Welt ein anderes wählen können, aus welchem auch »eine andere Ausdehnung von anderen Eigenschaften und Abmessungen geflossen wäre.« »Eine Wissenschaft von allen diesen möglichen Raumesarten wäre unfehlbar die höchste Geometrie, die ein endlicher Verstand unternehmen könnte«.

dings eine Weiterentwicklung nicht gefunden, aber der Gedanke, daß mehrere verschiedene Raumesarten möglich sind, von denen unter euklidischer dreidimensionaler Raum nur eine ist, hat vielleicht doch unter anderem die kritische Auffassung, die die menschliche Raumanschauung für kontingent und auf den Menschen relativ erklärt, mit vorbereitet¹.

Diese einzige mathematische Jugendleistung Kants ist also auch nur im Zusammenhang mit seiner Philosophie fruchtbar geworden. Es bleibt also dabei: Kant ist auf mathematisch-philosophischem Gebiet nicht produktiv, sondern lediglich kritisch.

Hierin drückt sich nun, wie schon gesagt, sowohl ein Grundzug seiner Persönlichkeit, wie auch seiner Zeit aus.

Die Mathematik des ausgehenden 17. und des 18. Jahrhunderts ist gekennzeichnet durch ihre außerordentliche Fruchtbarkeit im Entwerfen neuer analytischer (echt abendländischer) Disziplinen². Es

Kant erfaßt also mit genialer Phantasie die Möglichkeit der mehrdimensionalen und vielleicht sogar der nichteuklidischen Geometrien, und zwar soll die »Raumesart« abhängig von den Wirkungsgeetzen der physikalischen Kräfte sein. (Also im gewissen Sinn wie bei Riemann und Einstein.)

Dieser genialen Grundidee steht allerdings ein gewisser Mangel an mathematischer Präzisierung gegenüber. (Wie soll denn nach Kant das Wirkungsgeetz der Kräfte des näheren die »Raumesart« bestimmen? Vielleicht meint er, daß $K = -\frac{m}{r^s}$ die Dimensionenzahl $s+1$ nach sich zieht.)

Ob Kant 1747 als erster den Gedanken der mehrdimensionalen Geometrie faßte, ist nicht leicht zu entscheiden. Bereits die italienischen Algebraiker des 15. Jahrhunderts und später Viète verwandten »hypergeometrische« Ausdrücke zur Bezeichnung der höheren Potenzen (z. B. quadratoquadratum für die 4., und cubocubocubus für die 9. Potenz; vgl. Zeuthen, Geschichte d. Math. im 16. u. 17. Jahrh. S. 94, 97–98). Später haben sich Pascal und Leibniz mit vier- und mehrdimensionaler Geometrie beschäftigt. Leibniz glaubte allerdings bewiesen zu haben, daß der wirkliche Raum dreidimensional sein müsse und gibt nur physikalische Beispiele (»Gewicht« und »Wucht« dreidimensionaler Gebilde) für höhere Mannigfaltigkeiten. (Vgl. Mahnké, Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis, S. 32: bef. Anm. 3 u. 4.)

Im Grunde gibt freilich schon das antike, auf Hippokrates von Chios (5. Jahrh.) zurückgehende Verfahren, durch »Einschieben« einer beliebigen Folge von mittleren Proportionalen höhere Potenzen (bzw. Wurzeln) auszudrücken die Möglichkeit der Verallgemeinerung, beispielsweise des Delischen Problems, auf n Dimensionen.

1) Vgl. Adickes l. c. Bd. I, Seite 85, Anm. 1.

2) In dieser Zeit entstehen: Höhere Algebra, Zahlentheorie, Differential- und Integralrechnung, Variationsrechnung, die Lehre von den Differentialgleichungen (also eigentlich die gesamte reelle Analysis); im 19. Jahr-

wurde in dieser Zeit der Grund gelegt für die meisten modernen mathematische Entwicklungen. Die enorme Fruchtbarkeit Eulers ist etwa der Exponent für den Höhepunkt dieses Zeitalters. Gegen Ende des Jahrhunderts zeigen sich allenthalben kritische Bedenken: L a g r a n g e s Theorie der abgeleiteten Funktionen in der Differentialrechnung u. ä. Bald darauf (Anfang des 19. Jahrh.) folgen die vielfachen Bemühungen von Gauß um strenge Begründung auf den verschiedensten Gebieten (Zahlentheorie, Fundamentalsatz der Algebra, Theorie der komplexen Zahlen, Reihenkonvergenz usw.).

Auf philosophischem Gebiet bezeichnet Kant das *τέλος* der dogmatischen Metaphysik des 17. und 18. Jahrhunderts in der doppelten Bedeutung von Ziel und Ende, Vollendung und Auflösung. Er ist zugleich der souveräne Beherrscher der subtilen Begriffsgefüge des deutschen Rationalismus und andererseits tief beeinflusst von Humes Skeptis. Denn er läßt diese Skeptis in ihrer Negativität, d. h. als solche wirken. Er versteht es nicht wie Leibniz, lediglich das Positive aus den mannigfaltigen überlieferten philosophischen Strömungen und Gedankengebäuden herauszuziehen und die verschiedenen Tendenzen versöhnend zu einem höheren Ganzen zu vereinigen. Sondern seine Grundabsicht ist kritisch, d. h. scheidend oder Grenzen setzend. Kant glaubt nicht an das »Primat des Positiven«. Die menschliche Vernunft ist einem »wohlbestallten Richter« zu vergleichen, der jedem das Seine gibt, wozu gehört, daß jeder Anspruch wohl unterschieden, im Einzelnen geprüft und in seine Grenzen zurückgewiesen wird. Die Grenze enthält aber ihrem Sinne nach diese Negativität, daß bei ihr der Anspruch und die Möglichkeit des Fortgangs aufhört. Während also Leibnizens Kontinuitätsprinzip alle Grenzen zu überfluten bestrebt ist, kämpft Kant immer wieder gegen das Ineinanderlaufenlassen der Grenzen¹.

Man kann nun diese kritische Grundtendenz Kants von zwei Gesichtspunkten aus würdigen, je nachdem man in Kant den Erkenntniskritiker, oder den »Metaphysiker« bzw. Religionsphilosophen für das Primäre hält. Eine dritte Möglichkeit, die aber für unsere Problematik weniger naheliegend ist, wäre Kant als Kritiker der Urteilstkraft (bzw. des »Geschmacks«) oder zugespitzt: als »Kritiker

hundert kommt dann nur die komplexe Funktionentheorie und die allerdings sehr weitreichende Gruppen- und Invariantentheorie und die Mengenlehre als grundfänglich neu hinzu.

1) Mahnke hat diesen Unterschied von Leibniz und Kant (unter fernerer Berücksichtigung Hegels) im Anfang seine Abhandlung »L's Synthese usw.« schön herausgearbeitet (l. c. S. 1 ff.).

der Kritik« zu fassen. (Vgl. für die universelle Bedeutung auch dieser Problemrichtung [die auf die philosophische Erfassung des Problems der Individualität abzielt] das geistreiche Buch H. Bäumlers, Kants Kritik der Urteilskraft, Bd. I, Halle 1923.)

Ähnlich wie in der Leibniz-Forschung ist neuerdings bei der Interpretation Kants der erkenntniskritische hinter dem »metaphysischen« Gesichtspunkt zurückgetreten¹. Man sieht nicht mehr das System der Philosophie von dem erkenntniskritischen Unterbau allein getragen, sondern diesen mindestens in demselben Maße von (offenen oder versteckten) metaphysisch-religiösen Grundstellungnahmen.

Nimmt man nun diesen »modernen« Standpunkt ein, dem unsere »ontologische« Grundhaltung entspricht, (die Frage seines Vorzugs vor dem früheren kann hier nicht näher erörtert werden), so wird man sagen müssen: das Grundproblem des Kantischen wie auch schon des Leibnizischen Denkens ist die richtige Fixierung des Verhältnisses von Gott und Mensch; dieser Frage dient seine theoretische wie praktische Philosophie gleichermaßen und – was für den gegenwärtigen Zusammenhang ausschlaggebend ist – die Antwort auf diese Frage bestimmt auch Kants Philosophie der Mathematik.

In der Fragestellung ist sich Kant mit Leibniz einig, in der Beantwortung weitgehend von ihm unterschieden. Während Leibniz mit der Mystik (besonders der deutschen) eine tiefe Wesensgemeinschaft zwischen Gott und Mensch annimmt, so daß wir im Grunde alle Dinge nur durch Gott schauen², betont Kant das Trennende, und lehrt die absolute Transzendenz Gottes.

Der entscheidende Unterschied des endlichen und unendlichen Geistes ist nun, daß des ersten Erkenntnisvermögen in getrennte »Stämme« zerfällt (»die vielleicht aus einer gemeinschaftlichen, aber

1) Für Leibniz denke man an den Gegensatz der Werke Ruffells (1900), Couturats (1901), Caffirers (1902) und den späteren Interpretationen von Baruzi (1905, 1909), Kabiß (1909), Pichler (1909–24), Köhler (1913), Jagodinsky (1913), Heimfoeth (1914, 1922), Mahnke (seit 1907) u. a. (In früherer Zeit ist allerdings gerade für den religiösen Ursprung der Leibnizschen Philosophie eingetreten H. Ritter [1853!], auch Windelband [seit 1878] und Dilthey [seit 1900] sind nicht einseitig erkenntnistheoretisch eingestellt.)

Für Kant ist die neue Interpretationsrichtung von Heimfoeth N. Hartmann, M. Wundt und (in anderer Hinsicht) J. Ebbinghaus im Gegensatz zu H. Cohen, Natorp, Caffirer und auch Windelband, Rickert, Lask anzuführen.

2) Vgl. Mahnke, »L's Synthese usw.«, S. 114 (Baruzi) und S. 136 (Heimfoeth).

uns unbekannten Wurzel entspringen« (B 29)¹⁾, nämlich Sinnlichkeit und Verstand. Dem Menschen ist weder eine »intellektuelle Anschauung« noch ein »anschauender Verstand« (*intellectus archetypus*) zu teil geworden. »Begriffe ohne Anschauungen sind leer und Anschauungen ohne Begriffe blind«. »Anschauungen und Begriffe machen die Elemente aller unserer Erkenntnis aus, so daß weder Begriffe ohne ihnen auf einige Art korrespondierende Anschauung, noch Anschauung ohne Begriffe ein Erkenntnis abgeben können«. Der Mensch ist also – im Gegensatz zu Gott, der die Einheit beider Stämme besitzt (»intellektuelle Anschauung« bzw. »anschauenden Verstand«) – gebunden an eine sinnliche Grundlage seiner Erkenntnisse²⁾; diese überschreiten – auch sofern sie a priori sind – niemals die Grenzen der möglichen Erfahrung. Der tiefere Grund dieser Annahme von der radikalen Getrenntheit von Verstand und Sinnlichkeit liegt in der metaphysisch-religiösen Überzeugung Kants, daß der Mensch, als geschaffenes Wesen, selbst keine schöpferischen Fähigkeiten besitzt. Er hat daher weder einen (»urbildlichen«) »intuitiven Verstand« (*intellectus archetypus*) »durch dessen Vorstellung zugleich die Objekte dieser Vorstellung existierten« (B 139), »durch dessen Vorstellung die Gegenstände zugleich gegeben und hervorgebracht würden« (B 145), noch eine intellektuelle (»ursprüngliche«) Anschauung«, einen »*intuitus originarius*«, d. h. »eine solche, durch die selbst das Dasein des Objekts der Anschauung gegeben wird« (»als welche . . . allein dem Urwesen, niemals aber einem, seinem Dasein sowohl als seiner Anschauung nach . . . abhängigen Wesen zuzukommen scheint«) (B 72). Sondern seine Anschauung ist sinnlich (d. h. »abgeleitet«, *intuitus derivativus*) d. h. rezeptiv, und sein Verstand bloß denkend (d. h. der Bilder bedürftig, *intellectus ectypus*), d. h. Gegebenes verknüpfend. (Vgl. Kritik der Urteilskraft § 76–77).

Nun bezieht sich allerdings der Ausdruck »Erkenntnis« bei Kant zunächst immer nur auf wirkliche Gegenstände, also nicht auf Gegenstände der reinen Mathematik³⁾, auf die es uns hier an-

1) Es bedeutet A die 1. Auflage, B die 2. Auflage der Kritik der reinen Vernunft; AK den III. Band der Kant-Ausgabe der Berliner Akademie (die beiden Zahlen zeigen die Seite und Zeile an; diese Zitierweise wird bei nicht in extenso gegebenen Zitaten benutzt).

2) »Die Anschauung findet nur statt, sofern uns der Gegenstand gegeben wird; dieses aber ist wiederum, uns Menschen wenigstens, nur dadurch möglich, daß er das Gemüt auf gewisse Weise afficiere.« (B 33.)

3) »... alle mathematischen Begriffe [sind] für sich nicht Erkenntnisse; außer, sofern man voraussetzt, daß es Dinge gibt,

kommt. Man könnte also denken die gesamte Erkenntnistheorie Kants ginge der Mathematik nichts an.

Hier greift aber ein zweites Moment ein, welches (allerdings aus demselben metaphysischen Motiv letztlich entspringend) die Mathematik auf das Formale eines möglichen Gegenstandes der Erfahrung beschränkt und zwar genauer auf die anschauliche Form, die sog. reine Anschauung.

Kant trennt nämlich, wiederum im Gegensatz zu Leibniz, scharf Logik, Metaphysik und Mathematik,erspaltet also die »Universal-mathematik« in drei heterogene Stücke. Außer zwischen Anschauung und Begriff, unterscheidet er reinlich die »analytischen« und »synthetischen« Urteile und Deduktionen. Die formale Logik wird zu einer von der Art ihrer Gegenstände ganz abhehenden, rein analytischen Disziplin gestempelt, die allein auf dem Satz von Widerspruch beruht. (B 74ff.) Das im Grunde metaphysische Prinzip des zureichenden Grundes wird aus ihr entfernt (was schon Wolff tat) und damit ihr universal-mathematischer Charakter zerstört. Denn die analytische Argumentation ist isoliert gänzlich unfruchtbar, zergliedert bloß das in dem Begriff schon in verworrener Weise Enthaltene und macht es deutlich, erweitert aber die Erkenntnis nicht. (B 9ff.)

