Arch. math. Logik 16 (1974), 49–66.

EINE VARIANTE ZUR DIALECTICA-INTERPRETATION DER HEYTING-ARITHMETIK ENDLICHER TYPEN*

Von Justus Diller, München, und Werner Nahm, Bonn

Bei der Dialectica-Interpretation der Heyting-Arithmetik **HA** in der Theorie **T** der primitiv-rekursiven Funktionale endlicher Typen verwendet K. Gödel in [2] wesentlich die Existenz von charakteristischen Termen für Formeln aus **T**, die nur aus Gleichungen vom Grundtyp zusammengesetzt sind. Für Gleichungen höheren Typs gibt es solche Terme erst in einer Erweiterung **T** + E von **T** um Gleichheitsfunktionale E mit $Eab = 0 \leftrightarrow a = b$. Diese Gleichheitsfunktionale sind im Gegensatz zu den Funktionalen aus **T** nicht stetig und in **T** + E nicht beweisbar rekursiv, und rekursive Modelle von E sind nicht extensional (vgl. § 4). Wir führen in § 1 eine Erweiterung $\mathbf{T}_\wedge$ von **T** um einen beschränkten Allquantor ein und geben in § 2 eine Variante $\hat{}$ der Gödel-Übersetzung an, bezüglich der sich die Heyting-Arithmetik $\mathbf{HA}_\omega$ endlicher Typen in $\mathbf{T}_\wedge$ interpretieren läßt. Diese Interpretation ist unabhängig von der Existenz charakteristischer Terme und läßt sich fortsetzen auf beliebige Erweiterungen von $\mathbf{HA}_\omega$ um Formeln aus $\mathbf{T}_\wedge$ mit neuen Grundfunktionalen. In § 3 geben wir eine schnittfreie Darstellung für die in $\mathbf{T}_\wedge$ herleitbaren geschlossenen Formeln.

§ 1. Die Theorie $\mathbf{T}_\wedge$ mit beschränktem Allquantor

Typengrundzeichen sind o, (,).

Induktive Definition der Typen.

1. o ist ein Typ.
2. Sind σ, τ Typen, so ist auch $(\sigma)\tau$ ein Typ.

Man kann o als Klasse der natürlichen Zahlen, $(\sigma)\tau$ als Klasse von Abbildungen von σ nach τ auffassen.

Grundterme sind

1. die Ziffer 0 vom Typ o,
2. die Nachfolgerfunktion N vom Typ oo,
3. der Kombinator $K_{\tau\sigma}$ vom Typ $\tau\sigma\tau$ (für alle Typen σ, τ),
4. der Kombinator $S_{\varrho\sigma\tau}$ vom Typ $(\varrho\sigma\tau)(\varrho\sigma)\varrho\tau$ (für alle Typen ϱ, σ, τ),
5. der Iterator J_τ vom Typ $(\tau\tau)\tau o\tau$ (für alle Typen τ),
6. Variablen eines jeden Typs.

* Eingegangen am 13. 12. 1971.

Induktive Definition der Terme.

1. Jeder Grundterm vom Typ τ ist ein Term vom Typ τ.
2. Ist a ein Term vom Typ $(\sigma)\tau$ und b ein Term vom Typ σ, so ist $a(b)$ ein Term vom Typ τ.

Terme, in denen keine Variablen auftreten, heißen *Funktionale*. Die Funktionale $0, 1 := N0, 2 := N(N0), \ldots$ heißen *Ziffern*.

Formelgrundzeichen sind $=, \rightarrow, \wedge, (\bigwedge <), (,)$.
Induktive Definition der Formeln.

1. Sind a, b Terme desselben Typs, so ist $a = b$ eine Formel.
2. Sind A, B Formeln, so sind $(A \rightarrow B), (A \wedge B)$ Formeln.
3. Ist A eine Formel und t ein Term vom Typ o, in dem die Variable x vom Typ o nicht auftritt, so ist $(\bigwedge x < t) A$ („für alle x kleiner als t gilt A") eine Formel.

$\neg A$ ist eine Abkürzung für $(A \rightarrow 1 = 0)$, $(A \leftrightarrow B)$ für $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$. Klammern und Typenindices werden fortgelassen, wenn es nicht mißverständlich ist. Dabei bindet $\wedge$ stärker als $\rightarrow$, und $A \rightarrow B \rightarrow C$ steht für $A \rightarrow (B \rightarrow C)$. $F_x[a]$ bezeichnet die Formel (den Term), die aus der Formel (dem Term) F hervorgeht, wenn man in F jedes freie Auftreten von x durch a ersetzt.

Axiome und Grundschlußregeln von $\mathbf{T}_{\wedge}$.

A. *Positive Aussagenlogik.*

A 1.	$A \rightarrow A$
A 2.	$A, A \rightarrow B \vdash B$
A 3.	$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$
A 4.	$A \wedge B \rightarrow A$
A 5.	$A \wedge B \rightarrow C \vdash A \rightarrow B \rightarrow C$
A 6.	$A \rightarrow B \rightarrow C \vdash A \wedge B \rightarrow C$
A 7.	$A \rightarrow B, A \rightarrow C \vdash A \rightarrow B \wedge C$.

B. *Axiome für den beschränkten Allquantor.*

B 1.	$\bigwedge x < 0\, A$
B 2.	$\bigwedge x < Nt\, A \rightarrow \bigwedge x < t\, A$
B 3.	$\bigwedge x < Nt\, A \rightarrow A_x[t]$
B 4.	$\bigwedge x < t\, A \wedge A_x[t] \rightarrow \bigwedge x < Nt\, A$

B 3., B 4.: falls keine Variable aus t in A gebunden wird.

C. *Definierende Gleichungen für Grundterme.*

$$\left.\begin{array}{ll} (\mathrm{AxK}) & Kab = a \\ (\mathrm{AxS}) & Sabc = ac(bc) \\ (\mathrm{AxJ0}) & Jab0 = b \\ (\mathrm{AxJN}) & Jab(Nt) = a(Jabt) \end{array}\right\} \text{ jeweils für alle Terme passender Typen.}$$

D. *Gleichheits- und Induktionsregel.*

(G) $A \to a = b,\ F_x[a] \vdash A \to F_x[b]$ falls keine Variable aus a, b, t in F

(Ind) $F_x[0],\ F \to F_x[Nx] \vdash F_x[t]$ gebunden wird.

Damit ist die Definition von $\mathbf{T}_\wedge$ abgeschlossen.

Aus dem aussagenlogischen Teil A. folgt:

A 8. $(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

A 9. $A \wedge B \to B \wedge A$

A 10. $A \to B \to C \vdash B \to A \to C$

A 11. $A \to B,\ A \to B \to C \vdash A \to C$

A 12. $A \to B \to C \vdash (A \to B) \to A \to C.$

Hiermit beweist man Deduktionstheorem und Substitutionssatz. $\mathbf{T}_\wedge$ ist also eine Erweiterung des in [1] formulierten Systems, das wir hier mit $\mathbf{T}_\to$ bezeichnen. Aus (1.1), (1.2) in [1] folgt durch Induktion nach der Länge von A:

A 13. $Nt = 0 \to A.$

Die Definition des λ-Operators in [1] enthält einen Fehler. Richtig lautet sie:

Induktive Definition von $\lambda x^\sigma[a^\tau]$.

1. $\lambda x^\sigma[x^\sigma] := S_{\sigma(o\sigma)\sigma} K_{\sigma(o\sigma)} K_{\sigma o}$;
2. $\lambda x^\sigma[a^\tau] := K_{\tau\sigma} a^\tau$, wenn x^σ in a^τ nicht auftritt;
3. $\lambda x^\sigma[a_1^{\varrho\tau} a_2^\varrho] := S_{\sigma\varrho\tau}(\lambda x^\sigma[a_1^{\varrho\tau}])(\lambda x^\sigma[a_2^\varrho])$, wenn x^σ in $a_1^{\varrho\tau} a_2^\varrho$ auftritt.

Der 2. Fall ist hier weiter gefaßt als in [1]. Durch Induktion nach der Länge von a^τ folgt:

(λ 1) $\lambda x^\sigma[a^\tau]$ ist ein Term vom Typ $(\sigma)\tau$, in dem die Variable x^σ nicht auftritt.

(λ 2) $\lambda x^\sigma[a^\tau](b^\sigma) = a^\tau_{x^\sigma}[b^\sigma]$.

(λ 3) $b = c \to \lambda x^\sigma[a^\tau_y[b]] = \lambda x^\sigma[a^\tau_y[c]]$, wenn x^σ weder in b noch in c auftritt.

