Werk

Titel: Eine semantische Charkterisierung der durch die Implikation allein darstellbaren ...

Autor: Villars, R.

Jahr: 1966

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?379931524_0010|log8

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

EINE SEMANTISCHE CHARAKTERISIERUNG DER DURCH DIE IMPLIKATION ALLEIN DARSTELLBAREN WAHRHEITSFUNKTIONEN* **

Von R. VILLARS in Biel (Schweiz)

A^n sei die Menge der aus den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit Hilfe der Verknüpfungen $\neg$, $\vee$, $\wedge$ und $\rightarrow$ gebildeten Formeln. I^n sei die Teilmenge der Formeln von A^n, welche keine anderen Verknüpfungen als $\rightarrow$ enthalten; I_k^n ($k = 1, 2, \ldots, n$) sei die Teilmenge derjenigen Formeln von I^n, deren letzte Variable x_k ist. Eine Formel von I_k^n ist somit von der Form

$$(*) \qquad \Phi_1 \rightarrow (\Phi_2 \rightarrow \cdots (\Phi_m \rightarrow x_k) \ldots) ,$$

wobei Φ_i, $1 \leqq i \leqq m$, Formeln aus I^n sind; die Formel $(*)$ ist äquivalent

$$(\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \cdots \wedge \Phi_m) \rightarrow x_k .$$

Einer Formel Φ aus A^n ist in bekannter Weise eine n-stellige Wahrheitsfunktion $[\Phi]$ zugeordnet; umgekehrt gibt es zu jeder n-stelligen Wahrheitsfunktion φ eine Formel Φ in A^n mit $[\Phi] = \varphi$. Es sollen unter den n-stelligen Wahrheitsfunktionen φ diejenigen charakterisiert werden, zu denen es eine Formel Φ in I^n gibt mit $[\Phi] = \varphi$.

Satz. Zu einer n-stelligen Wahrheitsfunktion φ gibt es genau dann eine Formel Φ in I^n mit $[\Phi] = \varphi$, wenn es eine Zahl k ($1 \leqq k \leqq n$) gibt, so daß für alle n-Tupel a von Wahrheitswerten, deren k-te Komponente a_k gleich w (wahr) ist, $\varphi(a) = w$ gilt.

Die Bedingung ist offenbar notwendig. Denn gehört die Formel Φ zu I^n, so gehört sie zu I_k^n für ein geeignet gewähltes k. Φ ist dann äquivalent einer Formel

$$(\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \cdots \wedge \Phi_m) \rightarrow x_k ;$$

hieraus ergibt sich $[\Phi](a) = w$ für n-Tupel a mit $a_k = w$. Die Umkehrung folgt aus dem

Satz. Gilt für die n-stellige Wahrheitsfunktion φ und für alle n-Tupel a mit $a_k = w$ auch $\varphi(a) = w$, so gibt es eine Formel in I_k^n mit $[\Phi] = \varphi$.

Beweis. Ist φ identisch w, so ist $x_k \rightarrow x_k$ eine solche Formel. Andernfalls sei Ψ eine Formel von A^n in ausgezeichneter konjunktiver Normalform mit $[\Psi] = \varphi$; $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m$ ($1 \leqq m$) seien die Konjunktionsglieder von Ψ (vgl. z. B. [2], S. 21). Die Variable x_k tritt in allen Gliedern Ψ_i ($1 \leqq i \leqq m$) unnegiert auf; sonst wäre

* Eingegangen am 19. 1. 1966.

** Diplomarbeit an der Eidgenössischen Technischen Hochschule unter der Leitung von Professor E. Specker.

nämlich für ein geeignetes a mit $a_k = w$ der Wert $[\Psi_i](a)$ gleich f (falsch) und damit auch $[\Psi](a) = f$. Wir beweisen nun durch Induktion nach der Anzahl m der Konjunktionsglieder, daß eine Formel Φ in I_k^n existiert mit $[\Phi] = [\Psi]$. Ist $m = 1$, so ist Ψ die Disjunktion von p unnegierten und negierten Variablen; x_k selbst ist unnegiert. Wir beweisen durch Induktion nach p, daß solche Disjunktionen zu Formeln in I_k^n äquivalent sind. Ist $p = 1$, so ist Ψ von der Gestalt x_k, und stammt daher aus I_k^n. Ist $p \geqq 2$, so gibt es eine Zahl i und eine Formel Ψ' mit folgenden Eigenschaften:
(1) Ψ' ist eine Disjunktion von $p-1$ negierten und unnegierten Variablen, x_k selbst tritt unnegiert in Ψ' auf;
(2) Ψ ist äquivalent einer der beiden Formeln $x_i \vee \Psi'$, $\neg x_i \vee \Psi'$. Sei nun Φ' eine Formel in I_k^n mit $[\Phi'] = [\Psi']$.
Falls Ψ äquivalent der Formel $x_i \vee \Psi'$ ist, wählen wir Φ als