Die Entwertung des Formal-Analytischen zu einer bloßen unfruchtbaren Zergliederung und Verdeutlichung der verworrenen Begriffe steht im scharfen Gegensatz zu Leibniz, für den jene »bloße Verdeutlichung« einen ganz anderen Akzent trägt, indem in ihr sich eine Repräsentation von Gottes Ideenwelt durch die endlichen Geister ausdrückt. Der Gegensatz »verworren – deutlich« ist für Kant eine belanglose oder nebensächliche Angelegenheit. (A XXI. [Vorrede], B 9.) Für Leibniz liegt darin die ganze Spannung zwischen Gott und Mensch und zugleich auch die Möglichkeit ihres Ausgleichs. Darin, daß Kant (seit 1770) Anschauung und Denken radikal trennt, wird diese Brücke vom Menschen zu Gott abgebrochen. Es liegt daher in der Kantischen Konzeption des Analytischen ein tiefer metaphysischer (bzw. religiöser) Sinn. Das schon erwähnte ontologische Grundmotiv macht sich geltend: Der Mensch darf als creatura nicht von sich aus schöpferisch sein, auch sein rein formaler Verstandesgebrauch bringt nicht Neues hervor, sondern zergliedert nur schon verworren Vorhandenes, bereits Geschaffenes.

die sich nur der Form jener reinen sinnlichen Anschauung gemäß uns darstellen lassen.« (B 147.)

Die Mathematik war schon bei Leibniz als *scientia imaginationis* (bzw. *sc. rerum imaginabilium*) im Gegensatz zur Metaphysik als *scientia rerum intellectualium* bezeichnet worden. Allein die Idee der symbolischen Repräsentation überwand auch hier die Schärfe des Gegensatzes. Ganz anders bei Kant:

Die Mathematik ist bei ihm eine fruchtbare, die Erkenntnis erweiternde Disziplin, deshalb notwendig synthetisch, und zwar *a priori*. Also ist sie, wie alle Synthesis *a priori* auf Anschauung ebenso wie auf Begriffe angewiesen; Anschauung ist aber, auch sofern sie rein ist, immer nur die Form möglicher (natürlich menschlicher) Erfahrung¹. Alle Begriffe und Grundsätze beziehen sich, »so sehr sie auch *a priori* möglich sein mögen, dennoch auf empirische Anschauung, d. i. data zur möglichen Erfahrung.« Sonst wären sie ein bloßes Spiel der Einbildungskraft oder des Verstandes. Dafür sind die Begriffe der Mathematik ein Beispiel und zwar sowohl in ihren reinen Anschauungen als in den abgeforderten Begriffen. Die anschaulichen mathematischen (besonders geometrischen) Grundsätze würden, »obwohl sie völlig *a priori* im Gemüt erzeugt werden« gar nichts bedeuten, »könnten wir nicht immer an Erscheinungen (empirischen Gegenständen) ihre Bedeutung darlegen«. Ein »abgeforderter Begriff« ist aber »sinnlich zu machen, d. i. das ihm korrespondierende Objekt in der Anschauung darzulegen, weil ohne dieses, der Begriff (wie man sagt) ohne Sinn d. i. ohne Bedeutung bleiben würde«. Hierin liegt wiederum das ontologische Moment der Unfruchtbarkeit des Menschen, dem nur der *intuitus derivativus*, vergönnt ist: aller abgeleiteten Anschauung muß Affektion zugrunde liegen. (Vgl. Anm. 2 zu S. 293.) »Die Mathematik erfüllt diese Forderung durch Konstruktion der Gestalt, welche eine den Sinnen gegenwärtige (obzwar *a priori* zustande gebrachte) Erscheinung ist. Der Begriff der Größe sucht in eben der Wissenschaft seine Haltung und Sinn in der Zahl, diese aber an den Fingern, den Korallen des Rechenbretts, oder den Strichen und Punkten, die vor Augen gestellt werden«. (B 298 – 99.)

Allerdings entspricht dieser Anspielung auf die sinnlichen Symbole, mit denen man rechnet, nicht die tiefste Meinung Kants über das Wesen von Größe und Zahl. Diese ist vielmehr bezogen auf die Zeit, wie wir früher (§ 6b II) ausführlich darlegten. Die Größe eines quanti kann nur durch Synthesis der Teile und durch wiederholte Hinzufügung der Einheit zu sich selbst gedacht werden.

1) Vgl. dazu B 298; AK 204, 15 – 25.

(B 454, 456; vgl. auch B 300, AK. 205, 24–28). Und die Zahl ist ja »die Einheit des Synthesis des Mannichfaltigen einer gleichartigen Anschauung überhaupt, dadurch daß ich die Zeit selbst in der Apprehension der Anschauung erzeuge.« (B 182.) Das eigentliche sinnliche Schema der Zahl ist also eher ein gleichförmiger rhythmischer Vorgang, wie Pendelschlag, Pulsschlag, Herzschlag u. dgl.

Dies wird auch noch durch die folgende bekannte Stelle der »Methodenlehre« bestätigt: (B 751–752). Wir können unsere mathematischen Begriffe »in der Anschauung a priori bestimmen, indem wir uns im Raume und in der Zeit die Gegenstände selbst durch gleichförmige Synthesis schaffen, indem wir sie als bloße Quanta betrachten«¹ Dies ist »der Vernunftgebrauch durch Konstruktion der Begriffe«. »... im Raume eine Anschauung a priori zu bestimmen (Gestalt), die Zeit zu teilen (Dauer) oder bloß das allgemeine der Synthesis von einem und demselben in der Zeit und dem Raume und die daraus entspringende Größe der Anschauung überhaupt (Zahl) zu erkennen, das ist ein Vernunftgeschäft durch Konstruktion der Begriffe und heißt mathematisch.« [Der Gegensatz ist: »ein Vernunfterkentnis aus Begriffen, welches philosophisch genannt wird«.]²

Damit ist also die gesamte Mathematik, nicht etwa nur die Geometrie, sondern auch die Arithmetik, an die menschlich-kontingenten »Anschauungsformen« Raum und Zeit gebunden. Andere Vernunftwesen, obwohl sie als endliche immer irgendwelcher Anschauungsweisen bedürfen werden, um ihre Begriffe sinnlich zu machen³, können andere Formen der Anschauung haben. »Wir können nur vom Standpunkt eines Menschen vom Raum, vom ausgedehnten Wesen usw. reden«. (B 42.)

»Wir können von den Anschauungen anderer denkender Wesen gar nicht urteilen, ob sie an die nämlichen Bedingungen gebunden

1) Merkwürdig ist die Übereinstimmung mit Aristoteles, Met. K 3 (1061 a 34): »ἡ ποσὴ ἐστὶ καὶ συνεχὴ... θεωρεῖ« (f. o. S. 256 f., 269).

2) Vgl. dazu B 151–152 (AK 119, 25–120, 15) über die »synthesis speciosa«, die »figürliche Synthesis der transzendentalen Einbildungskraft; B 153–155 (AK 120, 31–122, 6) über die Notwendigkeit des Ziehens einer Linie, des Beschreibens eines Zirkels usw. und die Bemerkungen über das »Schema der sinnlichen Begriffe (als der Figuren im Raume)« und der reinen Verstandesbegriffe, wie z.B. die Zahl: B 179–81 (bef. 181), AK 136, 22–35.

3) Vgl. B 72–73 (AK 72, 23–73, 4); B 138 f. (AK 112, 12–33); B 145 f. (AK 116, 10–29); Kritik der Urteilskraft § 76–77.

seien, welche unsere Anschauung einschränken und für uns allgemein gültig sind«. (B 43.) – Entsprechend für die Zeit: »Die Zeit ist nichts anderes als die Form des inneren Sinnes, d. i. des Anschauens unserer selbst und unseres inneren Zustandes«. (B 49.) Die Zeit ist also lediglich »eine subjektive Bedingung unserer (menschlichen) Anschauung . . . und an sich, außer dem Subjekte, nichts.« (B 51.)

Mathematik ist also gewissermaßen *scientia imaginationis humanae*, durch und durch »anthropologisch befangen«, auch in ihren abstraktesten Spekulationen, die ja durchgehends den Begriff der Zahl wesentlich mit gebrauchen.

Damit verzichtet Kant völlig auf jede Möglichkeit einer Universalmathematik im Leibnizischen Sinn. Sein Verzicht bedeutet auch mathematisch eine klassizistische, man möchte sagen: eine »reaktionäre« Wendung. Die Statuierung der für den Menschen absoluten Geltung der euklidischen dreidimensionalen Geometrie ist z. B. eine Konsequenz dieser Wendung. Derselbe Kant, der in seiner Jugendschrift von 1747 die Idee der *n*-dimensionalen und vielleicht auch nichteuklidischen Geometrie faßte (deren Entwicklung sich damals anbahnte: Saccheri 1733, Lambert 1766), verwirft die freie »abendländische« Konzeption der Geometrie (Leibnizens geometrische Charakteristik) und kehrt zur klassisch-antiken Auffassung (über die im späteren Altertum schon Geminus hinausging) zurück. Damit trennt sich seine Philosophie der Mathematik von der positiven Forschung. Es muß aber hinzugefügt werden, daß auch in der Verfolgung der Kantischen Gedankengänge die Möglichkeit allgemeinerer »Geometrien« in »analytischem« Gewande, d. h. als arithmetischer Gebilde gegeben ist. Allerdings ginge dann jene abstrakt-»analytische« Geometrie natürlich im Kantischen Wortsinne *synthetisch* vor, nämlich als arithmetische Konstruktion, die sich auf die reine Anschauung der Zeitreihe gründet. Es wäre also vielleicht hier die Möglichkeit gegeben, »Räume« außermenschlicher Vernunftwesen in ihrem arithmetischen Abbild zu studieren. Aber freilich gäbe es nach Kant kein Prinzip, aus der unendlichen Fülle solcher arithmetischen Konstruktionen die geometrisch relevanten herauszuheben, da uns die Art der »Raumanschauung« außermenschlicher Wesen nicht bekannt werden kann¹.

1) Die moderne Verwendung nichteuklidischer »Räume« in der theoretisch-physikalischen Konstruktion (Relativitätstheorie, Quantentheorie) war Kant in seiner Jugendschrift von 1747 nicht ganz fremd. Er hätte jenen Gedanken auch in seiner kritischen Zeit (von 1770 ab) nicht unbedingt aufzugeben brauchen, denn die Natur ist ja nur so weit euklidisch-räumlich, als sie »in die Sinne

Kants Geometrie ist also die Wissenschaft vom »materialen Wesen« Raum, vom Anschauungsraum. Als solche ist sie durchaus berechtigt und in ihrer Art einzig¹. Kant erkannte freilich nicht, daß die abendländische Mathematik längst ihrer inneren Struktur nach in eine weitaus formalere Sphäre, die rein arithmetisch-analytische, vorgestoßen war. Durch seine weitgehende Parallelisierung von Zeit und Raum entging ihm, wenigstens zu einem gewissen Teile, der tiefe Unterschied von Arithmetik und Geometrie. Aber auch bei ihm ist doch Arithmetik Wissenschaft vom transzendentalen Schema der Zeitreihe, nicht von der Zeit selbst, während sich Geometrie auf das sinnliche Schema der Raumfigur bezieht².

Diese Lehre Kants von der Arithmetik als Wissenschaft vom zeitlichen Schema, der Zahl, ist das wichtigste Stück seiner Philosophie der Mathematik. Sieht man von Verschiedenheiten der Terminologie ab, so fällt die Kantische Grundauffassung ziemlich genau mit der modernen intuitionistischen (Brouwers) zusammen. Es ist eine Konsequenz dieser Auffassung, daß Mathematik wesentlich die Beherrschung des Unendlichen durch den endlichen Geist in der Form des indefiniten gesetzmäßigen Prozesses ist (obwohl das Kant ausdrücklich nirgends sagt). Das diese Beherrschung damit eng begrenzt ist im Verhältnis zum vollen Wesen des Unendlichen, ist offenbar. Die zweite und dritte Klasse der dialektischen Vernunftschlüsse, die auf den »transzendentalen Begriff der absoluten Totalität« einer unendlichen Reihe von Bedingungen bzw. auf die »absolute synthetische Einheit aller Bedingungen der Möglichkeit der Dinge überhaupt« gehen, führen zu

fällt.« (... *leges sensualitatis erunt leges naturae, quatenus in sensu cadere potest*»; Differt. von 1770, § 15 E). Es ließe sich denken, daß die Naturlehre gezwungen ist, auch auf die Natur als Ursache der räumlichen Erscheinungen einzugehen, sofern sie nicht in die Sinne fällt. Wenn etwa schon die Atome nicht sinnlich erscheinen, ist es dann notwendig, daß die den sinnlichen Erscheinungen zugrunde liegende Natur durch ein sinnliches Modell adäquat dargestellt werden kann? Im Grunde ist das gerade nach Kants eigener dynamischer Theorie der Materie nicht der Fall. Die die Materie konstituierenden anziehenden und abstoßenden Kräfte sind keine sinnlichen *dabilia*. Es wäre also die Anwendung nichteuklidischer und mehrdimensionaler Konstruktionen in dem unsichtbaren Mechanismus der Natur nicht unmöglich. Nur müssen diese erstens arithmetisch begründbar sein und zweitens die sichtbaren Erscheinungen im euklidischen Raum belassen.

1) Vgl. meine Arbeit »Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie ufw.« §§ 12/13, dt. Jahrbuch, Bd. VI, S. 481 ff. und auch S. 389–96.

2) Vgl. die schon oben zitierte Stelle B 181 (AK 136, 22–35).

Antinomien bzw. zum leeren Ideal. Die Lehre von den Antinomien besonders zeigt genau, daß es unerlaubt ist, über das indefinitum hinauszugehen¹.

Wir haben (in § 3 b und § 4 b Ende), daß Hilbert das Unendliche als Idee im Kantischen Sinne faßt, als absolute Totalität auf die das Indefinite hinzudrängen scheint. Vom Kantischen Standpunkt aus ist dazu warnend zu bemerken, daß die Ideen nichts als Blendwerke und »transzendentaler Schein« sind, von dem ein konstitutiver Gebrauch nicht gemacht werden darf, so notwendig er sich auch der menschlichen Vernunft aufdrängt.