Die Eigenschaft (λ 3) wird in [1] verwendet, gilt aber nicht für den dort definierten λ-Operator. Außer den in [1] definierten Funktionalen verwenden wir folgende primitiv-rekursiven Funktionen mit ihren Standardeigenschaften (vgl. Kleene [5], §§ 44, 45):

Die *Addition* $+ := J_o N$ vom Typ ooo mit

$$s + 0 = s \quad \text{und} \quad s + Nt = N(s + t)\ ;$$

das *Maximum* max vom Typ ooo mit $max\ st = s + (t \dot{-} s)$; das *Maximum von endlich vielen* vom Typ $(oo)\,oo$ mit

$$max\{t \mid x < 0\} = 0, \qquad max\{t \mid x < Ns\} = max(max\{t \mid x < s\})\, t_x[s]\ ;$$

die *Gleichheitsfunktion* E_o vom Typ ooo mit $E_o st = sg((s \dot{-} t) + (t \dot{-} s))$; die *Paarfunktion* $\langle , \rangle$ vom Typ ooo und ihre primitiv-rekursiven Inversen j_1, j_2 vom

Typ oo mit

$$\langle 0,0\rangle = 0, \qquad \langle 0, Nt\rangle = \langle 0,t\rangle + Nt, \qquad \langle s,t\rangle = \langle 0, s+t\rangle + s\,,$$

$\langle\,,\rangle$ ist streng monoton in beiden Argumenten,

$$j_1\langle s,t\rangle = s, \qquad j_2\langle s,t\rangle = t, \qquad \langle j_1 r, j_2 r\rangle = r\,.$$

Durch Induktion nach t bzw. $t \dot{-} s$ ergeben sich folgende Eigenschaften des beschränkten Allquantors.

Lemma 1. Ist $A \wedge B \to C$ herleitbar, so ist $A \wedge \bigwedge x < t\, B \to \bigwedge x < t\, C$ herleitbar, wenn x nicht in A auftritt (A oder B können auch fehlen).

Lemma 2. $(\bigwedge x < t)\, Nx \dot{-} t = 0$.

Lemma 3. $s \dot{-} t = 0 \to \bigwedge x < t\, A \to \bigwedge x < s\, A$.

Lemma 4. $Ns \dot{-} t = 0 \to \bigwedge x < t\, A \to A_x[s]$.

Lemma 5. $(\bigwedge x < \langle s, max\{t \mid y < s\}\rangle)\, A_{yz}[j_1 x, j_2 x] \to \bigwedge y < s \bigwedge z < t\, A$, wenn x nicht in A auftritt.

Beweis. Sei $B := A_{yz}[j_1 x, j_2 x]$. Da $\langle\,,\rangle$ streng monoton ist, ergeben Lemma 3 und 4

$$\bigwedge x < \langle Nu, Nv\rangle\, B \to \bigwedge x < \langle Nu, v\rangle\, B \wedge A_{yz}[u,v]\,.$$

Mit Induktion nach v folgt hieraus

$$\bigwedge x < \langle Nu, max\{t \mid y < Nu\}\rangle\, B \to \bigwedge z < max\{t \mid y < Nu\}\, A_y[u]\,.$$

Hiermit erhält man wie oben

$$\bigwedge x < \langle Nu, max\{t \mid y < Nu\}\rangle\, B \to \bigwedge x < \langle u, max\{t \mid y < u\}\rangle\, B \wedge \bigwedge z < t_y[u]\, A_y[u]\,.$$

Mit Induktion nach u folgt hieraus die Behauptung.

Lemma 6. $\bigwedge x < s + t\, A \to \bigwedge x < t\, A_x[s+x]$.

Lemma 7. $\bigwedge x < t(A \wedge B) \to \bigwedge x < t\, A \wedge \bigwedge x < t\, B\,.$

Zur Folgenschreibweise: Sei b eine Folge von Termen b_i der Typen τ_i für $i = 1, \dots, n$. (i) Ist a ein Term vom Typ $\tau_1 \dots \tau_n \sigma$, so bezeichne $a(b)$ oder ab den Term $ab_1 \dots b_n$ vom Typ σ. (ii) Ist a eine Folge von Termen a_j der Typen $\tau_1 \dots \tau_n \sigma_j$ für $j = 1, \dots, k$, so bezeichne $a(b)$ oder ab die Folge der nach (i) abgekürzten Terme $a_j b$ der Typen σ_j für $j = 1, \dots, k$. (iii) Ist c eine Folge von Termen c_i der Typen τ_i für $i = 1, \dots, n$, so bezeichne $b = c$ die Folge der Gleichungen $b_i = c_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Satz 1. Aus $\mathbf{T}_\wedge \vdash B_x[0]$ und

$$\mathbf{T}_\wedge \vdash \bigwedge y < s\, B_z[a] \to B_x[Nx]$$

folgt $\mathbf{T}_\wedge \vdash B_x[t]$, wenn a und z Folgen von Termen bzw. Variablen entsprechender Typen sind und y nicht in B auftritt.

Beweis. Sei $g := \lambda x \lambda y \lambda z_1 \ldots \lambda z_n[a]$ und $l := \lambda x \lambda z_1 \ldots \lambda z_n[s]$ für $z := z_1, \ldots, z_n$. Nach dem Satz über simultane Rekursion in [1] gibt es eine Folge f von Termen mit

$$f0tyz = z \quad \text{und} \quad f(Nr)\,tyz = g(t \dot{-} Nr)\,(j_2 y)\,(frt(j_1 y)\,z),$$

und es gibt einen Term L mit

$$L0tz = 1 \quad \text{und} \quad L(Nr)\,tz = \langle Lrtz, max\{l(t \dot{-} Nr)\,(frtyz) \mid y < Lrtz\}\rangle .$$

Die 1. Voraussetzung ergibt nach Substitution mit Lemma 1

(1) $(\wedge\, y < Lttz)\, B_{xz}[0, fttyz]$.

Setzt man in den Definitionen von $f(Nr)$ und $L(Nr)$ speziell $r := t \dot{-} Nx$, so ergibt sich wegen

$$Ns \dot{-} t = 0 \rightarrow N(t \dot{-} Ns) = t \dot{-} s \quad \text{und} \quad s \dot{-} t = 0 \rightarrow t \dot{-} (t \dot{-} s) = s:$$

$$Nx \dot{-} t = 0 \rightarrow f(t \dot{-} x)\,tyz = gx(j_2 y)\,(f(t \dot{-} Nx)\,t(j_1 y)\,z)$$

und

$$Nx \dot{-} t = 0 \rightarrow L(t \dot{-} x)\,tz = \langle L(t \dot{-} Nx)\,tz, max\{lx(f(t \dot{-} Nx)\,tyz \mid y < L(t \dot{-} Nx)\,tz)\}\rangle .$$

Mit Lemma 5 folgt aus diesen beiden Formeln

$$Nx \dot{-} t = 0 \rightarrow (\wedge\, y < L(t \dot{-} x)\,tz)\, B_z[f(t \dot{-} x)\,tyz] \rightarrow$$
$$(\wedge\, y < L(t \dot{-} Nx)\,tz)\,(\wedge\, y' < lx(f(t \dot{-} Nx)\,tyz)\, B_z[gxy'(f(t \dot{-} Nx)\,tyz)] .$$

Bei Substitution von $f(t \dot{-} Nx)\,tyz$ für z geht die 2. Voraussetzung über in

$$(\wedge\, y' < lx(f(t \dot{-} Nx)\,tyz))\, B_z[gxy'(f(t \dot{-} Nx)\,tyz)] \rightarrow B_{xz}[Nx, f(t \dot{-} Nx)\,tyz] .$$

Aus den beiden letzten Formeln erhält man

$$\begin{aligned} &(x \dot{-} t = 0 \rightarrow (\wedge\, y < L(t \dot{-} x)\,tz)\, B_z[f(t \dot{-} x)\,tyz]) \rightarrow \\ &(Nx \dot{-} t = 0 \rightarrow (\wedge\, y < L(t \dot{-} Nx)\,tz)\, B_{xz}[Nx, f(t \dot{-} Nx)\,tyz]) . \end{aligned} \tag{2}$$

Wegen $t \dot{-} t = 0$ folgt aus (1) und (2) mit (Ind)

$$(\wedge\, y < L0tz)\, B_{xz}[t, f0tyz] .$$

Dies ergibt wegen der Definitionen von $L0$ und $f0$ mit Lemma 4 die Behauptung.

§ 2. Die intensionale Heyting-Arithmetik $\mathbf{HA}_\omega$ endlicher Typen und ihre Interpretation in $\mathbf{T}_\wedge$ bezüglich einer Variante der Dialectica-Übersetzung

Typen, *Terme* und *Primformeln* (Gleichungen) von $\mathbf{HA}_\omega$ sind die von $\mathbf{T}_\wedge$. *Formelgrundzeichen* von $\mathbf{HA}_\omega$ sind die von $\mathbf{T}_\wedge$ zuzüglich der Quantoren $\forall, \exists$.

Die *Formeln* von $\mathbf{HA}_\omega$ werden induktiv definiert wie die von $\mathbf{T}_\wedge$ zuzüglich der Regel: Ist A eine Formel und u eine Variable vom Typ τ, so sind $\forall u A$ und $\exists u A$ Formeln.