$$(x_i \to \Phi') \to \Phi' ,$$

falls Ψ äquivalent $\neg x_i \vee \Psi'$ ist,

$$x_i \to \Phi' .$$

In beiden Fällen gehört Φ zu I_k^n, und es ist $[\Phi] = [\Psi]$; im ersten Fall wird benützt, daß $(x_1 \to x_2) \to x_2$ äquivalent zu $x_1 \vee x_2$ ist.
Sei nun Ψ eine ausgezeichnete konjunktive Normalformel mit mindestens zwei Konjunktionsgliedern und der Eigenschaft, daß x_k in allen Gliedern unnegiert auftritt. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Formeln Γ und Δ in I_k^n, so daß Ψ äquivalent zur Formel $\Gamma \wedge \Delta$ ist, und es bleibt somit zu zeigen, daß die Konjunktion zweier Formeln aus I_k^n einer Formel aus I_k^n äquivalent ist. Nach der Bemerkung zu Beginn der Arbeit gibt es Formeln $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_q$ und $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ in I^n, so daß Γ äquivalent

$$(\Gamma_1 \wedge \cdots \wedge \Gamma_q) \to x_k ,$$

und Δ äquivalent

$$(\Delta_1 \wedge \cdots \wedge \Delta_r) \to x_k \text{ ist} .$$

$\Gamma \wedge \Delta$ ist dann äquivalent

$$((\Gamma_1 \wedge \cdots \wedge \Gamma_q) \vee (\Delta_1 \wedge \cdots \wedge \Delta_r)) \to x_k .$$

Es sei Ω_{ij} $(1 \leqq i \leqq q,\ 1 \leqq j \leqq r)$ die Formel $(\Gamma_i \to \Delta_j) \to \Delta_j$; Ω_{ij} ist äquivalent zu $\Gamma_i \vee \Delta_j$ und gehört zu I^n.
Die Formel

$$(\Gamma_1 \wedge \cdots \wedge \Gamma_q) \vee (\Delta_1 \wedge \cdots \wedge \Delta_r)$$

ist äquivalent zu

$$\Omega_{11} \wedge \Omega_{12} \wedge \cdots \wedge \Omega_{1r} \wedge \cdots \wedge \Omega_{qr} .$$

Also ist $\Gamma \wedge \Delta$ äquivalent mit der zu I_k^n gehörenden Formel

$$\Omega_{11} \to (\Omega_{12} \to \cdots \to (\Omega_{qr} \to x_k) \ldots) .$$

Korollar. Gilt für Φ aus I^n und Ψ aus A^m die aussagenlogische Identität $\Phi \to \Psi$, so ist Ψ einer Formel aus I^m äquivalent.

Beweis. Es sei $p = \max(m, n)$; Φ gehört dann zu I^p, und es ist $m \leqq p$. Es gibt ein k, $k \leqq p$, so daß für alle p-Tupel a mit $a_k = w$ gilt $[\Phi](a) = w$. Ferner gilt $[\Phi \to \Psi](a) = w$ für alle p-Tupel a. Ist $m < k$, so gilt $[\Psi](b) = w$ für alle m-Tupel b, und Ψ ist äquivalent zu $x_1 \to x_1$. Ist $k \leqq m$, so müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Tritt x_k in Ψ nicht auf, so gilt $[\Psi](b) = w$ für alle m-Tupel b, und Ψ ist äquivalent zu $x_1 \to x_1$; tritt x_k in Ψ auf, so gilt $[\Psi](b) = w$ für alle m-Tupel b mit $b_k = w$, und Ψ ist nach dem Satz äquivalent einer Formel aus I^m. Aus dem Korollar ergibt sich die Gültigkeit des Interpolationslemmas von Craig [1] für den Formelbereich I^m:

Lemma. Sind Φ, Ψ Formeln aus I^n, ist $\Phi \to \Psi$ eine aussagenlogische Identität und kommt für alle i mit $1 \leqq i \leqq m$ $(m < n)$ die Variable x_i in Φ und in Ψ vor, so gibt es eine Formel Ω in I^m, so daß $\Phi \to \Omega$ und $\Omega \to \Psi$ aussagenlogische Identitäten sind, und so daß jede Variable, die in Ω auftritt, auch in Φ und in Ψ auftritt.

Beweis. Nach dem Interpolationslemma für A^n gibt es eine Formel Ω' in A^m, so daß jede Variable, die in ihr auftritt, auch in Φ und in Ψ auftritt, und so daß $\Phi \to \Omega'$ und $\Omega' \to \Psi$ aussagenlogische Identitäten sind; nach dem Korollar ist Ω' äquivalent einer Formel Ω aus I^m.

Die Frage nach der Gültigkeit des Interpolationslemmas für den Bereich I^n hat den Ausgangspunkt für diese Arbeit gebildet; wie ich erfahre, hat Herr G. Reznikoff von derselben Fragestellung aus die obigen und weitergehende Resultate erhalten.

LITERATUR

[1] W. Craig, Three uses of the Herbrand-Gentzen theorem in relating Model theory and Proof theory. *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 22 (1957), pp. 269—285.

[2] D. Hilbert und W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik. *Springer, Berlin*, 4. Aufl. 1959.