Kants Philosophie der Mathematik hat zwar, recht ausgelegt, nicht die extreme klassizistische Enge, die man ihr manchmal zuschreibt. Insbesondere schließt sie nicht die Möglichkeit der »Metageometrien«, als rein mathematischer, arithmetisch-konstruierter Gebilde aus. Aber sie hält sich streng im Rahmen des phänomenologisch Begründbaren. Die indefiniten Zahlphänomene als Symbole für Transfinites anzusehen, liegt ihr ganz fern². Damit verschwinden die weitausgreifenden Leibnizschen Konzeptionen. Ontologisch leistet die Mathematik keineswegs die Überbrückung des Gegenfasses Gott – Mensch, sie muß sich damit begnügen, als eine interne anthropologische Angelegenheit zu gelten, dazu auch noch im Grunde unter der Logik und Kategorienlehre stehend, als Wissenschaft der Form der sinnlichen Phänomene und höchstens noch der Schemata, die zwischen Sinnlichkeit und Verstand vermitteln. –

An dieser Stelle nun drängt sich noch eine Frage auf, deren Beantwortung sich auch unsere flüchtige historische Betrachtung nicht entziehen kann, umsomehr, als sich dabei Gelegenheit bietet, die philosophische Grundposition Kants bezüglich der Mathematik noch schärfer zu charakterisieren. Wie konnte der große Gedanke der Universalmathematik, der aus der antik-mittelalterlichen Transzendentalienlehre erwuchs (Parallele des $\delta\upsilon\ \eta\ \delta\upsilon$ und des Mathematisch-Formalen schon bei Aristoteles!), bei Kant ganz verloren gehen? Wie erklärt sich diese befremdende Ausnahme, wo doch Kant in fast allen Fällen die rationalistischen Überlieferungen zu ihrem legitimen Ende führt?

1) Der subtile Unterschied, den Kant zwischen dem Progressus in infinitum und in indefinitum macht (B 538 ff.), offenbar zur Lösung des Leibnizschen Kontinuumproblems (f. o. S. 281 f.), hat auf die heutige Forschung keinen Einfluß gehabt und ist wohl nur von rein historischem Interesse.

2) Man vergleiche, in mathematischer Hinsicht, die Erörterung des Leibnizschen Verfahrens in dem Abschnitt über die »Amphibolie der Reflexionsbegriffe«.

Genauer handelt es sich um Folgendes: Was tritt bei Kant an die Stelle der *modi generalis entis*, desjenigen über die Gestalt (*εἶδος*, *species*) hinausgehenden (»transzendentalen«) Formalen, das sich auf das Seiende als solches bezieht?

Einerseits kommt hier die reine Analysis in Betracht, die »Logik des allgemeinen Verstandesgebrauchs«, die von allem Inhalt abstrahiert. Aber wir sehen schon: Sie hat es mit der bloßen Form des Denkens zu tun und ist daher in gewissem Sinne tautologisch, sie »bringt den Verstand nicht weiter.« In der Tat ist die reine Syllogistik ganz unfruchtbar¹.

Andererseits könnte man an die reine Synthesis begrifflicher Art denken. Hier tritt nun die eigentümliche Wendung ein, daß die Kategorien bei Kant nicht mehr als *modi specialis entis*, auf die anschauliche Gestalt der sinnlichen Erscheinung bezogen, auftreten, sondern als formale Weisen der Synthesis selbst. »Ich verstehe unter Synthesis in der allgemeinsten Bedeutung die Handlung, verschiedene Vorstellungen zueinander hinzuzutun und ihre Mannichfaltigkeit in einer Erkenntnis zu begreifen . . .« (B 103). »Die reine Synthesis, allgemein vorgestellt, gibt den reinen Verstandesbegriff« (= Kategorie)².

Und nun ist das Merkwürdige, daß die reine Analysis und Synthesis in ihren Modifikationen eine eigentümliche formale Analogie zeigen, wodurch der berühmte »Leitfaden zur Entdeckung der reinen Verstandesbegriffe«, auf den Kant selbst einen so ungeheuren Wert legt, nämlich der Übergang von der Logik der Urteilsformen zu der Kategorientafel, erreicht wird. »Dieselbe Funktion, welche den verschiedenen Vorstellungen in einem Urteile Einheit gibt, die gibt auch der bloßen Synthesis verschiedener Vorstellungen in einer Anschauung Einheit, welche, allgemein ausgedrückt, der reine Verstandesbegriff heißt. Derselbe Verstand also, und zwar durch eben dieselben Handlungen, wodurch er in Be-

1) Daß dies Leibniz entging, liegt daran, daß er stillschweigend »synthetische« Momente in seine Universalmathematik mit aufnahm.

2) Bemerkenswert ist auch die Fortsetzung der Stelle: »Ich verstehe aber unter dieser Synthesis diejenige, welche auf einem Grunde der synthetischen Einheit a priori beruht: so ist unser Zählen (vornehmlich ist es in größeren Zahlen merklicher) eine Synthesis nach Begriffen, weil sie nach einem gemeinschaftlichen Grunde der Einheit geschieht (z. B. der Dekadik). Unter diesem Begriffe wird also die Einheit in der Synthesis des Mannichfaltigen notwendig.« (B 104). – Sie zeigt, wie eng das arithmetische Denken mit der reinen Synthesis zusammenhängt.

griffen, vermittle der analytischen (!) Einheit, die logische Form des Urteils zustande brachte, bringt auch, vermittle der synthetischen Einheit des Mannichfaltigen in der Anschauung überhaupt, in seine Vorstellungen einen transzendenten Inhalt, weswegen sie reine Verstandesbegriffe heißen, die a priori auf Objekte gehen, welches die allgemeine Logik nicht leisten kann«. (B 104 – 105.) Es ist hier von einer »analytische« und einer »synthetische« Einheit gebenden Funktion die Rede, die formal-analog sind. Das allgemeinste formale Einheitsprinzip wird also über den Unterschied analytisch – synthetisch noch hinausgehen müssen. Es scheint hier also die höchste Stufe der Formalisierung erreicht, ohne daß es sich doch in jedem Fall um bloße Begriffszergliederung handeln müßte. Dieses Einheitsprinzip wird unter dem Titel »Verbindung« im zweiten Abschnitt der transc. Deduktion (§ 15) näher behandelt. Dieser Begriff bedeutet die »Vorstellung der synthetischen Einheit des Mannichfaltigen« in einem höchst allgemeinen Sinn. Es handelt sich nicht etwa um die Kategorie der Einheit, denn Kategorien setzen logische Funktionen in Urteilen, also schon Verbindung voraus. Sondern wir müssen »diese Einheit (als qualitative, § 12) noch höher suchen, nämlich in demjenigen, was selbst den Grund der Einheit verschiedener Begriffe in Urteilen, mithin die Möglichkeit des Verstandes sogar in seinem logischen Gebrauche enthält«. (B 131.) Kant weist hier zurück auf § 12, wo im Anschluß an das traditionelle »unum transcendens« von der »qualitativen Einheit des Begriffs« die Rede ist, »sofern darunter nur die Einheit der Zusammenfassung des Mannichfaltigen der Erkenntnis gedacht wird, wie etwa die Einheit des Thema in einem Schauspiel, einer Rede, einer Fabel«. (B 114.)

Hier ist also der Punkt, wo die Lehre von den Transzendenten bei Kant fortwirkt, in der höchsten und formalsten Idee der Einheit bzw. der Synthesis, und man könnte hier den Ort für eine mögliche Universalmathematik zu finden glauben. Freilich wird dies unum transcendens nicht mehr als *modus entis generalis*, als Charakter des Seienden als solchen angesehen. Die transcendentalia, »diese vermeintlich transzendenten Prädikate der Dinge [unum, verum, bonum] sind nichts Anderes als logische Erfordernisse und Kriterien aller Erkenntnis der Dinge überhaupt, und legen ihr die Kategorien der Quantität ... zum Grunde, nur daß sie [sc. die Alten] diese, welche eigentlich material, als zur Möglichkeit der Dinge selbst gehörig, genommen werden müßten, in der Tat nur in formaler Bedeutung als zur logischen

Forderung in Ansehung jeder Erkenntnis gehörig brauchten, und doch diese Kriterien des Denkens unbehutsamer Weise zu Eigenschaften der Dinge an sich selbst machten.« (B 113–114.) Man sieht hier sehr deutlich, wie sich der Sinn des Ausdrucks »transzendental« wandelt aus einem dem Sein als solchen zugehörigen Charakter in ein Kriterium des Denkens. Der Unterschied der »qualitativen Einheit« gegenüber den Kategorien ist jedoch in gewissem Sinn immer noch der zwischen formal und material, wobei mit material gemeint ist, daß die Möglichkeit der Gegenstände in Frage steht, während formal ohne Ansehen des Gegenstandes bedeutet. In der Tat muß der analytische Verstandesgebrauch ja auch mit getroffen werden und dieser ist ja unabhängig von der Möglichkeit irgend eines Gegenstandes.

Von hier aus führt nun Kants Gedankengang weiter zur »ursprünglich-synthetischen Einheit der Apperzeption, die selbst erst die analytische Einheit des Verstandes möglich macht.« Sie ist »der höchste Punkt, an dem man allen Verstandesgebrauch, ja selbst die ganze Logik und, nach ihr, die Transzendental-Philosophie heften muß, ja dieses Vermögen ist der Verstand selbst«. (B 133 Anm., AK 109 Anm., Z. 35–38.) Diese synthetische Einheit des Bewußtseins ist die Bedingung »unter der jede Anschauung stehen muß, um für mich Objekt zu werden«. Denn alle meine Vorstellungen müssen unter der Bedingung stehen, »unter der ich sie allein als meine Vorstellungen zu dem identischen Selbst rechnen« und also »als in einer Apperzeption synthetisch verbunden, durch den allgemeinen Ausdruck 'Ich denke' zusammenfassen kann«.

Man könnte denken, mit dieser höchsten formalen Spitze sei nun ein wesentlich universaler Charakter jeder Erkenntnis überhaupt erreicht. Aber Kant sagt: Dieser Grundsatz ist, trotz seiner unvermeidlichen Geltung als erstes Prinzip des menschlichen Verstandes, dennoch nicht jedem Verstande überhaupt zu eigen. »Derjenige Verstand, durch dessen Selbstbewußtsein zugleich das Mannichfaltige der Anschauung gegeben würde, ein Verstand, durch dessen Vorstellung zugleich die Objekte dieser Vorstellung existierten, würde einen besonderen Aktus der Synthesis des Mannichfaltigen zu der Einheit des Bewußtseins nicht bedürfen, deren der menschliche Verstand, der bloß denkt, nicht anschaut, bedarf«¹. (B 138–139.)

1) Vgl. dazu die weitere Stelle in § 21. (B 145.): die Kategorien, hätten für einen Verstand, »der selbst anschauete, wie etwa ein göttlicher, der nicht

Es ist also nach Kant der ganze Gedanke der Einheit der Apperzeption überhaupt nur sinnvoll, weil unser Verstand nicht anschauend ist. Weil der Mensch als Geschöpf (*ens creatum*) nicht schöpferisch ist (sondern nur Gott), deshalb hat er einen lediglich denkenden Verstand und damit Einheit der Apperzeption, um das ihm gegebene, nicht von ihm aus einheitlichem Grunde hervorgebrachte, zerstreute Mannigfaltige zu verbinden. Also auch hier wieder derselbe, uns genugsam bekannte ontologische Grundgedanke an entscheidender Stelle!

Damit ist die Idee des *unum transcendens* nicht bloß ins Subjektive, sondern sogar ins Anthropologische gewandt, das einheitsbildende Prinzip kommt nicht dem Seienden selbst, auch nicht dem Erkennen überhaupt, sondern der Erkenntnisfunktion des Menschen, bzw. höchstens des geschaffenen endlichen Vernunftwesens überhaupt zu.

Damit ist aber die Möglichkeit, eine »rein synthetische« Universalmathematik aus der näheren Explikation des *unum transcendens* oder seines bezugsmäßigen (»subjektiven«, d. h. genauer noetischen) Korrelats zu gewinnen, abgeschnitten. Sogar die synthetische oberste Einheit des Verstandes ist relativ auf das endliche denkende Wesen (die Kategorien im besonderen sogar relativ auf den Menschen, vgl. transc. Deduktion § 21 Schluß; B 145–146, AK 116, 23–29) also nicht universales Prinzip des Seienden oder korrelativ seiner Erkenntnis selbst.

Aber das ist noch nicht Alles. Man könnte immerhin annehmen, die reinen Verstandesbegriffe – und a fortiori eine etwaige formale Explikation der reinen Synthesis der Apperzeption überhaupt in eine universal-mathematische Bezugsmannigfaltigkeit – erstreckten sich »auf Gegenstände der Anschauung überhaupt, sie mag der unseren ähnlich sein oder nicht, wenn sie nur sinnlich und nicht intellektuell ist«. (B 148.) Das gäbe dann wenigstens eine für alle endlichen Vernunftwesen gültige synthetische Universal-Mathematik, die über Zeit und Raum hinausreichte (wenn auch natürlich Gottes Unendlichkeit ihr unerreichbar bliebe). Aber in Wahrheit erhielte man bloße »leere Begriffe von Objekten«, über deren Möglichkeit wir nicht urteilen können, »bloße Gedankenformen ohne objektive Realität«, weil wir keine Anschauung zur Hand haben, auf welche die synthetische Einheit der Apperzeption, welche jene

gegebene Gegenstände sich vorstellte, sondern durch dessen Vorstellung die Gegenstände selbst zugleich gegeben oder hervorgebracht würden«, keine Bedeutung.

allein enthalten, angewandt werden und so einen Gegenstand bestimmen könnten.« – »Unsere sinnliche und empirische Anschauung kann ihnen allein Sinn und Bedeutung verschaffen«. (B 148–149.) Wie in dem Abschnitt »Von dem Grunde der Unterscheidung aller Gegenstände überhaupt in Phaenomena und Noumena« ausführlich dargelegt wird, entspricht der isoliert, ohne Sinnlichkeit genommenen Synthesis des Verstandes »der transzendente Gegenstand d. i. der gänzlich unbestimmte Gedanke von etwas überhaupt«. (A 253.) Dieses »transzendente Objekt« bedeutet aber »ein Etwas = x, wovon wir gar nichts wissen, noch überhaupt ... wissen können, sondern welches nur als ein Korrelatum der Einheit der Apperzeption des Mannichfaltigen in der sinnlichen Anschauung dienen kann, vermittels deren der Verstand daselbe in dem Begriff eines Gegenstandes vereinigt.« (A 250.) Wir werden verleitet, »den ganz unbestimmten Begriff von einem Verstandeswesen als einem Etwas überhaupt außer unserer Sinnlichkeit« (d. i. »ein Noumenon im negativen Verstande«) »für einen bestimmten Begriff von einem Wesen, welches wir durch den Verstand auf einige Art erkennen können« (d. i. »ein Noumenon im positiven Verstande«) »zu halten«. (B 307.) Die Konsequenz der Aufdeckung dieser Verwechslung ist der Zusammenbruch der traditionellen formalen Ontologie: »Der stolze Name einer Ontologie, welche sich anmaßt, von Dingen überhaupt synthetische Erkenntnisse a priori in einer systematischen Doktrin zu geben ..., muß dem bescheidenen einer bloßen Analytik des reinen Verstandes Platz machen«. (B 303.)¹