Axiome und *Grundschlußregeln* von $\mathbf{HA}_\omega$ sind die von $\mathbf{T}_\wedge$ zuzüglich der quantorenlogischen Axiome und Grundschlußregeln:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Q 1.} & \forall u A \to A_u[a] \\ \text{Q 2.} & A_u[a] \to \exists u A \end{array}\right\} \text{ falls keine Variable aus } a \text{ in } A \text{ gebunden wird.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Q 3.} & A \to B \vdash A \to \forall u B \\ \text{Q 4.} & B \to A \vdash \exists u B \to A \end{array}\right\} \text{ falls } u \text{ in } A \text{ nicht frei auftritt.}$$

Damit ist das formale System $\mathbf{HA}_\omega$ vollständig definiert. $\mathbf{HA}_\omega$ ist also eine Erweiterung von $\mathbf{T}_\wedge$. Deduktionstheorem und Substitutionssatz gelten wie in $\mathbf{T}_\wedge$. Wir definieren die *Disjunktion* durch

$$(A \vee B) := \exists x((x=0 \to A) \wedge (x \neq 0 \to B)),$$

wobei x nicht in A, B auftritt. Dann sind herleitbar:

(3) $A \to A \vee B,\ B \to A \vee B,$

(4) $A \to C,\ B \to C \vdash A \vee B \to C,$ ferner

(5) $A \vee \neg A \leftrightarrow \exists x(x=0 \leftrightarrow A).$

$\mathbf{HA}_\omega$ ist daher auch eine Erweiterung der intuitionistischen Zahlentheorie $\mathbf{HA}$ der 1. Stufe. Da nach Lemma 1, 2 und 4

$$\bigwedge x < t\, A \leftrightarrow \forall x(Nx \dot{-} t = 0 \to A)$$

in $\mathbf{HA}_\omega$ herleitbar ist, ist auch der beschränkte Allquantor ($\bigwedge\ <$) in $\mathbf{HA}_\omega$ definierbar. Ein endliches Auswahlprinzip

(6) $\bigwedge x < t\, \exists y A \to \exists Y \bigwedge x < t\, A_y[Yx]$

ist in $\mathbf{HA}_\omega$ herleitbar.

Induktive Definition der Übersetzung $^\frown$. $^\frown$ ordnet jeder Formel A von $\mathbf{HA}_\omega$ eine Formel $A^\frown$ von $\mathbf{HA}_\omega$ zu mit einer Gestalt $\exists v \forall w \bar{A}$, wobei $\bar{A}$ eine Formel von $\mathbf{T}_\wedge$ ist und v, w disjunkte Folgen von Variablen sind. $A^\frown$ ist nur bis auf die Namen dieser Variablen v, w eindeutig bestimmt.

1. $(a=b)^\frown$ ist die Formel $a=b$.

Seien $B^\frown := \exists v \forall w \bar{B}$ und $C^\frown := \exists y \forall z \bar{C}$ mit disjunkten Folgen v, w, y, z bereits definiert. Dann ist:

2. $(B \wedge C)^\frown$ die Formel $\exists v, y\, \forall w, z(\bar{B} \wedge \bar{C})$,
3. $(\bigwedge x < t\, C)^\frown$ die Formel $\exists Y \forall z(\bigwedge x < t\, \bar{C}_y[Yx])$,
4. $(B \to C)^\frown$, falls w nicht leer ist, die Formel

$$\exists X, W, Y\, \forall v, z((\bigwedge x < Xvz)\, \bar{B}_w[Wxvz] \to \bar{C}_y[Yv]),$$

wobei x, X, W, Y nicht in $\bar{B}, \bar{C}$ auftreten, und

$$\exists Y\, \forall v, z(\bar{B} \to \bar{C}_y[Yv]), \quad \text{falls } w \text{ leer ist},$$

5. $(\forall u B)^\frown$ die Formel $\exists V\,\forall u, w\,\bar{B}_v[Vu]$,
6. $(\exists u B)^\frown$ die Formel $\exists u, v\,\forall w\,\bar{B}$.

Die *Dialectica-Übersetzung* ^{D} von Gödel [2] erhält man hieraus, indem man außer in 4. überall $^\frown$ durch ^{D} ersetzt und 4. abändert in

4^{D}. $(B\to C)^{D}$ ist $\exists W, Y\,\forall v, z(\bar{B}_w[Wvz]\to\bar{C}_y[Yv])$.

Das ist damit gleichwertig, daß man in der Definition von $(B\to C)^\frown$ $Xvz=1$ setzt.

Für die Disjunktion ergibt sich:

$$(B\vee C)^\frown \quad \text{ist} \quad \exists x, v, y\,\forall w, z((x=0\to\bar{B})\wedge(x\neq 0\to\bar{C}))\,.$$

Eine Formel A stimmt mit ihrer Übersetzung $A^\frown$ (bis auf gebundene Umbenennung) genau dann überein, wenn A eine Gestalt $\exists v\forall w\,B$ hat, in der v, w Folgen von Variablen sind und B eine Formel aus $\mathbf{T}_\wedge$ ist. Also ist $A^{\frown\frown}$ stets die Formel $A^\frown$, und ist speziell B aus $\mathbf{T}_\wedge$, so ist $B^\frown$ die Formel B. Diese Eigenschaft geht verloren, wenn man $\vee$ als Grundzeichen zu $\mathbf{T}_\wedge$ hinzufügt.

Wie die Dialectica-Übersetzung, so „verschärft" auch die Übersetzung $^\frown$ Implikationen und Allformeln. Wir betrachten folgende *Zusatzaxiome* zu $\mathbf{HA}_\omega$:

Auswahlaxiom für die Typen σ, τ:

$AC_{\sigma\tau}$ $\forall x^\sigma\exists y^\tau A\to\exists Y^{\sigma\tau}\forall x^\sigma A_y[Yx]$.

Die Vereinigung aller Schemata $AC_{\sigma\tau}$ wird mit AC bezeichnet.

Eine Abwandlung der Prämissen-Unabhängigkeit:

$IP_\wedge$ $(\forall w A\to\exists y B)\to\exists y(\forall w A\to B)$,

wobei die Variablen der Folge y nicht frei in A auftreten und A eine Formel von $\mathbf{T}_\wedge$ ist.

Eine Abwandlung des Markov-Prinzips:

$M_\wedge$ $(\forall w A\to B)\to\exists X, W(\bigwedge x<X\,A_w[Wx]\to B)$,

wobei die Variablen x, X und in W nicht frei in A, B auftreten und A, B Formeln von $\mathbf{T}_\wedge$ sind.

Die Theorie $\mathbf{HA}_\omega+\mathrm{AC}+M_\wedge+IP_\wedge$ wird im folgenden mit $\mathbf{HA}_\omega^+$ bezeichnet.

Lemma 8. In $\mathbf{HA}_\omega$ ist herleitbar:

1. $(a=b)^\frown\leftrightarrow a=b$;
2. $(B\wedge C)^\frown\leftrightarrow B^\frown\wedge C^\frown$;
3. $(\bigwedge x<t\,C)^\frown\leftrightarrow\bigwedge x<t\,C^\frown$;
4. $(\exists u B)^\frown\leftrightarrow\exists u\,B^\frown$;
5. $(\forall u B)^\frown\to\forall u\,B^\frown$;
6. $(B\to C)^\frown\to B^\frown\to C^\frown$; ferner gilt
7. $\mathbf{HA}_\omega+\mathrm{AC}\vdash\forall u\,B^\frown\to(\forall u B)^\frown$;
8. $\mathbf{HA}_\omega^+\vdash(B^\frown\to C^\frown)\to(B\to C)^\frown$.

Beweis. 3. folgt mit (6); wir betrachten noch 6. und 8. Mit den Bezeichnungen der Definition von $\hat{}$ ist in $\mathbf{HA}_\omega$ herleitbar:

$$(B\to C)^\wedge \to \forall v \exists y \forall z \exists X, W(\wedge x < X\, \bar{B}_w[Wx] \to \bar{C})$$
$$\exists X, W(\wedge x < X\, \bar{B}_w[Wx] \to \bar{C}) \to (\forall w \bar{B} \to \bar{C})$$
$$\forall z(\forall w \bar{B} \to \bar{C}) \leftrightarrow (\forall w \bar{B} \to \forall z \bar{C})$$
$$\exists y(\forall w \bar{B} \to \forall z \bar{C}) \to (\forall w \bar{B} \to C^\wedge)$$
$$\forall v(\forall w \bar{B} \to C^\wedge) \leftrightarrow (B^\wedge \to C^\wedge).$$

Hieraus folgt 6. Die für 8. fehlenden Implikationen ergeben sich nacheinander aus AC, $\mathrm{M}_\wedge$ und $\mathrm{IP}_\wedge$.

Definition. Sei $A^\wedge$ die Formel $\exists v \forall w \bar{A}$ mit $\bar{A}$ aus $\mathbf{T}_\wedge$. Die Formel A heißt *bezüglich* $\hat{}$ *in* $\mathbf{T}_\wedge$ *interpretierbar*, wenn es Terme b aus $\mathbf{T}_\wedge$ gibt, die nur in A frei auftretende Variablen enthalten, so daß $\bar{A}_v[b]$ in $\mathbf{T}_\wedge$ herleitbar ist.

Offenbar ist dann $A^\wedge$ in $\mathbf{HA}_\omega$ herleitbar.

Lemma 9. Stimmt $B^\wedge$ mit $C^\wedge$ bis auf gebundene Umbenennung überein, so ist $B\to C$ bezüglich $\hat{}$ in $\mathbf{T}_\wedge$ interpretierbar.