Der Anhang zum Abschnitt über Phänomena und Noumena »von der Amphibolie der Reflexionsbegriffe«, besonders die Anmerkung dazu, gibt in Konsequenz der geschilderten Ablehnung des Noumenons im positiven Verstande eine Kritik der Leibnizschen Philosophie: »... Leibniz intellektuierte die Erscheinungen, so wie Locke die Verstandsbegriffe ... sensifiziert hatte«. »Anstatt im Verstande und in der Sinnlichkeit zwei ganz verschiedene Quellen von Vorstellungen zu suchen, die aber nur in Verknüpfung objektiv gültig von Dingen urteilen können, hielt sich jeder der beiden

1) »Wir haben einen Verstand, der sich problematisch weiter erstreckt als die Sphäre der Erscheinungen, aber keine Anschauung, ja auch nicht einmal den Begriff von einer möglichen Anschauung, wodurch uns außer dem Feld der Sinnlichkeit [d. i. unserer menschlichen Sinnlichkeit in Raum und Zeit!] Gegenstände gegeben und der Verstand über dieselbe hinaus affektorisch gebraucht werden könne« (B 310). —

großen Männer nur an eine von beiden, die sich ihrer Meinung nach unmittelbar auf die Dinge an sich bezöge, indeffen daß die andere nichts that, als die Vorstellungen der ersten zu verwirren oder zu ordnen«. (B 327.) »In Ermangelung einer transzendentalen Logik« wurde *Leibniz* »durch die Amphibolie der Reflexionsbegriffe hintergangen«. Der fundamentalen Täuschung der transzendentalen Reflexion (»Überlegung«) unterlag er, »weil er der Sinnlichkeit keine eigene Art der Anschauung zugestand, sondern alle, selbst die empirische Vorstellung der Gegenstände im Verstande suchte, und den Sinnen nichts als das verächtliche Geschäft ließ, die Vorstellungen des ersteren zu verwirren und zu verunstalten«. (B 332.)

Das ist nun freilich, so wie wir die Sache heute sehen, ein arges Mißverständnis *Leibnizens*. Denn dieser meint doch nicht, daß die Sinne als destruktives Moment die Vorstellungen des Verstandes verunstalten, sondern er sieht auch in der primitivsten, rohsten Sinnlichkeit ein Analogon, eine Repräsentation der klarsten göttlichen Ideenwelt, ein mystisches Einssein und Teilhaben mit dem Göttlichen; also ist das Sinnliche wohl eine unvermeidliche Trübung, die aber doch die Wesensgleichheit von Geschöpf und Schöpfer in der Tiefe nicht aufheben kann. Aber das Mißverständnis ist sehr charakteristisch für *Kants* Grundanschauung, die jeder Mystik als »Schwärmerei« durchaus abhold ist und sie für überheblich halten muß.

So führt auch die genauere Verfolgung der Möglichkeit einer rein synthetischen Mathesis universalis auf keinem der einzuschlagenden Wege zum Ziel; sie zeigt aber die Grundhaltung, die *Kant* gegenüber *Descartes* und *Leibniz* einnimmt, nunmehr in voller Deutlichkeit.

Kant ist der ganzen tiefen Struktur seiner Philosophie nach »Intuitionist« und darin *Descartes* verwandter als dem »rationalen Mystiker« *Leibniz*. Denn auch *Descartes* lehrt die ständige und radikale Abhängigkeit der endlichen Substanz von Gott und die absolute Beschränktheit der menschlichen Erkenntnis bezüglich des Unendlichen. (S. o. S. 273.) Aber darin sind wiederum alle drei abendländischen Philosophen einig, daß die Idee eines infinitum absolutum möglich ist, — im Gegensatz zur Antike (*Aristoteles*). Hierin ist freilich *Kant* am skeptischsten, indem er sowohl die kosmologische Idee der Totalität wie die theologische Idee des transzendentalen Ideals für »vernünfteln« und ohne konstitutive Bedeutung erklärt: aber er unterscheidet sehr fein zwischen ens imaginarium, ens rationis und nihil negativum (B 347 f.) Das ens imaginarium ist die reine Anschauungsform Raum und Zeit, ohne Substanz und wirklichen Gegenstand darin,

d. h. also die Domäne der rein intuitiven Mathematik. Das *ens rationis* ist der leere widerspruchslose Begriff, dem keine Anschauung entspricht, das »Gedankending« (bloße Erdichtung, obzwar nicht widersprechende) und das *nihil negativum* das »Un-
ding«, das dem Möglichen entgegengesetzt ist, indem sein Begriff sogar sich selbst aufhebt. Beides sind leere Begriffe, aber verschiedener Art.

Diese Begriffsbildung ist von sehr aktueller Bedeutung, denn Hilbert benutzt sie im Grunde zu seiner Interpretation der formalen Mathematik. Die Gegenstände der Hilbertschen Metamathematik (und der Brouwerschen intuitiven Mathematik) sind *entia imaginaria*, die der Hilbertschen formalen Mathematik *entia rationis*; was der Widerspruchsfreiheitsbeweis ausschließen soll, ist das *nihil negativum*. Aber freilich ist dieses *ens rationis* bestenfalls eine Idee, deren reale Möglichkeit dahinsteht. Es ist also vom Kantischen Standpunkt aus nicht einzusehen, wie Hilberts *entia rationis* physikalische Realitäten erklären können, gemäß der Idee einer »symbolischen Mathematik«, welche Idee freilich gar nicht an Kant, sondern an der ganz verschiedenen Grundauffassung von Leibniz orientiert ist¹. —

Mit Kant verliert bereits die schöpferische Mathematik die Fühlung mit der Philosophie. Nach ihm setzt eine tiefe Entfremdung zwischen den führenden Philosophen und der Mathematik ein. Die Philosophie der Mathematik verödet und notgedrungen zimmern

1) Vgl. Kants Bemerkung in der Kritik des ontologischen Gottesbeweises: (B 624 Anm.) »Der Begriff ist allemal möglich, wenn er sich nicht widerspricht. Das ist das logische Merkmal der Möglichkeit und dadurch wird sein Gegenstand vom *nihil negativum* unterschieden. Allein er kann nichtsdestoweniger ein leerer Begriff sein, wenn die objektive Realität der Synthesis, dadurch der Begriff erzeugt wird, nicht besonders dargetan wird, welches aber jederzeit . . . auf Prinzipien möglicher Erfahrung und nicht auf dem Grundsatz der Analysis (dem Satz des Widerspruchs) beruht. Das ist eine Warnung, von der Möglichkeit der Begriffe (logische) nicht sofort auf die Möglichkeit der Dinge (reale) zu schließen.« — Auf die Ideenlehre Kants (für die vor allem auch die »Kritik der Urteilskraft« heranzuziehen wäre) kann hier, wo die »symbolische Erkenntnis« nicht zum eigentlichen Thema der Untersuchung gehört, nicht näher eingegangen werden. Vielleicht würden sich doch auch positive Beziehungen zwischen Hilberts Auffassung des Aktual-Unendlichen als einer »Idee« und Kants »regulativem Gebrauch« der Ideen finden lassen. Freilich darf man nie vergessen, welch' tiefer Gegensatz zwischen Hilberts Widerspruchsfreiheitsbeweis und Kants Lehre von den kosmologischen Antinomien klafft. — Kants Definition des »transz. Ideals« als »*omnitude realitatis*« (B 599ff.) bedeutet zwar die Einführung des Aktual-Unendlichen, aber dieser Begriff ist mathematisch für Kant nicht relevant.

sich die positiven Mathematiker die »logischen Grundlagen« ihrer Wissenschaft zurecht, so gut es eben geht. Zwar sucht Riemann an Herbart und G. Cantor an Leibniz und an mittelalterlichen Theologen eine Stütze, aber tiefgreifend sind die Beziehungen nicht. Hufferls »Philosophie der Arithmetik« bedeutet eine entschiedene Wendung zum Intuitionismus, d. h. ungewollt zu Kant; Frege bekämpft den Psychologismus in der Logik, ohne daß jedoch eine geschlossene philosophische Stellung sichtbar würde; Russell verteidigt den mathematischen Existentialabsolutismus auf Grund des platonisierenden Begriffsrealismus von G. E. Moore, der seinerseits Motive der alten platonisierenden »Schule von Cambridge« wiederaufzunehmen scheint. Der Neukantianismus Natorps ist mit seiner eigentümlichen Vermischung »intuitionistischer« und »existential-absolutistischer« Ansichten im Grunde nie recht fruchtbar geworden und ohne wirkliche Fühlung mit den logischen Nöten der positiven Forschung geblieben. Hilbert versucht sich, wie wir sahen, mit recht zweifelhaftem Recht auf Kant zu stützen; Weyl, in seiner letzten Phase, nähert sich, merkwürdigerweise über Fichte und wohl auch Schelling, deutlich wieder Leibniz.

Soll in Zukunft die Philosophie der Mathematik als solche, d. h. in einem über eine positivistische »Grundlagenforschung« hinausgehenden Sinne, sich wieder vertiefen, so wird sie sich auf den großen Gegensatz Leibniz–Kant besinnen und die keineswegs ausgeglichenen Spannungen dieses Gegensatzes zur treibenden Kraft weiteren sachlichen Fortschreitens machen müssen.

IV. Systematische Erörterung der Frage nach dem Seinsinn des Mathematischen.

(Abschließende Bemerkungen über die gegenwärtige Problemlage.)

Überblickt man die in den vorangehenden Abschnitten entwickelte historische Orientierung in ihrer Gesamtheit, so tritt eine in der antiken und der abendländischen geistesgeschichtlichen Entwicklung merkwürdig analoge große Linie im Wandel der philosophischen Deutung des Mathematischen zutage, die man kurz bezeichnen könnte als den Übergang von der mathematischen Mystik zur Kritik. Entgegen der heute vielfach üblichen Anschauung (die die Marburger Neukantianer aufbrachten) muß man nämlich unter den vier großen von uns betrachteten Philosophen Plato mit Leibniz und Aristoteles mit Kant in sachlicher Hinsicht zusammenstellen, wenn es sich um mathematisch-philosophische Pro-

bleme handelt. Plato und Leibniz beginnen beide als offenkundige mathematische Mytiker, sie sind beide »Pythagoreer«¹; sie enden dann beide damit, dem Mathematischen eine bestimmende Rolle im Aufbau der Welt zuzuschreiben, es symbolisch die metaphysisch-ontologische Struktur darstellen zu lassen. Beide haben sie die Mikrokosmosidee, die Umformung der alten magischen Idee der universellen Sympathie in eine dem wachen (historisch werdenden) Bewußtsein erträgliche Form mit Hilfe des Mathematischen: bei Plato sind vor allem die Zahlgestalten in ihrer systematischen Entwicklung im diairetischen Schema das Symbol des universalen Syndesmos (vgl. die Interpretation Stenzels); bei Leibniz ist das Abbildungsverhältnis zwischen symbolischem Kalkül und dargestellter mathematischer Wesenheit das Schema der universalen Repräsentation².

Das Mathematische ist also beiden die Pforte zu tiefsten metaphysischen Erkenntnissen, es kommt für sie aus dem Magischen und führt, zur Wissenschaft geworden, zu einer geläuterten Auffassung des Weltgrundes selbst. Als Mathematiker wird der Mensch Gott ähnlich, stellt sich in die kosmische Sympathie hinein, erhebt sich schauend gleichsam über seine endliche Sphäre.

Aristoteles und Kant sind demgegenüber Kritiker, nüchterne Ermahner, allen mythischen Reminiszenzen und aller »Schwärmerei« zu entzagen. Beide entkleiden die Mathematik ihrer geheimnisvollen Bedeutung. Für beide ist die Mathematik eine abstrakte, nicht das zentrale Wesen der Dinge treffende Betrachtungsweise. (Nach Aristoteles betrachtet sie das Nichtgetrennte als Getrenntes (*τὰ οὐ κεχωρισμένα ὡς κεχωρισμένα*), nach Kant gibt sie »für sich keine Erkenntnis«. Eigentliche Erkenntnis geht bei beiden auf Wirkliches.) – Der Mathematiker bleibt endlicher Mensch, jeder über das Phänomenal-Aufweisbare hinausgehende Unendlichkeitsbegriff wird streng abgewiesen. Die »Kritiker« sind »Intuitionisten«, also, trotz des Namens das gerade Gegenteil mystischer »Seher«. –

1) Ich meine hiermit echte Pythagoreer, die man als primitive Philosophen der Mathematik vor Plato notwendig voraussetzen muß, wenn auch der »sogenannte Pythagoreer« Archytas nicht zu ihnen gehört, der vielmehr die kritisch-positivistische Richtung des Eudoxos, Menaidmos und schließlich Aristoteles eröffnet. (S. o. S. 199, Anm. 3.)

2) Vgl. die These Walter Feilchenfelds, »der Barockbau« der Leibnizschen Metaphysik sei ein großartiger Versuch, »die Begriffswelt des neuplatonisch-mythischen Systems der geistigen Struktur eines theoretisch-mathematisch denkenden Menschen kommunizabel zu machen«. (Zitiert nach Mahnke, L.'s Synthese usw. S. 74.)

Die Geschichte scheint also zu lehren, daß nur zwei große philosophische Stellungnahmen zur Mathematik möglich sind, die einander auch nicht endgültig ablösen. Denn am Ende der Antike, im Neuplatonismus, setzt sich die mythisch-metaphysische Deutung der Mathematik wieder durch, bei allem Bestreben, die Errungenschaften der inzwischen reich entwickelten positiven mathematischen Wissenschaft zu bewahren. (Proklos.) Vielleicht erleben wir heute etwas Ähnliches, jedenfalls ist es sehr zweifelhaft, ob sich Brouwers strenger Intuitionismus, der, philosophisch gesehen, durchaus aristotelisch-kantisches Erbe im besten Sinn ist, in der Gegenwart wird behaupten können¹.

Wir sind also heute, in »systematischer« Hinsicht, vor die Aufgabe gestellt, zwischen mathematischem Symbolismus und Kritizismus zu entscheiden bzw., wenn möglich, ihre sachlich der Kritik stahlhaltende Synthese zu vollziehen. Die in den vorangehenden Untersuchungen erreichten Ergebnisse müssen auf die Ebene dieser welt-historischen Problematik projiziert werden.

* * *

Wendet man sich mit phänomenologischen Methoden dieser Aufgabe zu, so wird die weitere Untersuchung sogleich von dem phänomenologischen Grundprinzip der Ausweisbarkeit aller »wahren« Phänomene bestimmt.

Dieses Prinzip des Zugangs, der möglichen originären Gegebenheit, das auch (in gewissem Sinne mit Recht) als das »Prinzip des transzendentalen Idealismus« bezeichnet zu werden pflegt, besteht in der Forderung, daß jedes echte Phänomen seinem eigenen Seinsinn nach sich ausweisen müsse, für den, dem seine adäquate Erfassung gelingt, in einem Akt originärer Anschauung, deren Art und Weise allerdings eine spezifische ist und sich nach der Natur der in Frage kommenden Gegenständlichkeit selbst richtet.

Wenn ein solcher adäquater Zugang auch nicht de facto für jedes zufällige Subjekt immer hergestellt werden kann, so muß doch eine solche ideale Variation der Bedingungen nicht bloß in abstracto denkbar, sondern auch als konkrete Perspektive erfaßbar sein, daß es zur originären Gegebenheit des Phänomens kommt². (Dabei kann sehr wohl diese »ideale Variationsmöglichkeit« realiter völlig und für immer ausgeschlossen sein. So gibt es spezifische nur dem Kinde

1) Vgl. den Wandel in den Ansichten des früheren Intuitionisten Weyl: Handbuch der Philosophie II A, S. 44, 13–18.

2) Vgl. Hufferl, »Ideen usw.« § 47–48 (S. 87 ff.) u. ö.

zugänglichen Phänomene. Der Erwachsene kann sich idealiter zum Kinde zurückverwandelt denken, aber nicht wirklich wieder zum Kinde werden und jene Phänomene wirklich haben. Ebenso gibt es nach Ansicht mancher heutigen Psychologen¹ und auch Phänomenologen² gewisse, für bestimmte Menschentypen spezifische Phänomene; auch hier ist die Verwandlung des Menschen eines anderen Typus in den für ein vorgeschriebenes Phänomen als »Subjektivität« notwendigen Typ realiter unmöglich.)

Das Prinzip der Ausweisbarkeit stellt nun offenbar den Phänomenologen in Fragen der Philosophie der Mathematik sofort in die Reihe der Kritizisten, also an die Seite von Aristoteles und Kant und in Gegensatz zu Plato und Leibniz, besonders zu dem letzten. Denn der »mathematische Mystiker« stellt sich in einen dem menschlichen Verstande und der menschlichen Anschauung grundsätzlich unzugänglichen übermenschlichen, göttlichen oder kosmischen, »sympathetischen« Zusammenhang hinein (bei Leibniz sehr deutlich durch sein univerelles Prinzip der »Repräsentation« bezeichnet), der dann in einer trotz aller scheinbaren Rationalität doch wesentlich mystisch bleibenden Vision erblickt wird. Wenn Leibniz der Mathematik die »symbolische« Erkenntnis in dem Sinne zuweist, daß sie vermittels ihrer »symbolischen Charakteristik« das Aktual-Unendliche (Transzendenz-Transfinite) der göttlichen Ideenwelt gewissermaßen in seiner bloß potentiell-unendlichen (immanent-finiten bzw. indefiniten) »Projektion« erfassen lehrt, so liegt darin die Annahme einer ununterbrochenen Kontinuität zwischen endlichem und unendlichem Wesen, welche Annahme aus dem Glauben an eine unio mystica mit Gott letztlich stammt. Dem nüchternen und wachen menschlichen Bewußtsein (ontologisch gesagt: dem historisch-menschlichen Dasein) ist eine derartige Perspektive bis zu Gott hin unmöglich, — sofern der traditionelle metaphysische Gottesbegriff des ens perfectissimum aufrecht erhalten wird, der nur durch die Negation der dem

1) Vgl. z. B. E. R. Jaensch, Über psychische Selektion, Anhang. (Zeitschrift für Psychologie, Abt. I, Bd. 98 (1926), bes. S. 201 ff.).

2) Scheler (Die Wissensformen und die Gesellschaft, Leipzig 1926, Vorwort): »Nicht die menschliche 'Vernunft' ihrem formalsten Wesen nach, die den 'Menschen' mitdefiniert, wohl aber das, was man ihre 'Organisation' und ihr subjektiv-kategoriales Gefüge zu nennen pflegt, befindet sich im Werden und in einer Entwicklung, die wahrscheinlich Wachstum und Verlust zugleich ist. Eine absolute geschichtliche Konstante 'menschlicher' Vernunftformen und -Prinzipien, die der größte Teil aller bisherigen Erkenntnistheorie als unwandelbaren Gegenstand ihrer Forschung naiv vorausgesetzt hat, ist nach der in diesem Buche vertretenen Ansicht ein Idol« (l. c. S. V).

Gefchöpf zukommenden endlichen, dem Menschen allein zugänglichen Eigenschaften bestimmt wird. (»Negative Theologie«). Es ist aber vom phänomenologischen Gesichtspunkt aus auch noch eine andere Interpretation des Begriffs des *ens perfectissimum* möglich. Man kann nämlich Gott als »idealisierten Menschen« fassen, ihm ein idealisiertes menschliches Erkenntnisvermögen zuschreiben usw., kurz ihn als den Limes definieren, dem sich der Mensch idealiter unbegrenzt annähern kann. Es würde also dann »idealiter« das Wort der Schlange im Paradiese gelten: »Eritis sicut Deus«. Dieses »ens perfectissimum« würde aber nicht das Aktual-Unendliche fassen können, es würde nicht einmal das kleinste »materielle Ding«, das ja nach Hufferl in einem endlosen »Flusse von Aspekten« allein gegeben werden und also wesensmäßig nie zu Ende gegeben sein kann¹, mit einem Schlage ganz erblicken können. Dieser positive Grenzbegriff, der im Grunde immanent ist oder höchstens »am Rande« des Immanenten liegt, ist freilich nicht zu verwechseln mit dem alten aktual-unendlichen »Urwesen« (im Sinne des *infinitum absolutum, increatum sive aeternum*). Der dem phänomenologischen Grenzbegriff zukommende Name ist also nicht »Gott«, sondern nur »Dämon«.

Man kann nun gegen Leibniz sagen, daß er »Gott« mit diesem »Dämon« verwechselt oder vielmehr, daß er in mythischer, rational nicht mehr einsichtiger Weise vom dämonischen zum göttlichen Wesen den Übergang vollzieht; die Perspektive auf das Dämonische hin ist dem Menschen noch zugänglich, das dämonische Wesen als Grenzbegriff phänomenologisch positiv aufweisbar, — die positive Perspektive auf Gott hin ist dem Menschen verschlossen: zwischen Dämon und Gott selbst klappt ein Abgrund, den auch die Brücke der Leibnizschen Kontinuität nicht rechtmäßig überwölbt.

Kant bewährt gerade hier seine kritische Nüchternheit. Der unüberwindliche Abstand zwischen Gott und Mensch, Schöpfer und Geschöpf ist sein Grundprinzip, das (wie wir zeigten), die Grundstruktur seiner Erkenntnistheorie bestimmt: Die radikale Unterscheidung von Verstand und Sinnlichkeit, abstraktem Denken und konkreter Anschauung ist die Folge (aber kaum der Ursprung) der metaphysischen Differenz zwischen *intellectus archetypus* und *ectypus*,

1) Vgl. Mahnke, Leibnizens Synthese usw., Seite 38 (Conturat), dazu Anm. 32 und 43; S. 130 (Heimsoeth). — Danach hat auch Leibniz selbst der »visio« Gottes nur ein Übersehen der unendlichen Begründungskette, nicht aber deren (wesensmäßig unmögliche) Erschöpfung zugeschrieben. — Vgl. andererseits Hufferl, »Ideen usw.« § 43 (S. 78 ff.).

zwischen intuitus originarius und derivativus: die »Urbildlichkeit« und »Ursprünglichkeit« entspringen allein göttlicher Schöpferkraft.

Phänomenologisch handelt es sich um das Grundverhältnis von leerer Intention und erfüllender Anschauung. Wohl ist die »Dunkelheit« der »verworrenen Vorstellung« mit ihrer »Leere«, ihrem Mangel an »Anschauungsfülle« verwandt, aber doch ist beides nicht dasselbe. Die »verworrene Vorstellung« kann »klar und deutlich« werden und doch leer bleiben. Die völlig leere, grundsätzlich unerfüllbare, weil auf anschaulich Widerfinniges gehende Intention kann als Intention völlig widerspruchsfrei, klar und deutlich sein. So immer im Falle des materialen, nicht »formal-analytischen« (Hufferl) Widerfinns, z. B. im Falle des Siebenflächners oder regulären Taufendflächners (im dreidimensionalen euklidischen Anschauungs-Raum). Umgekehrt kann eine ganz und gar erfüllte Anschauung unbestimmt und verworren, ihrem Wesen nach, sein, z. B. beim Phänomen des unbestimmten leisen Geräusches, bei gewissen optischen Phänomenen in schlechter Beleuchtung, bei »dunklen« Gefühlsregungen aller Art (neurotischer Angst u. dgl.) usw.

Man muß also Kant Recht geben, wenn er Verstand und Sinnlichkeit ihrem Wesen nach scheidet und keinen kontinuierlichen Übergang zwischen ihnen zuläßt¹.

Was Leibniz zu seinem Glauben an eine solche Kontinuität auf elementar-phänomenologischem Gebiet² veranlaßte, ist wohl die Tatsache, daß eine leere Intention sich stetig immer mehr, bis zur Fülle, mit Anschauung erfüllen kann. (Hufferl, VI. logische Untersuchung, I. Abschnitt.) Es handelt sich hier aber keineswegs um einen Übergang von Intention zu Anschauung, bei dem sich jene in diese verwandelt, sondern um ein »Sich-Erfüllen« der Intention, die als Intention deshalb nicht verschwindet, sondern sogar zumeist ihrerseits bestimmter und prägnanter wird.

So erweist sich also die Kantische Auffassung der Leibnizschen an Schärfe überlegen, was sich dann bewährt bei feinen ontologischen Grundunterscheidungen, die für die ontologischen Probleme

1) Hierbei ist der Unterschied von Sinnlichkeit und Verstand (Anschauung und Denken) dem zwischen Erfüllung und Leerintention gleichgesetzt; dasselbe gilt aber auch, wenn man den Gegensatz von sinnlicher und kategorialer Anschauung in Betracht zieht. (Vgl. Hufferl, VI. logische Untersuchung.)

2) Von den Phänomenen einer »natürlichen Symbolik« in Sprache, Mythos usw. ist hier nicht die Rede. Ob dort nicht die von Kant vergebens gesuchte »gemeinsame Wurzel« von Verstand und Sinnlichkeit zu finden sei, bleibe dahingestellt.

der modernen Mathematik so wichtig sind. Das »Verstandesding« (ens rationis), der leere, obzwar widerspruchsfreie, also »logisch mögliche Begriff« wird unterschieden vom »Unding« (nihil negativum), das in sich widerfönnig ist. Das Transzendent-Transfinite (für das man bei Kant als Beispiel das »transzendente Ideal« [Prototypen transcendente] nehmen kann) ist ein »leeres Ideal«, d. h. es ist logisch möglich, aber nicht real möglich, was bedeutet, daß es zu diesem Begriff keine mögliche Anschauung gibt, auf die er angewandt werden könnte, um »objektive« Bedeutung zu erlangen. Aber trotzdem ist die logische Möglichkeit nicht nichts; das Fehlen (die privatio) der sachlichen Möglichkeit (die »Nicht-Möglichkeit«) ist nicht gleichbedeutend mit der sachlichen Unmöglichkeit (der negatio der Möglichkeit). Das »leere Ideal« ist also eine Art nihil privativum bezüglich der realen theoretischen Zugänglichkeit, aber kein nihil negativum bezüglich jeder Zugänglichkeit. So ist es denn auch möglich, daß Gott als praktisches Postulat in der Ethik und als »Fiktion« in der Teleologie der Natur wieder auftaucht. Kants theoretische Stellung (in der Kritik der reinen Vernunft) ist also äußerst vorsichtig und verbaut sich keine Möglichkeit.

Der Standpunkt Hufferls ist vielleicht nicht ganz so vorsichtig, wie der kantische. Die klassische Phänomenologie Hufferls spricht der leeren logischen Möglichkeit (Widerspruchsfreiheit) dadurch jede wesentliche Bedeutung ab, daß sie die These aufstellt: Ist die Möglichkeit wirklich leer dem Wesen nach, d. h. prinzipiell nicht und niemals anschaulich zugänglich, dann enthält sie notwendig einen intuitiven (sei es nun formal-ontologischen oder materialen) Widerfönn. Ist dies aber so — und es muß notwendig so sein, sofern allein originäre, erfüllte Intuition wahrhaftes Sein begründet — dann ist der wesenhaft leere, obzwar widerspruchsfreie Begriff in sachlicher Hinsicht nicht bloß ein nihil privativum, sondern ein nihil negativum, d. h. es kommt keine sachliche Möglichkeit niemals und nirgends, auch nicht in »praktischen« oder »teleologischen« oder sonst welchen Zusammenhängen in Frage.

Diese Stellungnahme folgt mit Notwendigkeit schon aus Hufferls äußerst radikaler Kritik des »Psychologismus« und »Anthropologismus« in den »Logischen Untersuchungen« (I. Band). Denn jene Kritik involviert zwei Konsequenzen:

1. Die »Uniformisierung« sämtlicher, »praktischer« wie »theoretischer«, weltlicher wie religiöser Zugangsweisen auf den formalen Begriff der originären Anschauung. Man kann also nicht theoretisch die anschauliche Erfassung leugnen und sie »praktisch« als

»Postulat« wieder einführen. (Z. B. ist das kantische Gefühl der »Achtung« vor dem Sittengesetz, phänomenologisch gesehen, eine Weise des anschaulichen originären Zugangs!)

2. Die ideale Kontinuität aller ideal möglichen Subjekte als spezifischen Träger der noetischen Korrelate irgend welcher sachlich möglichen Gegenständlichkeiten. Keine fremde Subjektsart ist dem Menschen völlig transzendent. Darin liegt erst die radikale Ablehnung jeglichen »Anthropologismus«.