Beweis. Mit den Bezeichnungen der Definition von $\hat{}$ stimmt $\bar{B}_w[z]$ mit $\bar{C}_y[v]$ überein, und nach Lemma 4 gilt

$$\mathbf{T}_\wedge \vdash \wedge x < 1\, \bar{B}_w[z] \to \bar{C}_y[v].$$

Für die Funktionale $X := \lambda v, z[1]$, $W := \lambda x, v, z[z]$ und $Y := \lambda v[v]$ folgt $\mathbf{T}_\wedge \vdash \overline{B\to C}$.

Satz 2. Charakterisierung der Übersetzung $\hat{}$.

1. Die Theorien $\mathbf{HA}_\omega^+$ und $\mathbf{HA}_\omega + \{A \leftrightarrow A^\wedge \mid A \text{ aus } \mathbf{HA}_\omega\}$ sind zueinander äquivalent.
2. Jede bezüglich $\hat{}$ in $\mathbf{T}_\wedge$ interpretierbare Formel ist in $\mathbf{HA}_\omega^+$ herleitbar.
3. In $\mathbf{HA}_\omega^+$ sind herleitbar das Markov-Prinzip

M $\forall w(A \vee \neg A) \to \neg \forall w A \to \exists w \neg A$

und die Prämissen-Unabhängigkeit

IP $\forall w(A \vee \neg A) \to (\forall w A \to \exists y B) \to \exists y(\forall w A \to B)$.

Beweis. 1. Durch Induktion nach der Länge von A folgt aus Lemma 8 unmittelbar $\mathbf{HA}_\omega^+ \vdash A \leftrightarrow A^\wedge$. Umgekehrt ist jede Formel D der Schemata AC, $\mathrm{M}_\wedge$ oder $\mathrm{IP}_\wedge$ eine Formel $B\to C$ derart, daß $B^\wedge$ mit $C^\wedge$ bis auf gebundene Umbenennung übereinstimmt. Nach Lemma 9 ist also $\mathbf{HA}_\omega \vdash D^\wedge$, mithin $\mathbf{HA}_\omega + D \leftrightarrow D^\wedge \vdash D$. Damit ist 1. und zugleich 2. bewiesen.

3. Aus (5) folgt in $\mathbf{HA}_\omega + \mathrm{AC}$

$$\forall w(A \vee \neg A) \leftrightarrow \exists Y\, \forall w(Yw = 0 \leftrightarrow A).$$

Für $A \leftrightarrow Yw = 0$ ist IP ein Spezialfall von $\mathrm{IP}_\wedge$. $\mathrm{M}_\wedge$ ist für $B := 1 = 0$

$$\neg \forall w\, Yw = 0 \rightarrow \exists X, W \neg \bigwedge x < X\ Y(Wx) = 0 .$$

Durch Induktion nach X ist mit B 4 in $\mathbf{HA}_\omega$ herleitbar

$$\neg \bigwedge x < X\ Y(Wx) = 0 \rightarrow \exists w\, Yw \neq 0 .$$

Zusammen folgt M für $A \leftrightarrow Yw = 0$. Damit ist der Satz bewiesen.

Da sich M und IP nur auf entscheidbare Formeln A beziehen und in $\mathbf{HA}_\omega$ Gleichungen höheren Typs i. a. nicht entscheidbar sind (s. unten Satz 5, Korollar 2), ist anzunehmen, daß weder $\mathrm{M}_\wedge$ noch $\mathrm{IP}_\wedge$ in $\mathbf{HA}_\omega + \mathrm{AC} + \mathrm{M} + \mathrm{IP}$ herleitbar ist.

Satz 3, Interpretationssatz. Jede in $\mathbf{HA}_\omega^+$ herleitbare Formel ist bezüglich $\hat{}$ in $\mathbf{T}_\wedge$ interpretierbar.

Beweis durch Herleitungsinduktion. Die definierenden Gleichungen C stimmen mit ihrer $\hat{}$-Übersetzung überein. Die Axiome A 1 und $A \leftrightarrow \hat{A}$ sind nach Lemma 9 wegen $\hat{\hat{A}} := \hat{A}$ interpretierbar. A 2, A 4 bis A 6, B 1 bis B 3, (G) und Q 1 bis Q 4 bereiten keine Schwierigkeiten für die Interpretation (vgl. hierzu Spector [8]).

Zu A 3. $A \rightarrow B,\ B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$. Wir setzen voraus, daß alle nur in B auftretenden Variablen durch Nullfunktionale ersetzt sind. Gegeben sind X_i, W_i, Y_i $(i = 1, 2)$ mit

$$(\bigwedge x_1 < X_1 v_1 z_1)\, \bar{A}[v_1, W_1 x_1 v_1 z_1] \rightarrow \bar{B}[Y_1 v_1, z_1]$$

und

$$(\bigwedge x_2 < X_2 v_2 z_2)\, \bar{B}[v_2, W_2 x_2 v_2 z_2] \rightarrow \bar{C}[Y_2 v_2, z_2] .$$

Gesucht sind X, W, Y mit $(\bigwedge x < X v z)\, \bar{A}[v, Wxvz] \rightarrow \bar{C}[Yv, z]$.

Wir substituieren v für v_1, z für z_2, ferner $Y_1 v$ für v_2 und $t := W_2 x_2 (Y_1 v) z$ für z_1. Setzen wir $s := X_2 (Y_1 v) z$, so folgt mit Lemma 1

$$\bigwedge x_2 < s \bigwedge x_1 < X_1 v t\, \bar{A}[v, W_1 x_1 v t] \rightarrow \bigwedge x_2 < s\, \bar{B}[Y_1 v, t]$$
$$\bigwedge x_2 < s\, \bar{B}[Y_1 v, t] \rightarrow \bar{C}[Y_2 (Y_1 v), z] .$$

Nach Lemma 5 folgt aus diesen beiden Formeln mit A 3

$$(\bigwedge x < \langle s, \mathit{max}\{X_1 v t \mid x_2 < s\}\rangle)\, \bar{A}[v, W_1 (j_2 x)\, v t_{x_2}[j_1 x]]$$
$$\rightarrow \bar{C}[Y_2 (Y_1 v), z] .$$

X, W, Y sind also gegeben durch $Xvz = \langle s, \mathit{max}\{X_1 v t \mid x_2 < s\}\rangle$,

$$Wxvz = W_1 (j_2 x)\, v (W_2 (j_1 x) (Y_1 v)\, z) \quad \text{und} \quad Yv = Y_2 (Y_1 v) .$$

Zu A 7. $A \rightarrow B,\ A \rightarrow C \vdash A \rightarrow B \wedge C$. Gegeben sind X_i, W_i, Y_i $(i = 1, 2)$ mit

$$(\bigwedge x_1 < X_1 v_1 z_1)\, \bar{A}[v_1, W_1 x_1 v_1 z_1] \rightarrow \bar{B}[Y_1 v_1, z_1]$$

und

$$(\bigwedge x_2 < X_2 v_2 z_2)\, \bar{A}[v_2, W_2 x_2 v_2 z_2] \rightarrow \bar{C}[Y_2 v_2, z_2] .$$

Gesucht sind X, W, Y_1', Y_2' mit

$$(\wedge x < X v z_1 z_2)\, \bar{A}[v, W x v z_1 z_2] \to \bar{B}[Y_1' v, z_1] \wedge \bar{C}[Y_2' v, z_2]\,.$$

Wir substituieren v für v_1 und für v_2, setzen $z := z_1, z_2$ und definieren durch simultane Rekursion nach [1]

$$U x v z 0 = W_1 x v z_1 \quad \text{und} \quad U x v z(N y) = W_2(x \dot{-} X_1 v z_1)\, v z_2\,, \quad \text{und}$$

(7) $W x v z = U x v z(N x \dot{-} X_1 v z_1)$.

Mit Lemma 1 und 2 folgt hieraus

$$(\wedge x < X_1 v z_1)\; W x v z = W_1 x v z_1$$

also mit der 1. Voraussetzung

(8) $(\wedge x < X_1 v z_1)\, \bar{A}[v, W x v z] \to \bar{B}[Y_1 v, z_1]$.

Wegen $N(X_1 v z_1 + x) \dot{-} X_1 v z_1 = N x$ folgt aus (7) weiter

$$W(X_1 v z_1 + x)\, v z = W_2 x v z_2$$

also mit der 2. Voraussetzung

(9) $(\wedge x < X_2 v z_2)\, \bar{A}[v, W(X_1 v z_1 + x)\, v z] \to \bar{C}[Y_2 v, z_2]$.

Mit Lemma 3 und 6 folgt aus (8) und (9) mit A 7

$$(\wedge x < X_1 v z_1 + X_2 v z_2)\, \bar{A}[v, W x v z] \to \bar{B}[Y_1 v, z_1] \wedge \bar{C}[Y_2 v, z_2]\,.$$

X ist also gegeben durch $X v z = X_1 v z_1 + X_2 v z_2$, W durch (7), und Y_i' ist Y_i.