Beide Thesen sind nur Konsequenzen des Grundprinzips der universalen Ausweisbarkeit jeglichen Phänomens, mit dem der Phänomenbegriff selbst — zum mindesten innerhalb der »klassischen« Phänomenologie, wie sie in Hufferls »Logischen Untersuchungen« und »Ideen zu einer reinen Phänomenologie« vorliegt — steht und fällt.

Man kann dieses Prinzip als das des transzendentalen Idealismus bezeichnen. Denn es läßt nur solche Phänomene und Gegenständlichkeiten als möglich zu, die sich im »reinen Bewußtsein« konstituieren können. Und der formale Begriff »reines Bewußtsein« besagt eben in konkreter Interpretation, daß alle denkbaren Bewußtseinsweisen idealiter kontinuierlich zusammenhängen und also durch ideale (wenn auch keineswegs immer real mögliche) Variation aus der uns Menschen faktisch bekannten Bewußtseinsweise gewonnen werden können.

Von hier aus läßt sich der Bewußtseins- oder »Daseins«begriff der »hermeneutischen Phänomenologie« Heideggers dadurch erreichen, daß man einerseits die in Frage kommende »Subjektivität« (*ψυχή* in weitem Sinn), die von Heidegger mit Dasein in ontologischer Hinsicht bezeichnet wird¹, auf den Menschen (und zwar den Erwachsenen in unserer Kulturlage) einschränkt, andererseits aber (mit Heidegger) diese »objektiv« beschränkte Lebensform als die ausgezeichnete, weil reichste, die Möglichkeiten aller anderen primitiveren Lebensformen in sich enthaltende, auffaßt², so daß nur

1) Vgl. Heidegger, »Sein und Zeit«, § 4, Seite 12: »Und weil die Wesensbestimmung dieses Seienden [des Menschen] nicht durch Angabe eines sachhaltigen Was vollzogen werden kann, sein Wesen vielmehr darin liegt, daß es je sein Sein als feines zu sein hat, ist der Titel Dasein als reiner Seinsausdruck dieses Seienden gewählt.«

2) Heidegger, l. c. S. 13: »Dem Dasein gehört nun aber gleichursprünglich . . . zu: ein Verstehen des Seins alles nicht daseinsmäßigen Seienden.« — Ferner vgl. den ganzen § 10, besonders Seite 49–50: »In der Ordnung des möglichen Erfassens und Auslegens ist die Biologie als »Wissenschaft vom Leben« in der Ontologie des Daseins fundiert, wenn auch nicht ausschließlich

von ihr aus eine Interpretation anderer Weisen des Lebens überhaupt möglich ist. Der Übergang von der »formalen« Phänomenologie (Husserl) zur »hermeneutischen« (Heidegger) besteht also in der Zuspitzung des »reinen Bewußtseins« zum »historischen Dasein«; dies bedeutet eine Verengung, aber auch eine Konkretisierung. In dieser Konkretion tritt das idealistische Moment der formalen Phänomenologie ins Ontologische gewendet noch deutlicher hervor; »ἡ ψυχὴ τὰ ὄντα πῶς ἐστίν« (Aristoteles, de anima III, 8; 431b, 21¹.) Alles Seiende gewinnt erst sein Sein durch das »transzendente Sein«, das wesentlich (menschliches) Dasein ist oder eine teilweise Privation seiner.

* * *

Unsere eigenen mathematisch-ontologischen Einzelinterpretationen sind nun, wie leicht ersichtlich, durchweg an jenem »idealistischen« Prinzip der Ausweisbarkeit und teilweise auch an seiner konkreten Zuspitzung im Sinne der hermeneutischen Phänomenologie (das historisch-menschliche »Dasein« ist das »transzendente Sein«) orientiert.

Ein kurzer Rückblick wird dies zeigen:

Die Gegenüberstellung der beiden Definitionen mathematischer Existenz (§ 2) beruhte auf dem Gegensatz von Zugänglichkeit (Ausweisbarkeit) und Widerspruchsfreiheit (bloßer logischer Möglichkeit).

Die Kritik der Hilbertschen Neubegründung der Mathematik (§ 3) zeigte, daß die rein formal-mathematischen Gegenständlichkeiten im Gegensatz zu den »mathematischen« Gebilden entia rationis,

in ihr. Leben ist eine eigene Seinsart, aber wesentlich nur zugänglich im Dasein. Die Ontologie des Lebens vollzieht sich auf dem Wege einer privaten Interpretation; sie bestimmt das, was sein muß, daß so etwas wie Nur-noch-leben sein kann . . . Vgl. auch l. c. S. 58, 65.

1) Vgl. Heidegger, l. c. S. 14. — Über das Verhältnis Heideggers zum Idealismus vgl. l. c. § 43a, besonders S. 207–208; zusammenfassend sagt er (S. 208): »Befagt der Titel Idealismus soviel wie Verständnis dessen, daß Sein nie durch Seiendes erklärbar, sondern für jedes Seiende je schon das »Transzendente« ist, dann liegt im Idealismus die einzige und rechte Möglichkeit philosophischer Problematik. Dann war Aristoteles nicht weniger Idealist als Kant. Bedeutet Idealismus die Rückführung alles Seienden auf ein Subjekt oder Bewußtsein, die sich nur dadurch auszeichnen, daß sie in ihrem Sein unbestimmt bleiben und höchstens negativ als »undinglich« charakterisiert werden, dann ist dieser Idealismus methodisch nicht weniger naiv als der grobschlächtigste Realismus.«

reine »Verstandesdinge« sind, denen nur durch Erfchleichung (subreptio) Anschauungen untergeschoben werden können. Sie sind also keine (ausweisbaren) Phänomene, sondern (transphänomenale) bloße »Gefegtheiten«; sie können auch nicht zu Phänomenen werden (wie die imaginären Zahlen es durch Gauß wurden), sondern sie involvieren einen intuitiven und zwar »formal-ontologischen« Widerfinn: insofern das Unendliche, seiner ontologischen Natur nach, potentiell (*ὁυράμεν ὅν*) ist, d. h. ein Prozeß, aber keine aktuale Menge. Aussagen über »Gefegtheiten« sind nicht einzeln wahr oder falsch, sondern nur als System »konsequent«, »widerspruchsfrei« oder das Gegenteil. (§ 3 b; § 4 b.) Die völlige Inhaltslosigkeit aller Behauptungen über solche Gefegtheiten ließ sogar den Zweifel aufkommen, ob die Forderung der Widerspruchsfreiheit selbst in dieser Sphäre überhaupt noch sinnvoll bleibt, aber es erwies sich, daß ihr eine wesentliche Rolle auch im »Deduktions-Spiel« zufällt, nämlich die unbefchränkte Fortsetzbarkeit des Spieles zu sichern. (§ 3 a.)

Die positive phänomenologische Untersuchung des Unendlichen (§ 5 a, b), verbunden mit der geistesgeschichtlichen Interpretation des Unendlichkeitsbegriffs (§ 6 b, insbesondere I C, D; II; III A), ergab die Möglichkeit nicht nur des Indefiniten, sondern auch des Transfiniten als eines Prozesses. Die Anfänge zu einer konstruktiven Theorie der transfiniten Ordinalzahlen lassen sich durchweg sachlich interpretieren, als formale Ordnungstypen der möglichen Komplikationsstufen des reinen Bewußtseins. Dabei ist die phänomenologische Interpretation allerdings nicht imstande, die Unbestimmtheiten und Schwierigkeiten, die der mathematischen Theorie des Transfiniten gegenwärtig noch anhaften, von sich aus mit einem Schlage zu beseitigen. (§ 5 a IV, Math. Anh., zu § 5). Aber es gelingen doch zwei wichtige Feststellungen: erstens, daß die Antinomie, die mit dem Begriff der größten Ordnungszahl verknüpft ist, von innen heraus in ganz ungezwungener Weise vermieden wird (§ 5 a IIC, III) und zweitens, daß das Kontinuumproblem im Cantor-Hilbertschen Sinne ein durchaus sachliches, phänomenologisch verstehbares Problem ist. Die mathematischen Anfänge, die Hilbert seinem Lösungsversuch zu grunde legt, stehen in engster Beziehung zu unserem Aufweis der transfiniten Komplikation des reinen Bewußtseins. (§ 5 b III; Math. Anh., zu § 5.) Endlich verdient noch der Nachweis Erwähnung, daß in Hilberts eigener »Metamathematik« (Beweistheorie) indefinite und »halbtransfinite« Strukturen notwendig »inhaltlich«, d. h. als wirkliche Phänomene (nämlich in der Komplikation der in der Theorie vorkommenden noetischen Strukturen) vorkommen

(§ 3c, Math. Anh., zu § 3, II), wenn man nicht zu »archaischen« Denkmitteln seine Zuflucht nehmen will. (Math. Anh., zu § 3, III.)

Der transfinite Prozeß ist aber, wie sich weiter zeigte, nicht nur einer formal-phänomenologischen Ausweisung, sondern auch einer echten hermeneutischen Interpretation fähig, vermittels der Betrachtung der iterierten Reflexion auf sich selbst (§ 5a IIC). Die »Parenthesen-Reflexion«, die sich transfinit ohne Ende iterieren kann, erwies sich, hermeneutisch betrachtet, als der denkbar zugespitzteste Ausdruck für die radikale Bodenlosigkeit des vor sich selbst auf der Flucht befindlichen Daseins. Damit kommt das scheinbar rein mathematische Problem des transfiniten Prozesses in engen Zusammenhang mit den Grundbegriffen der Heidegger'schen Hermeneutik der Faktizität, nämlich der »Geworfenheit« und dem »Verfallen« des Daseins¹, und zugleich mit ihrer hermeneutischen Explikation. Die eigentümlich gesteigerte Endlosigkeit des transfiniten Reflexionsprozesses im Verhältnis zum bloß indefiniten zeigt die radikale Hemmungslosigkeit des »der Welt verfallenen« Daseins in seiner Alltäglichkeit. Die Enthüllung dieser spezifischen extremen Hemmungslosigkeit expliziert also einen Wesenszug des Verfallens des Daseins und bringt ihn zur Auslegung. Es erweist sich also die transfinite Endlosigkeit als ein für das Verständnis der Faktizität des alltäglichen Daseins wesentliches Phänomen, das über seine formale Merkwürdigkeit hinaus eine echte Lebensbedeutung besitzt. Das Transfinite ist also nicht bloß eine »sachliche« (nicht sachhaltige) Formstruktur des reinen Bewußtseins, sondern hat eine ganz konkrete, »historische« Wirklichkeit.

* * *

Dies tritt noch viel grundföhrlicher hervor in dem sehr merkwürdigen und grundlegenden Zusammenhang des transfiniten Prozesses mit dem Phänomen der Zeitlichkeit (§ 6b, bef. III). Dieser ist jetzt nochmals in systematischer Absicht zu würdigen:

Der Gedanke der Unendlichkeit, sobald er konkret vollzogen werden soll, föhrt auf das Phänomen der ins Unendliche laufenden Zeit. Das *ἀεί*, das »immer«, ist das konkrete Grundphänomen des *ἀπειρον*. (Dies zeigt auch die geschichtliche Entwicklung. Vgl. § 6b, IC.) Aber dieses »immer weiter« ist noch einer zweifachen konkreten Gestaltung fähig. Es kann erstens nichts anderes sein als eine einfache reine Wiederkehr, die »ewige« Wiederkunft identisch des selben Phänomens, wie bei der gewöhnlichen Zahlenreihe. Dies

1) Vgl. »Sein und Zeit« § 38. (Über »Hemmungslosigkeit« bef. S. 177f.).

ist die Form der rein naturhaften Zeit, wie sie etwa in der gleichförmigen Umdrehung des Fixsternhimmels zutage tritt¹. Das ist die »schlechte Unendlichkeit« im Sinne Hegels. Es kann aber auch sein, daß sich mit der immer wiederkehrenden Form ein immer neuer unvorausehbarer, frisch zu erschaffender Inhalt einstellt. Dies ist die Seinsweise der historischen Zeit und zwar zunächst im Erleben einer gesamten geschichtlichen Gruppe (Volk, Kulturkreis usw.). Die Kette der Generationen stellt eine naturhaft bedingte Wiederkehr dar, aber die geschichtliche Möglichkeit, Aufgabe und Leistung jeder »Generation« ist eine andere, jede Generation stirbt nicht nur leiblich, sondern mit ihr »stirbt« ihre spezifische geistesgeschichtliche Lage (ihr »Stil« im weitesten Sinn), um einer neuen unvorausehbaren Platz zu machen. Die historische Zeitlichkeit führt also immer ins Dunkel, was »nach dem (eigenen) Tode« ist, ist unbekannt. Diese Tatsache ist in ihrer Wucht gemildert bei der Gruppe, die ja in der neuen Generation fortlebt (»stirb und werde«!). Das Individuum aber stirbt (als historisches jedenfalls) endgültig: es ist unerbittlich vor »sein eigenes Vorbei« gestellt und »kommt an sein Nichts« (Heidegger). Das Merkwürdige in unserm Problemzusammenhang ist nun, daß auch diese »historische Zeitlichkeit«, ihrer formalen Struktur nach in gewissen mathematischen Bildungen sich darstellt.

Die »Wahlfolge«, die mit Recht als »frei werdend« bezeichnet werden kann, stellt den reinsten Typ historischer Zeitlichkeit dar. Der Akt der Wahl kehrt immer wieder, aber welche Zahl gewählt wird, hängt von der freien Willkür (mit gewissen Einschränkungen) ab; der Ausfall der Wahlen ist nicht voraussehbar, nur daß ständig gewählt wird, steht fest. Die frei werdende Folge ist also in »eigentlicher« (historischer) Weise zeitlich. Man kann verabreden, daß ein gewisser Wahlausfall den »Tod« der Folge, »die Vernichtung des ganzen Prozesses und seines Resultats« (Brouwer) herbeiführt. Das ist dann das Analogon zum »Tod« der historischen Menschen. Die gesetzmäßige Folge ist dagegen naturzeitlich. Jedes Glied ist nach identisch derselben Regel gebaut und die Struktur des tausendsten Gliedes ist mit derselben Sicherheit voraus sagbar, wie die des dritten etwa. (Es gibt allerlei Zwischenmöglichkeiten zwischen der freien Wahlfolge und der nicht rekurrent definierten gesetzmäßigen Folge mit völlig durchsichtigem Bildungsgesetz. Alle derartigen Bildungen

1) »Wiederkehr« ist nicht gleichbedeutend mit echter »Wiederholung«, wie schon das Phänomen der musikalischen »Reprise« zeigt. Vgl. dazu H. Besseler, Jahrb. d. Musikbibliothek Peters für 1926 (33. Jahr.), S. 73 ff.

sind ihrer Zeitlichkeit nach ein Gewebe aus historischen und naturhaften Einschlägen.) Die Aufgabe der mathematischen Wissenschaft besteht zu einem entscheidenden Teil darin, aus freien Folgen gesetzmäßige zu machen, d. h. das freie Werden hierin zu binden durch das Gesetz und damit das Dunkel der Zukunft zu erhellen (§ 4a, § 6b C). Mit anderen Worten: Die Mathematik ist die Methode, das Unendliche durch das Endliche zu beherrschen.