Zu B 4. $\wedge x < t\, A \wedge A_x[t] \to \wedge x < N t\, A$. Gesucht werden Terme X, W_1, W_2, Y mit $(v := v_1, v_2)$

$$\begin{aligned} \wedge x' < X v z(\wedge x < t\, \bar{A}[x, v_1 x, W_1 x' v z] \wedge \bar{A}[t, v_2, W_2 x' v z]) \\ \to \wedge x < N t\, \bar{A}[x, Y v x, z]\,. \end{aligned}$$

Sei $s := J(K v_2)(v_1 x)(N x \dot{-} t)$, also $\wedge x < t\;\, s = v_1 x$ und $s_x[t] = v_2$. Nach Lemma 4 folgt mit B 4

$$\wedge x' < 1(\wedge x < t\, \bar{A}[x, s, z] \wedge \bar{A}[t, s_x[t], z]) \to \wedge x < N t\, \bar{A}[x, s, z]\,.$$

Die gesuchten Terme sind also gegeben durch $X v z = 1$, $W_1 x' v z = W_2 x' v z = z$ und $Y v x = s$.

Zu (Ind). $F_x[0]$, $F \to F_x[N x] \vdash F_x[t]$. Gegeben sind Terme v_0 und X, W, Y mit $\bar{F}[0, v_0, w]$ und $(\wedge y < X x v z)\, \bar{F}[x, v, W x y v z] \to \bar{F}[N x, Y x v, z]$. Gesucht ist v_1 mit $\bar{F}[t, v_1, w]$.

Wir definieren durch simultane Rekursion gemäß [1]

$$f0 = v_0 \quad \text{und} \quad f(Nt) = Yt(ft),$$

substituieren z für w, fx für v und erhalten $\bar{F}[0, f0, z]$ und

$$(\wedge y < Xx(fx)\, z)\, \bar{F}[x, fx, Wxy(fx)\, z] \rightarrow \bar{F}[Nx, f(Nx), z].$$

$\bar{F}[x, fx, z]$ ist also eine Formel B, die für $s := Xx(fx)\, z$ und $a := Wxy(fx)\, z$ die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt. Also folgt $\bar{F}[t, ft, z]$ mit Satz 1, und ft ist die gesuchte Folge v_1.

Damit ist Satz 3 bewiesen. Wegen $A^{\wedge} := A$ für A aus $\mathbf{T}_\wedge$ folgt:

Korollar 1. Sei Φ eine Menge von neuen Grundfunktionalen und Γ eine Menge von Formeln von $\mathbf{T}_\wedge + \Phi$. Dann ist jede in $\mathbf{HA}_\omega^+ + \Gamma$ herleitbare Formel bezüglich $^\wedge$ in $\mathbf{T}_\wedge + \Gamma$ interpretierbar.

Korollar 2. $\mathbf{HA}_\omega^+$ ist eine konservative Erweiterung von $\mathbf{T}_\wedge$; insbesondere folgt die Widerspruchsfreiheit von $\mathbf{HA}_\omega^+$ aus der von $\mathbf{T}_\wedge$.

Der Unterschied zur Dialectica-Interpretation [2] liegt in der Interpretation von A 7. Man kann ihn etwa so formulieren: Wenn A aus einem Grund B und aus einem anderen Grund C impliziert, dann impliziert A bei der Übersetzung $^\wedge$ aus beiden Gründen zusammen B und C, während bei der Dialectica-Übersetzung entschieden werden muß, aus welchem Grund A zugleich B und C impliziert. Diese Entscheidung kann für Gleichungen höheren Typs in $\mathbf{T}_\wedge$ nicht immer gefällt werden.

Beispiel, mitgeteilt von W. A. Howard. Sei $0^{oo} := K_{oo}0$ und sei A die Formel

$$\forall u^{oo} \neg\neg \exists x (x = 0 \leftrightarrow u^{oo} = 0^{oo}).$$

Da stets $\neg\neg(B \vee \neg B)$, nach (5) also $\neg\neg\exists x(x = 0 \leftrightarrow B)$ gilt, ist A in $\mathbf{HA}_\omega$ herleitbar. A ist aber bezüglich $^{\mathrm{D}}$ nicht in $\mathbf{T}_\wedge$ interpretierbar. Denn sonst gäbe es ein Funktional Y in $\mathbf{T}_\wedge$ mit

(10) $\neg\neg(Yu = 0 \leftrightarrow u = 0^{oo})$.

Dann wäre $Y0^{oo} = 0$, und da alle Funktionale Y vom Typ $(oo)\,o$ aus $\mathbf{T}_\wedge$ stetig sind, d. h. wegen

(11) $\forall v^{oo} \exists z^o \forall u^{oo} (\wedge x < z \; ux = vx \; \rightarrow Yu = Yv)$

würde $\exists z \forall u (\wedge x < z\, ux = 0 \rightarrow Yu = 0)$ folgen, im Widerspruch zu (10), q.e.d. Da $A^{\mathrm{D}\wedge}$ mit A^{D} übereinstimmt, ist nach Satz 3 A^{D} auch nicht in $\mathbf{HA}_\omega^+$ herleitbar. Dagegen ist A bezüglich $^\wedge$ in $\mathbf{T}_\wedge$ interpretierbar, einfach wegen

$$\mathbf{T}_\wedge \vdash \neg \wedge x < 2 \neg (x = 0 \leftrightarrow u^{oo} = 0^{oo}).$$

§ 3. Geschlossene Formeln in T

Nach Howard [4] ist mit transfiniter Induktion bis ε_0 beweisbar, daß jeder Term von $\mathbf{T}_\wedge$ eine Normalform besitzt. Wir verwenden folgenden Reduktionsbegriff.

Definition. Ist $a=b$ eine definierende Gleichung C und tritt x in c auf, so gelte $c[a] \rhd^1 c[b]$. $\rhd$ sei die reflexive und transitive Hülle von $\rhd^1$. a heißt *irreduzibel*, wenn es kein b mit $a \rhd^1 b$ gibt. b heißt *Normalform* von a, wenn b irreduzibel und $a \rhd b$ ist. $a \sim b$ bedeute, daß a und b eine gemeinsame Normalform besitzen.

Ein Term a vom Typ o heißt *berechenbar*, wenn a eine Normalform besitzt. Ein Term a vom Typ $(\sigma)\tau$ heißt *berechenbar*, wenn $a(b)$ vom Typ τ berechenbar ist für jeden berechenbaren Term b vom Typ σ und a eine Normalform besitzt.

Für diese Begriffe gilt (vgl. Shoenfield [7], Ch. 8.4):

1) Jeder Term ist berechenbar;
2) Aus $a \sim b$ folgt stets $c[a] \sim c[b]$;
3) Jeder Term a besitzt genau eine Normalform a_0; ist a ein Funktional vom Typ o, so ist a_0 eine Ziffer;
4) Ist $a \sim b$, so ist $a=b$ in $\mathbf{T}_\wedge$ ohne (Ind) herleitbar.

Als *Theorie* **T** bezeichnen wir hier folgende Erweiterung von $\mathbf{T}_\wedge$: Einziges neues Grundzeichen ist $\vee$, und mit A und B ist auch $(A \vee B)$ eine Formel; die Formeln (3) sind die zusätzlichen Axiome, die Regel (4) ist die zusätzliche Grundschlußregel. Nach Korollar 2 zu Satz 3 ist **T** eine konservative Erweiterung von $\mathbf{T}_\wedge$.

Lemma 10. Ist eine geschlossene Formel A von **T** in **T** herleitbar, so ist A in **T** geschlossen ohne (Ind) herleitbar.

Beweis durch Herleitungsinduktion. Alle Axiome und Regeln von **T** außer (Ind) gehen in geschlossene Axiome und Regeln derselben Art über, wenn man in ihnen alle Variablen durch Nullfunktionale ersetzt. (Ind) sei

$$F_x[0], \qquad F \to F_x[Nx] \vdash F_x[t],$$

und x trete in F auf. Ist $F_x[t]$ geschlossen, so ist t ein Funktional vom Typ o, also $t \rhd k$ für eine Ziffer k nach 3). Nach Induktionsvoraussetzung und Substitutionssatz sind $F[0]$ und $F[i] \to F[Ni]$ für jede Ziffer i und nach 4) $k=t$ geschlossen ohne (Ind) herleitbar. Mit k-facher Anwendung von A 2 und mit (G) folgt $F[t]$ ohne (Ind).

Das formale System $\mathbf{T}^c$

Terme und *Formeln* von $\mathbf{T}^c$ sind die Funktionale und geschlossenen Formeln von **T**. Ist a ein Funktional, so bezeichne $\tilde{a}$ Funktionale mit derselben Normalform wie a. Ist Γ eine Folge $C_1, C_2, \ldots, C_n$ von Formeln, so bezeichne $\Gamma \to A$ die Formel $C_1 \to C_2 \to \cdots C_n \to A$.

Axiome und Grundschlußregeln von $\mathbf{T}^c$.

(Ax 1) $a=\tilde{a}$
(Ax 2) $a=b\rightarrow\tilde{a}=\tilde{b}$
(Ax 3) $\bigwedge x<\tilde{0}\,A$
$(\wedge\,\mathrm{E})$ $A\rightarrow C\vdash A\wedge B\rightarrow C$
$B\rightarrow C\vdash A\wedge B\rightarrow C$
$\Gamma\rightarrow A,\ \Gamma\rightarrow B\vdash\Gamma\rightarrow A\wedge B$
$(\bigwedge<\mathrm{E})$ $\bigwedge x<t\,A\rightarrow C\vdash\bigwedge x<\widetilde{N}t\,A\rightarrow C$
$A_x[t]\rightarrow C\vdash\bigwedge x<\widetilde{N}t\,A\rightarrow C$
$\Gamma\rightarrow\bigwedge x<t\,A,\ \Gamma\rightarrow A_x[t]\vdash\Gamma\rightarrow\bigwedge x<Nt\,A$
$(\vee\,\mathrm{E})$ $\Gamma\rightarrow A\vdash\Gamma\rightarrow A\vee B$
$\Gamma\rightarrow B\vdash\Gamma\rightarrow A\vee B$
$A\rightarrow C,\ B\rightarrow C\vdash A\vee B\rightarrow C$
$(\rightarrow\mathrm{E})$ $\Gamma\rightarrow A,\ B\rightarrow C\vdash\Gamma\rightarrow(A\rightarrow B)\rightarrow C$
(St) $\Gamma\subseteqq\Delta:\Gamma\rightarrow C\vdash\Delta\rightarrow C$
(Komp) $\Gamma\rightarrow a=b,\ \Gamma\rightarrow a=c\vdash\Gamma\rightarrow b=c$
(Ers) $\Gamma\rightarrow a=b\vdash\Gamma\rightarrow\widetilde{c[a]}=\widetilde{c[b]}$.

Damit ist die Definition von $\mathbf{T}^c$ abgeschlossen. Bis auf die Behandlung der Gleichheit entspricht $\mathbf{T}^c$ der intuitionistischen Aussagenlogik in Schütte [6].

In jeder Herleitung einer Formel A in $\mathbf{T}^c$ treten nur Junktoren auf, die in A auftreten. Ist $A\vee B$ in $\mathbf{T}^c$ herleitbar, so ist A herleitbar, oder B ist herleitbar. – Ist A in $\mathbf{T}^c$ herleitbar, so ist offenbar A eine geschlossene Formel, die in $\mathbf{T}$ herleitbar ist. Wir wollen hiervon die Umkehrung beweisen.

Lemma 11. Folgende Regeln sind als strukturgleiche Herleitungsumformungen in $\mathbf{T}^c$ zulässig:

(F-Ersetzung) Aus $a\sim b$ und $\vdash F[a]$ folgt $\vdash F[b]$.
(Ax 1-Kürzung) Aus $a\sim b$ und $\vdash\Gamma\rightarrow a=b\rightarrow C$ folgt $\vdash\Gamma\rightarrow C$.
(Ax 3-Kürzung) Aus $t\sim 0$ und $\vdash\Gamma\rightarrow\bigwedge x<t\,A\rightarrow C$ folgt $\vdash\Gamma\rightarrow C$.

Die Beweise durch Herleitungsinduktion sind trivial. Bei der Ax 1-Kürzung wird aus (Ax 2) wegen der Transitivität von $\sim$ ein (Ax 1). Die F-Ersetzung beruht auf 2).

Lemma 12. In $\mathbf{T}^c$ sind folgende Regeln herleitbar:

(Sym) $\Gamma\rightarrow a=b\vdash\Gamma\rightarrow b=a$
(Trans) $\Gamma\rightarrow a=b,\ \Gamma\rightarrow b=c\vdash\Gamma\rightarrow a=c$.

Lemma 13. In $\mathbf{T}^c$ ist herleitbar:

A 1 $C\rightarrow C$
(exf) $a=b\rightarrow C$, falls für ein t vom Typ o die Funktionale $t[a]$, $t[b]$ verschiedene Normalformen haben.
(AxG) $a=b\rightarrow(C[a]\rightarrow C[b])$.

Beweis durch Induktion nach der Länge von C. 1. Sei C eine Gleichung $c=d$. Dann ist A 1 ein (Ax 2). Für (exf) sei $e:=J(Kc)\,d(E_o tt[b])$. Dann ist $e[b]\sim d$, und wegen $t[a] \nsim t[b]$ ist $e[a] \sim c$. Aus (Ax 2) folgt mit (Ers) also $a = b \to c = d$. Für (AxG) folgt aus (Ax 2) mit (St), (Ers), (Komp) und (Trans) die Behauptung.

2. Von den Induktionsschritten betrachten wir nur den Fall $C := \bigwedge x < t\, A$ in (AxG). Ist $t[a] \nsim t[b]$, so folgt (AxG) aus (exf). Haben $t[a]$, $t[b]$ dieselbe Normalform 0, so folgt (AxG) aus (Ax 3) mit (St); haben beide dieselbe Normalform Nk, so schließt man wie im Fall $C := A \wedge B$.

Lemma 14. In $\mathbf{T}^c$ sind als Inversionsregeln zulässig:

($\wedge$ Inv)	Aus $\vdash \Gamma \to A \wedge B$ folgt $\vdash \Gamma \to A$ und $\vdash \Gamma \to B$.
($\bigwedge <$ Inv)	Aus $\vdash \Gamma \to \bigwedge x < Nt\, A$ folgt $\vdash \Gamma \to \bigwedge x < t\, A$ und $\vdash \Gamma \to A_x[t]$.
($\vee$ Inv)	Aus $\vdash \Gamma \to A \vee B \to C$ folgt $\vdash \Gamma \to A \to C$ und $\vdash \Gamma \to B \to C$.
(Komp-Inv)	Aus $\vdash \Gamma \to b = c \to E$ folgt $\vdash \Gamma \to a = b \to a = c \to E$.
(Ers-Inv)	Aus $d_i \sim c[a_i]$ für $i = 1, 2$ und $\vdash \Gamma \to d_1 = d_2 \to E$ folgt $\vdash \Gamma \to a_1 = a_2 \to E$.

Beweise durch Herleitungsinduktion. Zu ($\wedge$ Inv) und ($\vee$ Inv) vgl. Schütte [6]; ($\bigwedge <$ Inv) folgt wie ($\wedge$ Inv). In (Komp-Inv) und (Ers-Inv) betrachten wir nur den Fall, daß die bereits hergeleitete Formel ein (Ax 2) ist, daß also Γ leer und E eine Gleichung $\tilde{b} = \tilde{c}$ bzw. $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2$ ist. Dann folgt $a = b \to a = c \to \tilde{b} = \tilde{c}$ aus (Komp) mit F-Ersetzung und $a = b \to \tilde{d}_1 = \tilde{d}_2$ aus (Ers).

Lemma 15. In $\mathbf{T}^c$ ist die Schnittregel zulässig: Aus $\vdash \Gamma \to D$ und $\vdash \Delta \to D \to E$ folgt $\vdash \Delta \to \Gamma \to E$. Dabei können mehrere Auftreten von D durch Γ ersetzt werden.

Beweis durch Induktion nach der Länge von D. 1. Sei D eine Gleichung $a = b$. Wir induzieren nach der Herleitung von $\Gamma \to a = b$. Ist dies ein (Ax 1), also Γ leer und $a \sim b$, so ist $\Delta \to E$ nach Ax 1-Kürzung herleitbar. Ist dies ein (Ax 2), also Γ eine Gleichung $\tilde{a} = \tilde{b}$, so ist $\Delta \to \tilde{a} = \tilde{b} \to E$ mit F-Ersetzung herleitbar. Ist $\Gamma \to a = b$ nach (Komp) aus $\Gamma \to c = a$ und $\Gamma \to c = b$ hergeleitet, so ist nach (Komp-Inv) herleitbar

$$\Delta \to c = a \to c = b \to E\,.$$

Nach Induktionsvoraussetzung sind dann herleitbar

$$\Delta \to \Gamma \to c = b \to E \quad \text{und} \quad \Delta \to \Gamma \to \Gamma \to E\,.$$

Mit (St) folgt die Behauptung. Ist $\Gamma \to a = b$ nach (Ers) aus $\Gamma \to c = d$ hergeleitet, so ist nach (Ers-Inv) $\Gamma \to c = d \to E$, also nach der Induktionsvoraussetzung $\Delta \to \Gamma \to E$ herleitbar. In den übrigen Fällen folgt die Behauptung sofort aus der Induktionsvoraussetzung.

2. Für $D := (A \vee B)$ induziert man nach der Herleitung von $\Gamma \to D$, für $D := (A \wedge B)$ und $D := (A \to B)$ induziert man nach der Herleitung von $\Delta \to D \to E$ und benutzt, daß man die Schnittregel für die Schnittformeln A und B bereits nachgewiesen hat (vgl. Schütte [6]).

3. Sei $D := \bigwedge x < t\, A$. Für $t \rhd 0$ folgt $\Delta \to E$ nach der Ax 3-Kürzung. Für $t \rhd Nk$ schließt man wie für Konjunktionen D, allerdings mit ($\bigwedge <$ Inv). Damit ist Lemma 15 bewiesen.