Der transfinite Prozeß ist ein merkwürdiges Geflecht aus historischen und nichthistorischen Momenten: Die immer gleichen Erzeugungsprinzipien müssen sich in immer neuer Weise eine konkrete Anwendungsmöglichkeit suchen, aber diese Möglichkeit ist doch durch die vorangegangenen Bildungen bestimmt und wird gewissermaßen von ihnen erzeugt. Während also die freie Wahl bei der Wahlfolge von »außen«, von einem ganz willkürlichen und quasi »transzendenten« Prinzip bestimmt wird, das man als »Schicksal« oder auch als das Geheimnis des frei schöpferischen historischen Geistes auffassen kann, trägt der transfinite Prozeß sein Gesetz in ihm selbst, aber verborgen, nur durch die schöpferische Tat des Mathematikers erschließbar und entdeckbar. In prinzipiell ontologischer Hinsicht besteht so eine enge Beziehung zu Hegels dialektischem Prozeß, in dem auch die ständig gleiche Form des Widerspruchs und seiner Versöhnung in immer neuer Weise sich konkret erfüllt, die doch wieder von der gesamten »Vergangenheit« der Entwicklung bestimmt ist. Denn jene »Vergangenheit« ist ja »aufgehoben«, d. h. nicht nur vernichtet, sondern auch »bewahrt«.

In jedem Fall aber geht die Tendenz der Mathematik auf Bestimmung der Unbestimmtheit des »eentlichen« Werdens, auf Bindung der freien Willkür durch die in unbeschränkter Wiederkehr anwendbare Regel, auf Erhellung der dunklen »Zukunft« durch das Wissen um die vorausagbare »Wiederkunft«, auf die Beherrschung der Offenheit des Unendlichen durch das geschlossene endliche Gesetz.

* * *

Welches ist der Seinsinn des Mathematischen (d. h. die »mathematische Existenz« im philosophischen Sinn), der hier sichtbar wird?

Das »Mathematische«, das $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ ist, wie wir sahen (S. 236), ein sinnvoll doppeldeutiger Ausdruck. Es bezeichnet einerseits die $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\sigma\iota\varsigma$, das Leben im Vollzug mathematischer Erwägungen und andererseits den »Gegenstand« dieser Erwägungen selbst.

Unfere Einzel-Betrachtungen haben, ausgehend von dem Prinzip der phänomenologischen Ausweisbarkeit und weiterhin der Auslegbarkeit auf das allenthalben zugrundeliegende Dasein selbst hin, den Vorrang der ersten »noetischen« oder wenn man will, »subjektiven« oder »idealistischen« Bedeutung von $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ gezeigt, soweit rein phänomenologische Gesichtspunkte in Frage kommen: $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ ist als Phänomen allenfalls der mathematische Gedanke, eigentlicher aber das mathematische »Denken« als lebendiger Vollzug selbst, — nicht aber sein etwaiger transzendenter Gegenstand.

Die genauere phänomenologische Analyse (in § 6a, S. 192—197) erwies, daß das Mathematische primär ein Bezugspphänomen ist. Als solches hat es seinen ontischen Schwerpunkt im Vollzug dieses Bezugs, in der konkreten Weise daseienden Lebens, in der dieser Bezug allein gelebt werden kann.

Das $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ ist also ontologisch zu charakterisieren als bloßes »noematisches« Korrelat zum »Mathematifizieren« ($\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\epsilon\nu\epsilon\sigma\theta\alpha\iota$), was analog wie »philosophieren« ($\phi\iota\lambda\omicron\sigma\phi\omicron\epsilon\iota\nu$) und »musizieren« ($\mu\omicron\upsilon\sigma\iota\kappa\epsilon\nu\epsilon\sigma\theta\alpha\iota$) eine echte lebendige Haltung ist, nicht das Betreiben eines gleichgültigen Geschäfts.

Eine solche Auffassung hat es allerdings gerade dem Mathematischen gegenüber schwer. Denn man kann gegen sie die Unbekümmertheit des echten Mathematikers um sich selbst, sein Tun und seine Daseinsform, seine Entfremdung dem eigenen faktischen Leben gegenüber, sein Ausgelöschtsein als historisches Individuum und ähnliche Züge, die wesentlich den Mathematiker als solchen kennzeichnen, anführen. Dem steht dann, paradox genug, gegenüber: die Anwendung der reinen Mathematik in der experimentellen Naturwissenschaft und ihrer Auswirkung, der Technik, die den aktivsten, dem praktischen Leben nächsten und ihn am meisten verhafteten Menschentyp erzeugte, den Ingenieur. Aber dieses Paradox löst sich leicht. Denn auch der Ingenieur, in seiner Raftlosigkeit und Freiheit von Hemmungen, in der Unbekümmertheit um die letzten Ziele seines Tuns (die ihm von außen, von den sozialen und wirtschaftlichen Bedürfnissen, die er (als Ingenieur) ungeprüft als zielflegend hinnimmt, gegeben werden) ist dem »eigentlichen Dasein« fern, ist bar jeder Vertiefung in das Historische des Lebens. Ist also das »Mathematifizieren« nebst seinen Anwendungen nicht doch bloßem »Betrieb« verfallendes Dasein?

Der Einwand ist indessen zu widerlegen, gerade durch die Tatsachen, die er für sich anführt. Und seine Widerlegung führt uns

nunmehr zur eigentlichen entscheidenden Frage nach dem Seinsinn des Mathematischen selbst.

Die »Selbstvergeffenheit« steht dem Mathematiker wohl an, geht doch seine letzte Ablicht auf die Überwindung des Historischen, konkreter: auf die Überwindung des Todes, von dem historisches Leben durch und durch bestimmt ist.

Wir zeigten: Die Mathematik ersetzt die historische Zeitlichkeit soweit als möglich durch die Naturzeit; das ist nur ein Symptom für die Verwandlung historischen Daseins in naturhaftes Leben, die sie vollzieht. Naturhaftes Leben ist aber »selbstvergeffen«, richtiger: es hat kein Selbst, den »Wer seines Daseins« (Heidegger) noch gar nicht gefunden.

Um den Seinsinn des Mathematischen zu verstehen, muß man das ganze ontologische Problem hineinstellen in die universale Spannung zwischen Historischem und Nichthistorischem, zwischen »Geist« und »Natur«¹.

»Geist« ist (wie wir das Wort hier verstehen) durch und durch historisch, d. h. gekennzeichnet durch die Seinsweise der eigentlichen Zeitlichkeit. (Norm, überzeitliche Geltung u. dgl. ist nichts Geistiges, sondern vom echten Geist aus gesehen, dessen Wesen in seiner freien Schöpferkraft besteht, Verfall (Erstarrung) historischen Daseins.) Dagegen ist alles primitive Leben (des Kindes, des »Naturvolkes«, der triebhaften Unterschicht in uns selbst, die in krankhaften Zuständen, aber nicht nur in diesen, zutage tritt) »Natur«.

Das primitive, »naturhafte« Leben kennt den Tod nicht, besitzt die Sehergabe (»Naturlichtigkeit«) und die »Allmacht der Gedanken« (Magie).

Das »wache«, historische Dasein verlor alle diese kostbaren Güter, um den Preis des »Selbstbewußtseins«, des Wissens um die eigene Existenz. Dieser ungeheure Verlust ist aber unerträglich und das Leben sucht ständig nach Möglichkeiten, im »Wachen« jene Vorzüge primitiven Daseins zurückzuerhalten. Ein Mittel dazu (unter anderen) ist die Mathematik (und andere »Vernunft«wissenschaften). Die menschliche ratio, mit ihren Anspruch auf ewige Geltung ihrer Erkenntnisse, ist offenbar nicht zeitlich im historischen Sinn, sondern — so paradox es auch klingt — naturzeitlich. Die »überzeitliche Vernunft« ist

1) Das Folgende kann hier nur als These hingestellt werden, für die der Verfasser die umfassende philosophische Begründung in späterer Zeit zu liefern hofft.

also ein primitiver Zug im historischen Dasein, sie ist ein archaisches Erbstück, sie bezeichnet die Naturgebundenheit und die relative Ungeistigkeit menschlichen Daseins.

Die Überwindung des Todes durch die Voraussicht der Zukunft und die Beherrschung der Natur, das ist die Leistung der auf Mathematik gegründeten Naturwissenschaft. Damit erfüllt sie, soweit es noch dem »wachen« Leben möglich ist, die Wünsche nach dem verlorenen Besitz des mythischen, »prähistorischen« Zeitalters.

Mathematik, Naturwissenschaft und Medizin entstehen geschichtlich aus den Künsten der archaischen Mantik und Magie. Diese Entwicklung ist nicht, wie man vielfach meint, ein historisches Kuriosum, sondern der äußere Ausdruck eines tiefen ontologischen Tatbestandes. Die »exakten« Wissenschaften ersetzen Mantik und Magie in völlig legitimer Weise¹.

Aber der prophetische und beherrschende Charakter des Mathematischen tritt nicht bloß in seinen Anwendungen, sondern schon in der »reinen Mathematik« zutage. Unübersehbare Zahlenbeziehungen werden etwa in der höheren Zahlentheorie (einer ganz besonders »rein« mathematischen Disziplin) durch endliche Gesetze beherrschbar und damit das Ergebnis von Rechnungen voraussehbar. Das »Mantische« ist also schon eine intern-mathematische Angelegenheit und hier gewissermaßen verlockend durch das eigentümliche Machtgefühl, das es dem »Eingeweihten« verleiht. Als reine seelische Haltung vereinigt also das »Mathematisieren« bereits das »Wachsein« und die »Zeitüberlegenheit«, Züge historischen und naturhaften Daseins. (Allerdings hat das Wachsein verständlicherweise gewisse Grenzen; es ist »selbstvergessen«.)

Von dieser Explikation der »mathematisierenden Haltung« aus fällt nun auch neues Licht auf unsere frühere Interpretation des Sinnes der demonstrativen und deduktiven Mathematik (§ 6a). Es wurde gezeigt, daß die rein deduktive Mathematik, die gar nicht mehr Erkenntnis sachlicher Wahrheiten, sondern nur widerspruchsfreie Ableitung von Folgerungen aus undurchsichtigen Prämissen zum Ziel hat, einen eigentlichen Begriff mathema-

1) Diese Thesen sind einer strengen Begründung auf Grund des historischen Materials fähig, die an dieser Stelle nicht gegeben werden kann. — Vgl. das früher (S. 239 ff.) über Platos Deutung des mathematischen »a priori« aus der *ἀνάμνησις* und das (S. 288, 308) über Leibnizens »mathematische Mystik« Gefagte.

tischer Existenz gar nicht kennt, daß vielmehr ihre ganze Sorge der reibungslosen Fortsetzung des inhaltlich ganz leeren Folgerungs-Betriebs gilt. Jetzt wird die Motivation dieses befremdlichen Formelspiels deutlicher. Beherrschung und Voraussage ist auch im Formelspiel in gewissem Sinne möglich. Man kann einen verwickelten Spielzusammenhang durch einfache Gesetze beherrschen und das Auftreten bestimmter »spielgerechter« Formeln im Folgerungsspiel voraussagen lernen. Der Reichtum und die Durchsichtigkeit der Spielbeziehungen hat einen eigentümlichen quasiästhetischen Reiz. In besonderem Maße wird dieser Reiz dadurch gesteigert, daß durch eine Art Erschleichung (im Sinne des mathematischen »Existentialabsolutismus«) dem leeren Spiel ein sublimier Sinn untergelegt wird, als ob man tiefe, übermenschliche Erkenntnisse über das Aktual-Unendliche, das Transzendent-Transfinite gewönne. Es wird mit anderen Worten die Illusion erregt, man beherrsche das Aktual-Unendliche. Aber diese Illusion hält der nüchternen Kritik nicht stand, sie verschafft uns zwar so etwas wie einen erfüllenden Traum archaischer Wünsche, — aber beim Erwachen zerrinnt alles in Nichts. Also auch vom rein »noetischen«, »immanenten« Gesichtspunkt des mathematisierenden Bewußtseins aus ist die reine Deduktion zwar verständlich, aber nicht ihrer eigentlichen Absicht entsprechend. Es gelingt in dieser geistigen Haltung nicht, volles Wachsein mit naturhaftem Befriedigtsein zu vereinigen; das Gleichgewicht der historischen und der naturhaften Tendenzen ist gestört, zuungunsten des Historischen. Die »Sachlichkeit« der Mathematik ist also schon eine immanente Forderung der Daseinsweise des faktischen Lebens selbst, ohne daß eine bewußtseins-transzendente »Objektivität« in Rücksicht gezogen werden braucht.

Überblicken wir die vorstehenden Betrachtungen mit Rücksicht auf die historisch überlieferte Problem-Spannung zwischen mathematischer Mythik (Plato, Leibniz) und mathematischem Kritizismus (Aristoteles, Kant), so kann kein Zweifel sein, daß sie für die Kritik und gegen die Mythik entscheiden. Soweit immanent-phänomenologische Gesichtspunkte in Frage kommen und soweit es sich um reine Mathematik handelt, vermag die Theorie der reinen Gesetze ihren spielerischen Charakter nicht zu überwinden. Und, was noch ausschlaggebender ist, jenes formal-mathematische »Spiel« (im Sinne Hilberts) ist eben auch nicht als Weise des Lebens, als Spielbetätigung oder besser als spielendes Dasein die Erfüllung einer großen

Lebensaufgabe. Erst der Ernst der Sachlichkeit vermag daseinsmäßig Entscheidendes zu leisten! –

So sehr nun aber innerhalb der Sphären der reinen Mathesis, die wir in dieser Abhandlung allein untersucht haben, die »Kritik« die »reine Phänomenologie«, der »Idealismus« und der historisch-hermeneutische Gesichtspunkt letztlich den Seinsinn des Mathematischen entscheidend bestimmen, so bleibt doch noch ein ungeklärter Rest.

Gedankenallmacht und Vorausfrage, Magie und Mantik beziehen sich ursprünglich, im prähistorischen Leben unbedingt auf die Wirklichkeit. Die Reduktion des mathematischen Gedankens auf das reine, wirklichkeitsfreie Mathematische, die wir selbst ja auch erst nachträglich vollzogen, ist ein künstliches Verfahren, das den ausschlaggebenden Anspruch primitiven Lebens, der sich durch die Mathematik ins historische Dasein »hineinretten« soll, unbefriedigt läßt, – eben der Anspruch auf die Beherrschung der wirklichen Welt. Die Mathematik soll ja nicht lediglich eine Art Seelentechnik sein, um sich, bei kühlem Blute, in eine Art »kalter Ekstase« hinein zu versetzen (wie sie Thomas Mann im »Tonio Kröger« dem Künstler zuschreibt), in der der seelische Habitus archaischen Lebens wieder auflebt. Die Mathematik soll mehr sein als solch ein wacher Traum; sie soll die »vermeintliche« Beherrschung der Wirklichkeit zu einer »wirklichen« machen. Sie erreicht also erst als mathematische Naturwissenschaft ihre eigentliche, ihr von ihrem Wesen vorgezeichnete Absicht.

Damit aber tritt das Transzendente auf den Plan. Es tritt die Frage auf, ob das *μάθημα* auch einen echt »gegenständlichen«, »objektiven« Sinn haben kann.

Dies ist eine Frage ganz anderer Ordnung als alle bisher behandelten. Es ist die Frage der Anwendungsmöglichkeit des Mathematischen auf die Natur.

Auf die sich damit eröffnende neue Richtung der ontologischen Problematik mathematischer Existenz, die man etwa mit den Worten ausdrücken kann: »Was befragt die Existenz mathematischer Gegenstände?«, kann hier am Schlusse dieser Arbeit nur noch ein kurzer Hinweis gegeben werden. Es ist aber unmöglich, ganz an ihr vorüber zu gehen, weil im Hinblick auf diese neue Frage die »mathematische Mystik« in einem neuen Lichte erscheint. Denn ihr Grundglaube ist doch, daß die Wirklichkeit mathematischer Beherrschung sich willig fügt.

Auch die bewunderungswürdige Befonnenheit Kants ließ der Kritik der reinen Vernunft, nach der »der Verstand der Natur die

Gefetze vorschreibt«, die Kritik der Urteilskraft folgen, wo mit Recht gesagt wird, daß, um die allgemeinen Grundfätze des reinen Verstandes, wie etwa das Prinzip der Kausalität, auf die Natur konkret anwenden zu können, noch mehr erfordert wird als die Einsicht in die Notwendigkeit der Verstandesgrundfätze. Dann mögen jene immerhin die Form der weltlichen Erfahrung bestimmen (sie gehen »auf die Möglichkeit einer Natur [als Gegenstands der Sinne] überhaupt«), so bedarf doch die »reflektierende Urteilskraft, die von dem Besonderen der Natur zum Allgemeinen aufzusteigen die Obliegenheit hat« eines neuen Prinzips, um die »Einheit aller empirischen Prinzipien« und »die Möglichkeit der systematischen Unterordnung derselben untereinander« zu begründen. Dieses Prinzip sieht Kant darin, die Naturgesetze so zu betrachten, »als ob gleichfalls ein Verstand (wenn gleich nicht der unsrige) sie zum Behuf unserer Erkenntnisvermögen, um ein System der Erfahrung nach besonderen Naturgesetzen möglich zu machen, gegeben hätte«. Es bedarf nämlich einer gewissen »Zusammenstimmung der Natur zu unserem Erkenntnisvermögen«, damit wir überhaupt durchsichtige Gesetze in der Natur erblicken können. Denn es könnte, unbeschadet der strengen Erfüllung des Kausalprinzips, »die spezifische Verschiedenheit der empirischen Gesetze der Natur« so groß sein, »daß es für unseren Verstand unmöglich wäre, in ihr eine faßliche Ordnung zu entdecken«¹.

Ähnlich sagt ein moderner führender Mathematiker²: »Und zwar ist das Entscheidende: je weiter die Analyse fort schreitet, in je feineren Details also die Vorgänge erfaßt und in je feinere Elemente sie zerlegt werden, um so einfacher – nicht wie man erwarten sollte, um so komplizierter – werden diese gesetzmäßigen Grundbeziehungen, und um so vollständiger und um so genauer erklären sie den tatsächlichen Verlauf.« Es liegt also hier ein sehr deutliches Entgegenkommen der Natur vor. Man kann keinesfalls (wie H. Dingler meint) sicher sein, durch ein schematisches abstrahierendes und approximierendes Verfahren zu durchsichtigen Naturgesetzen zu gelangen; die Verwicklung der Gesetzmäßigkeit könnte jedes weitere Vordringen bald hemmen. »Die Setzung der realen Außenwelt garantiert nicht dafür, daß diese in der Vernunft sich aus den Erscheinungen durch die Einstimmigkeit schaffende Erkenntnisarbeit konstituiere; dazu ist vielmehr nötig, daß sie von einfachen Elementargesetzen durchwaltet sei. Die bloße

1) Vgl. »Kritik der Urteilskraft«, Einleitung, Abschnitt IV und V.

2) H. Weyl, Handbuch der Philosophie, Abt. II, Beitrag A, S. 108, 2ff.

Setzung der Außenwelt erklärt also eigentlich nicht, was sie doch erklären sollte, sondern die Frage nach ihrer Realität fließt untrennbar zusammen mit der nach dem Grunde für die gefügig-mathematische Harmonie der Welt. So liegt die Antwort denn doch, jenseits des Wissens, in Gott...¹.

Auch Hufferl sind derartige Gedankengänge nicht fremd, wie verschiedene Stellen seiner »Ideen zu einer reinen Phänomenologie« zeigen. Er wirft (S. 5 und S. 119, Anmerkung) die Frage auf, ob und wie eine »Tatsachenwissenschaft von den transzendental reduzierten Erlebnissen möglich sei« und »welche Beziehung eine solche Tatsachenforschung zur Idee der Metaphysik haben mag«. In dem § 58, mit dem Titel »Die Transzendenz Gottes ausgeschaltet« wird, außer auf die wunderbare Teleologie der menschlichen Kulturentwicklung auch auf die »Rationalität« der bloßen Natur hingewiesen, die in der Existenz einer »morphologisch geordneten Welt« liegt, die weiterhin sogar die Auffindung exakter Naturgesetze gestattet.² »In all dem liegt, da die Rationalität, welche das Faktum verwirklicht, keine solche ist, die das Wesen fordert, eine wunderbare Teleologie«. (S. 110, vgl. auch die »Anmerkung« auf S. 96f.)

Es wird also jedenfalls die Frage nach dem Sinn der Realität der Natur neu aufgeworfen. Kant bleibt in seiner vorsichtigen Weise bei der »subjektiven« Notwendigkeit stehen, daß die Naturerkenntnis ihrer Möglichkeit nach eine solche harmonisch-einfache Natur voraussetzt. Der »mathematische Mytiker« freilich wird Gottes Ideenwelt im Spiegel dieses harmonischen Universums zu erblicken glauben. Und hier besteht nur eine Beziehung zur »symbolischen Mathematik« Leibnizens und seiner Nachfolger Hilbert und Weyl (in seiner neuesten Phase). Die Harmonie der Natur ist aus konstitutiven Gründen nicht als mit Notwendigkeit realisiert einzusehen. Wohl muß eine Welt, wenn sie als solche unserem endlichen Bewußtsein erfaßbar sein soll, eine (bis zu einem gewissen

1) Weyl, l. c. S. 89, 47 ff.

2) Vgl. l. c. S. 110: »Die Reduktion der natürlichen Welt auf das Bewußtseinsabsolute ergibt faktische Zusammenhänge von Bewußtseins-erlebnissen gewisser Artungen mit ausgezeichneten Regelordnungen, in denen sich, als intentionales Korrelat, eine in der Sphäre der empirischen Anschauung morphologisch geordnete Welt konstituiert, d. i. eine Welt, für die es klassifizierende und beschreibende Wissenschaften geben kann. Eben diese Welt läßt sich zugleich, was die materielle Unterstufe anlangt, im theoretischen Denken der mathematischen Naturwissenschaften als »Erscheinung« einer unter exakten Naturgesetzen stehenden physikalischen Natur bestimmen.«

Grade) »harmonische« fein. Das Phänomen »Welt« ist seinem eignen Sinne nach Kosmos und nicht Chaos. Aber, daß eine Welt wirklich existiert, das ist von dem Gesichtspunkt phänomenologischer Konstitution aus »zufällig«. In dieser Kontingenz drückt sich ein metaphysischer Tatbestand aus.¹ Darüber hinaus² nun zeigt die Tatsache des Bestehens der modernen Physik, daß die »symbolische«, unverständliche, transzendent-transfinite Mathematik Hilberts die Harmonie der Welt entschleierte. Also hat jenes leere Formelspiel einen geheimnisvollen Bezug auf die metaphysische Struktur des Kosmos. Welches ist der Sinn und der Grund jenes Bezugs?

Diese Frage ist hier nicht mehr zu beantworten. Sie stellt den ungelösten Rest des Problems der mathematischen Existenz dar, den wir am Schlusse dieser Abhandlung stehen lassen müssen. Es taucht hier methodisch eine neue Fragestellung auf: Die Aufgabe der Deutung (divinatio, *μαντεία*) eines Phänomenzusammenhangs, die sich von der Auslegung (*ἐρμηνεία*, interpretatio) und erst recht von der Aufgabe der Ergründung der formalen Konstitution der Phänomene unterscheidet. Auch sie ist in gewissem Sinn eine onto-

1) Hufferl betont (in dem angeführten § 58 der »Ideen«) ausdrücklich, daß die in der Teleologie der Natur und der menschlichen Kulturentwicklung sich äußernde (göttliche) Transzendenz eine neue ist, »der Transzendenz der Welt gleichsam polar gegenüberstehend« (S. 110). Er spricht (S. 111) von der »Existenz eines außerweltlichen »göttlichen« Seins«, welches »nicht bloß der Welt, sondern auch dem »absoluten« Bewußtsein transzendent wäre.« »Es wäre also ein »Absoletes« in einem total anderen Sinne als das Absolute des Bewußtseins, wie es andererseits ein Transzendentes in total anderem Sinne wäre gegenüber dem Transzendenten im Sinne der Welt.« — Damit ist der Grund, aus dem jene Teleologie entspringt, mit voller Klarheit als metaphysisch gekennzeichnet.

2) Es wäre auch eine »ungefähr« harmonische Welt denkbar, die nicht von exakten Naturgesetzen beherrscht wird. Das tägliche (»vorwissenschaftliche«) Leben rechnet immer nur ungefähr (*ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ*, Aristoteles), mit einer für die Praxis hinreichenden und bequemen Genauigkeit. Die gesamte Antike kannte kaum exakte Naturgesetze außer den astronomischen und einzelnen statischen und geometrisch-optischen Sätzen. Aber auch in der heutigen Physik sind die unmittelbar verifizierbaren, sog. »phänomenologischen« Gesetze fast alle statistische Überschlüsse und bloß approximativ und mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zutreffend. Es liegt also in der Forderung exakter physikalischer Elementargesetze sehr viel mehr als das Postulat einer Welt, »in der es sich leben läßt« — in anderer Hinsicht freilich auch viel weniger! (Derartige Gedanken sind von Hufferl mehrfach in Vorlesungen und Übungen entwickelt worden.)

logische, aber nicht mehr im Sinne einer hermeneutischen Explikation des »Seinsfinnes«, sondern — vielleicht — einer »Erdeutung« eines transzendenten »Seinsgrundes«. Das Korrelat dieser Deutung, das in ihr zu Deutende, ist das »Naturhafte« in dem weiten, früher erläuterten Sinn. Die Natur (Physis) ist das wahrhaft »Metaphysische« im Gegensatz zur Immanenz des Historischen. Innerhalb dieser großen neuen Aufgaben der Deutung, deren systematische Betrachtung man als »mantische Phänomenologie« (in Analogie zur »hermeneutischen«) bezeichnen könnte, hat vielleicht auch die moderne »mathematische Mytik« Hilberts und Weyls eine Stelle¹.

Dies kann hier nicht mehr Gegenstand der Untersuchung sein. Mag auch die spätere phänomenologische Forschung, die in der angedeuteten »mantischen« Richtung vorzudringen in Zukunft unbedingt bestrebt sein muß², die Berechtigung der »symbolischen« auch gegenüber den hier verteidigten und ihrem Seinsinn nach untersuchten »fachlichen« Mathematik erweisen — die Beschränkung auf den ontologischen Gesichtspunkt im traditionellen und im hermeneutischen Sinn war notwendig. Denn wie es auch um die Deutung des Transzendent-Metaphysischen stehen möge — man muß wissen wo die immanent-phänomenologische Sphäre endet und die »jenseitige« in einem gewissen Betracht transphänomenale beginnt, soll nicht eine hemmungslose Mytik das mühsam angebaute Gebiet kritischen Wissens überfluten.

1) Zitiert doch Weyl selbst als Motto seiner Darstellung der Philosophie der Naturwissenschaft den heraklitischen Spruch (fr. 93 Diels): 'Ο ἀναξ, οὐ τὸ μαντεῖόν ἐστι τὸ ἐν Δελφοῖς, οὔτε λέγει οὔτε κρύπτει ἀλλὰ σημαίνει. (Handbuch der Philos. II A. S. 65).

2) Es sei noch dazu folgender, rein philosophischer Gedankengang angedeutet: Indem das Naturhafte und das Historische unterschieden wird, ist schon der Kreis der historischen Immanenz durchbrochen und die Geschlossenheit idealistisch-hermeneutischer Forschung unwiederbringlich verloren. Denn jener große Prozeß der »Historisierung« des Naturhaften und sein Gegenteil (die »Naturalisierung« des Historischen, wie sie etwa im »Verfallen des Daseins« [Heidegger] sich äußert), spielt doch selbst in einer bestimmten »Zeitlichkeit«, die sicher nicht die historische und auch nicht einfach die naturhafte ist. Man wird sie also kaum anders als »metaphysisch« bezeichnen können. Von hier aus wird die These: Physis = Metaphysis offenbar erschüttert: man wird dazu gedrängt, zwei Arten des Metaphysischen zu unterscheiden; das uns (relativ) Naheliegende und in der »Deutung« Zugängliche (die Natur) und die eigentlich im zugespitzten Sinn transzendente Sphäre, innerhalb der sich der Kampf von Historischem und Nichthistorischem entscheidet. Vielleicht hat diese eine Beziehung zur Transzendenz Gottes selbst.