Satz 4. Eine Formel A ist in $\mathbf{T}^c$ genau dann herleitbar, wenn A eine geschlossene Formel ist, die in $\mathbf{T}$ herleitbar ist.

Beweis. Ist A in $\mathbf{T}^c$ herleitbar, so gilt die Behauptung, wie oben bemerkt. Ist A eine geschlossene in $\mathbf{T}$ herleitbare Formel, so besitzt A nach Lemma 10 eine geschlossene Herleitung ohne (Ind) in $\mathbf{T}$. Wir induzieren nach dieser Herleitung.

Zur Aussagenlogik. Axiome A 1 sind nach Lemma 13 in $\mathbf{T}^c$ herleitbar. Die Regeln A 2, A 3 sind Spezialfälle der Schnittregel und deshalb nach Lemma 15 zulässig. Die Axiome A 4 und (3) folgen in $\mathbf{T}^c$ mit ($\wedge$ E) bzw. ($\vee$ E) aus A 1. Mit ($\rightarrow$E) sind die Formeln $(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ aus $A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B$ und $C \rightarrow C$ in $\mathbf{T}^c$ herleitbar. Mit A 2 ist also auch A 5 in $\mathbf{T}^c$ zulässig. A 6 ist in $\mathbf{T}^c$ direkt herleitbar. A 7 und (4) sind Regeln von $\mathbf{T}^c$.

Die Axiome B 1 sind (Ax 3) in $\mathbf{T}^c$, und B 2 bis B 4 ergeben sich aus Formeln A 1 mit ($\bigwedge <$E). Die definierenden Gleichungen C sind (Ax 1) in $\mathbf{T}^c$. Die Gleichheitsregel (G) ist aus nach Lemma 13 in $\mathbf{T}^c$ herleitbaren Formeln (AxG) mit ($\rightarrow$E), A 1 und A 2 herleitbar, also nach Lemma 13 und 15 in $\mathbf{T}^c$ zulässig. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Korollar 1. Sei A eine geschlossene Formel von $\mathbf{T}$. 1. A ist genau dann in $\mathbf{T}^c$ ohne ($\bigwedge <$E) und (Ax 3) herleitbar, wenn A in $\mathbf{T}$ ohne B 1 bis B 4 herleitbar ist und ($\bigwedge <$) nicht in A auftritt.

2. A ist genau dann in $\mathbf{T}^c$ ohne ($\vee$ E) herleitbar, wenn A in $\mathbf{T}_\wedge$ herleitbar ist.

3. A ist genau dann in $\mathbf{T}^c$ nur mit (Ax 1), (Ax 2), ($\rightarrow$E), (Ers), (Komp) und (St) herleitbar, wenn A in $\mathbf{T}_\rightarrow$ herleitbar ist.

Denn die genannten Fragmente von $\mathbf{T}^c$ sind offenbar Teilsysteme der entsprechenden Fragmente von $\mathbf{T}$, die für geschlossene Formeln nach Satz 4 Teilsysteme von $\mathbf{T}^c$ sind. Aus der Schnittfreiheit von $\mathbf{T}^c$ folgt die Behauptung.

Korollar 2. Bezüglich geschlossener Formeln ist $\mathbf{T}$ eine konservative Erweiterung von $\mathbf{T}_\rightarrow$.

Dies folgt sofort aus Satz 4 und Korollar 1.3 und ist bezüglich geschlossener Formeln eine Verschärfung der Folgerung aus Satz 3, daß allgemein $\mathbf{T}$ eine konservative Erweiterung von $\mathbf{T}_\wedge$ ist.

Korollar 3. Ist eine geschlossene Formel $A \vee B$ in $\mathbf{T}$ herleitbar, so ist A in $\mathbf{T}$ herleitbar, oder B ist in $\mathbf{T}$ herleitbar.

Korollar 4. Eine Gleichung $a=b$ zwischen Funktionalen ist in $\mathbf{T}$ genau dann herleitbar, wenn $a \sim b$ ist: $\mathbf{T}$ ist widerspruchsfrei.

Denn diese beiden Bemerkungen gelten offenbar für $\mathbf{T}^c$, nach Satz 4 also auch für $\mathbf{T}$.

Korollar 5. Bezüglich geschlossener Formeln ist $\mathbf{T}_\wedge$ eine definitorische Erweiterung von $\mathbf{T}_\wedge$ ohne ($\bigwedge <$).

Beweis. Für jede geschlossene Formel A von $\mathbf{T}_\wedge$ sei A' induktiv wie folgt definiert: $(a=b)'$ ist $a=b$, $(B \underset{\wedge}{\rightarrow} C)'$ ist $B' \underset{\wedge}{\rightarrow} C'$, $(\bigwedge x < \tilde{0}\, B)'$ ist $0=0$ und $(\bigwedge x < \widetilde{Nk}\, B)'$ ist $(\bigwedge x < k\, B)' \wedge B'_x[k]$. Dann tritt ($\bigwedge <$) nicht in A' auf, und A' ist A genau dann, wenn $(\bigwedge <)$ nicht in A auftritt. Durch Induktion nach der Länge von A folgt, daß $A \leftrightarrow A'$ in $\mathbf{T}$ herleitbar ist. Nach Korollar 1 ist also A in $\mathbf{T}$ genau dann herleitbar, wenn A' in $\mathbf{T}$ ohne $(\bigwedge <)$ herleitbar ist.

Die Korollare 4 und 5 sind bekannt und ohne Satz 4 im Anschluß an Lemma 10 bewiesen worden.

Satz 5. Ist eine Ungleichung $a \neq b$ zwischen Funktionalen a, b in $\mathbf{T}$ herleitbar, so gibt es ein Funktional Y mit $Ya \rhd 1$ und $Yb \rhd 0$.

Falls also $a \neq b$ in $\mathbf{T}$ herleitbar ist, so ist $a \neq b$ in $\mathbf{T}^c$ aus dem Axiom $a = b \rightarrow a = b$ unmittelbar mit (Ers) herleitbar.

Beweis. Sei A die Formel $a = b \rightarrow 1 = 0$. Ist A in $\mathbf{T}$ herleitbar, so besitzt A nach Satz 4 eine Herleitung in $\mathbf{T}^c$. Sei H die Menge der Formeln

$$a = b \rightarrow \cdots \rightarrow a = b \rightarrow c = d$$

von $\mathbf{T}$, zu denen es ein Funktional X in $\mathbf{T}$ gibt, so daß die Normalformen von Xc und Xd verschiedene Ziffern sind. Wir behaupten: Die Herleitung von A in $\mathbf{T}^c$ enthält einen Faden, der nur Formeln aus H enthält. Zunächst ist $A \in H$. Sei B eine Formel $\Gamma \rightarrow c = d$ aus H mit $Xc \nsim Xd$ in der Herleitung von A und kein Axiom. Dann ist B nicht mit $(\wedge \mathrm{E})$, $(\bigwedge < \mathrm{E})$, $(\vee \mathrm{E})$ oder $(\rightarrow \mathrm{E})$ hergeleitet.

1. Folgt B aus einer Formel C mit (St), so stimmt C mit B bis auf die Anzahl der Glieder $a = b$ in Γ überein, und es ist $C \in H$.

2. Folgt B aus Formeln C, D mit (Komp), so gibt es ein Funktional e, so daß $C := \Gamma \rightarrow e = c$ und $D := \Gamma \rightarrow e = d$ ist. Da aus $Xc \sim Xe \sim Xd$ auch $Xc \sim Xd$ folgte, ist wenigstens $C \in H$ oder $D \in H$.

3. Folgt B aus einer Formel C mit (Ers), so gibt es einen Term e und Funktionale c', d', so daß $C := \Gamma \rightarrow c' = d'$ ist und $e_u[c'] \sim c$ und $e_u[d'] \sim d$ gilt. Für $X' := \lambda u[Xe]$ folgt $X'c' \sim Xc$ und $X'd' \sim Xd$, also $X'c' \nsim X'd'$, und es ist $C \in H$.

In jedem Fall gehört wenigstens eine Prämisse von B zu H, und durch Induktion nach der Herleitung von A folgt die Behauptung. – Sei jetzt B das Axiom in diesem Faden. H enthält keine Formeln (Ax 1) oder (Ax 3). Also ist $B \in H$ eine Formel $a = b \rightarrow \tilde{a} = \tilde{b}$. Es gibt also ein X in $\mathbf{T}$, so daß die Normalformen von $X\tilde{a}$ und $X\tilde{b}$, wegen 2) also auch die von Xa und Xb verschiedene Ziffern sind. Dann ist $\lambda u[E_o(Xu)(Xb)]$ das gesuchte Y mit $Ya \rhd 1$ und $Yb \rhd 0$. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Korollar 1. Für Funktionale a, b vom Typ oo ist $a \neq b$ genau dann in $\mathbf{T}$ herleitbar, wenn für eine Ziffer k die Normalformen von ak und von bk verschiedene Ziffern sind.

Denn ist $a \neq b$ herleitbar, so ist nach Satz 5 $Ya \neq Yb$ für ein Y in $\mathbf{T}$ vom Typ $(oo)o$. Aus der Stetigkeit (11) von Y folgt

$$\exists z \neg \bigwedge x < z \; ax = bx\,.$$

Dann ist $ak \nsim bk$ für ein k. Die Rückrichtung ist trivial.

Für den Typ oo stimmt also die in $\mathbf{T}$ beweisbare Ungleichheit mit der extensionalen Ungleichheit überein. Nun ist schon die extensionale Gleichheit von primitiv-rekursiven Funktionen nicht entscheidbar (vgl. Kleene [5], § 57, Theorem V). Es folgt:

Korollar 2. Die Klasse der in **T** herleitbaren Ungleichungen ist nicht entscheidbar, und es gibt Funktionale a, b vom Typ oo, so daß weder $a = b$ noch $a \neq b$ in **T** herleitbar ist.

§ 4. Zum Gleichheitsfunktional in T

Zu jedem Typ $\tau \neq o$ sei E_τ ein neues Funktional vom Typ $\tau\tau o$ mit den definierenden Axiomen

E 1. $a = b \leftrightarrow E_\tau ab = 0$,
E 2. $a \neq b \rightarrow E_\tau ab = 1$.

Für jedes formale System Σ, das $\mathbf{T}_\rightarrow$ enthält, bezeichne $\Sigma + E$ die Erweiterung von Σ um alle diese Funktionale E_τ mit den definierenden Axiomen E 1 und E 2.

Induktive Definition eines charakteristischen Terms χA für Formeln A aus $\mathbf{T} + \mathrm{E}$.

1. $\chi(a^\tau = b^\tau)$ sei $E_\tau a^\tau b^\tau$;
2. $\chi(A \wedge B)$ sei $max(\chi A)(\chi B)$;
3. $\chi(\bigwedge x < t\, A)$ sei $max\{\chi A \mid x < t\}$;
4. $\chi(A \vee B)$ sei $\chi A \cdot \chi B$;
5. $\chi(A \rightarrow B)$ sei $(1 \dot{-} \chi A) \cdot \chi B$.

Durch Induktion nach der Länge von A und mit (5) folgt:

Lemma 16. Für jede Formel A aus $\mathbf{T} + \mathrm{E}$ sind $A \leftrightarrow \chi A = 0$ und $A \vee \neg A$ in $\mathbf{T} + \mathrm{E}$ herleitbar.

Hiernach ist $T + \mathrm{E}$ eine definitorische Erweiterung von $\mathbf{T}_\rightarrow + \mathrm{E}$.

Satz 6, Charakterisierung der Dialectica-Übersetzung $^{\mathrm{D}}$ (vgl. Yasugi [10], Troelstra [9]). Die Theorien $\mathbf{HA}_\omega^+ + \mathrm{E}$, $\mathbf{HA}_\omega + \mathrm{E} + \mathrm{AC} + \mathrm{M} + \mathrm{IP}$ und $\mathbf{HA}_\omega + \mathrm{E} + \{A \leftrightarrow A^{\mathrm{D}}\}$ sind zueinander äquivalent.

Beweis. Nach Satz 2, 3 sind AC, M und IP in $\mathbf{HA}_\omega^+$ herleitbar. Umgekehrt ist nach Lemma 16 $\mathrm{IP}_\wedge$ in $\mathbf{HA}_\omega + \mathrm{E}$ ein Spezialfall von IP, und M ergibt für A aus $\mathbf{T} + \mathrm{E}$

$$\neg B \rightarrow (\forall w A \rightarrow B) \rightarrow \exists w(A \rightarrow B).$$

Mit Lemma 16 folgt $\mathrm{M}_\wedge$ wegen $B \vee \neg B$. Also sind die beiden ersten Theorien äquivalent, und mit den Lemma 8 und 9 entsprechenden Aussagen für die Übersetzung $^{\mathrm{D}}$ folgt nach Yasugi [10] deren Äquivalenz mit der dritten Theorie.

Korollar 1, Dialectica-Interpretation (Gödel [2], vgl. Howard [3], auch Troelstra 1969). Jede in $\mathbf{HA}_\omega^+ + \mathrm{E}$ herleitbare Formel ist bezüglich $^{\mathrm{D}}$ in $\mathbf{T}_\wedge + \mathrm{E}$ interpretierbar.

Beweis. Gelte $\mathbf{HA}_\omega^+ + \mathrm{E} \vdash A$. Nach Satz 6 gilt $\mathbf{HA}_\omega^+ + \mathrm{E} \vdash A^{\mathrm{D}}$, und nach Satz 3, Korollar 1 ist A^{D} bezüglich $^\wedge$ in $\mathbf{T}_\wedge + \mathrm{E}$ interpretierbar. Da $A^{\mathrm{D}\wedge}$ mit A^{D} übereinstimmt, ist A auch bezüglich $^{\mathrm{D}}$ in $\mathbf{T}_\wedge + \mathrm{E}$ interpretierbar.

Korollar 2. Für jede Formel A aus $\mathbf{HA}_\omega + \mathrm{E}$ ist $A^\wedge \leftrightarrow A^{\mathrm{D}}$ in $\mathbf{HA}_\omega + \mathrm{E}$ herleitbar.

Beweis. Nach Satz 6 und Satz 3, Korollar 1 ist $A \leftrightarrow A^{\mathrm{D}}$ in $\mathbf{T}_\wedge + \mathrm{E}$ bezüglich $^\wedge$ interpretierbar. Dann ist in $\mathbf{HA}_\omega + \mathrm{E}$ zunächst $(A \leftrightarrow A^{\mathrm{D}})^\wedge$ und nach Lemma 8 $A^\wedge \leftrightarrow A^{\mathrm{D}\wedge}$ herleitbar, und das ist wegen $A^{\mathrm{D}\wedge} := A^{\mathrm{D}}$ die Behauptung.

Bei Hinzunahme der Gleichheitsfunktionale E ebenso wie unter der Voraussetzung, daß alle Gleichungen vom Typ o sind, verschwindet also der Unterschied zwischen Dialectica- und $^\wedge$-Interpretation. Wir deuten noch an, warum die Hinzunahme der Gleichheitsfunktionale nicht ganz harmlos ist.

Zunächst ist für jedes Funktional a vom Typ oo von $\mathbf{T} + \mathrm{E}$ das Funktional Ea vom Typ $(oo)\,o$ nicht stetig gemäß (11), denn $\forall z \exists u \wedge x < zax = ux \wedge Eau = 1$ ist in $\mathbf{HA}_\omega + \mathrm{E}$ herleitbar.

Beschränkt auf Gleichungen und Ungleichungen zwischen Funktionalen von $\mathbf{T}$ ist $\mathbf{T} + \mathrm{E}$, also auch $\mathbf{HA}_\omega^+ + \mathrm{E}$, eine konservative Erweiterung von $\mathbf{T}$. Für Gleichungen ergibt sich dies aus dem Modell *HRO* der erblich rekursiven Operationen (Troelstra [9], § 2.7), für Ungleichungen aus einem verwandten Modell von $\mathbf{HA}_\omega + \mathrm{E}$. Korollar 2 zu Satz 5 ergibt dann:

Satz 7. E_{oo} ist in $\mathbf{HA}_\omega^+ + \mathrm{E}$ nicht beweisbar rekursiv. Es ist nicht entscheidbar, für welche Funktionale a, b aus $\mathbf{T}$ vom Typ oo $Eab = 1$ herleitbar ist, und es gibt solche a, b, für die weder $Eab = 0$ noch $Eab = 1$ herleitbar ist.

Wie allerdings das Modell *HRO* zeigt, läßt sich $\mathbf{T}^c + \mathrm{E}$ erweitern zu einer vollständigen und entscheidbaren Theorie, in der dann E beweisbar rekursiv ist. In dieser Theorie ist jedoch die Gleichheit notwendig nicht extensional.

LITERATUR

[1] Diller, J., Schütte, K.: Simultane Rekursionen in der Theorie der Funktionale endlicher Typen. Arch. math. Logik **14** (1971), 69—74.

[2] Gödel, K.: Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes. Dialectica **12** (1958), 280—287.

[3] Howard, W. A.: Functional interpretation of bar induction by bar recursion. Compositio Math. **20** (1968), 107—124.

[4] Howard, W. A.: Assignment of ordinals to terms for primitive recursive functionals of finite type. Proc. of the summer conference at Buffalo in 1968, North Holland, Amsterdam 1970.

[5] Kleene, S. C.: Introduction to metamathematics. North Holland, Amsterdam[4] 1964.

[6] Schütte, K.: Schlußweisen-Kalküle der Prädikatenlogik. Math. Ann. **122** (1950), 47—65.

[7] Shoenfield, J. R.: Mathematical logic. Addison-Wesley, Reading etc. 1967.

[8] Spector, C.: Provably recursive functionals of analysis. Proc. Symp. Pure Math., vol. 5, AMS, Providence 1962, 1—27.

[9] Troelstra, A. S.: Notions of realizability for intuitionistic arithmetic and intuitionistic arithmetic in all finite types. Proc. 2nd Scandinavian logic symp. North Holland, Amsterdam 1971.

[10] Yasugi, M.: Intuitionistic analysis and Gödel's interpretation. J. Math. Soc. Japan **15** (1963), 101—112.