Werk

Titel: Ein Satz über Eckentfernungen beim Dreieck.

Autor: Stärk, R.

Jahr: 1990

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199_0045|log43

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

und

$$v_n = \operatorname{vol} V \leq \prod_{i=1}^{n} (\operatorname{vol} V_i)^{1/(n-1)} = v_{n-1}^{1/(n-1)}.$$

Hieraus folgt für ein beliebiges k-dimensionales Parallelotop V_I die Ungleichung

$$\operatorname{vol} V_I \leq \left(\prod_{i \in I} \operatorname{vol} V_{I \setminus \{i\}}\right)^{1/(k-1)}.$$

Daraus schliesst man jetzt, dass

$$v_k = \prod_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ |I| = k}} \operatorname{vol} V_I \leq \prod_I \left(\prod_{i \in I} \operatorname{vol} V_{I \setminus \{i\}}\right)^{1/(k-1)} = \left(\prod_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\} \\ |J| = k-1}} \operatorname{vol} V_j\right)^{\frac{n-k+1}{k-1}}$$
$$= v_{k-1}^{\binom{n-1}{k-1}/\binom{n-1}{k-2}}, \quad 2 \leq k \leq n$$

und dies beweist die Ungleichung von Szasz.

S. B. Gaschkov,
Fakultät für Mechanik und Mathematik, Universität Moskau

Die vorliegende Arbeit wurde im Sommer-Semester 1988 während eines Gastaufenthaltes am Mathematischen Institut der Universität Zürich verfasst.

LITERATUR

1 Szasz O.: Über eine Verallgemeinerung des Hadamard'schen Determinantensatzes. Monatsschrift f. Math. und Phys. *28*, 253–257 (1917).
2 Beckenbach E., Bellmann E.: Inequalities. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1961.
3 Mirsky L.: On a Generalization of Hadamard's Determinantal Inequality due to Szasz. Archiv der Math. *8*, 274–275 (1957).
4 Marcus M., H. Minc: A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities. Ally and Bacon, Boston, 1964.
5 Hadwiger H.: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1957.

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/90/060153-03$1.50 + 0.20/0

Elementarmathematik

Ein Satz über Eckentfernungen beim Dreieck

Wir betrachten ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c. Es sei E irgend ein Punkt der Ebene, und k_1, k_2, k_3 seien drei aufeinander abgestimmte Zahlen, welche die Gleichung

$$\overline{EA}^2 + k_1 = \overline{EB}^2 + k_2 = \overline{EC}^2 + k_3 \tag{1}$$

erfüllen, wobei $\overline{EA}$, $\overline{EB}$, $\overline{EC}$ die Eckentfernungen des Punktes E sind. Das zum Punkt E gehörende Zahlentripel (k_1, k_2, k_3) ist additiv homogen, statt k_1, k_2, k_3 kann man ebensogut $k_1 + q$, $k_2 + q$, $k_3 + q$, mit irgendeiner Zahl q, einsetzen.
Für den Höhenschnittpunkt H gilt z. B.

$$\overline{HA}^2 + a^2 = \overline{HB}^2 + b^2 = \overline{HC}^2 + c^2. \tag{2}$$

Dies sieht man, wenn man die Dreiecksecken an den Mitten der Gegenseiten spiegelt. Andererseits hat man für den Inkreismittelpunkt I

$$\overline{IA}^2 - (s-a)^2 = \overline{IB}^2 - (s-b)^2 = \overline{IC}^2 - (s-c)^2,$$

wobei s der halbe Dreiecksumfang ist. Addiert man hier allseitig den in a, b, c symmetrischen Ausdruck $q = (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc):4$, so wird daraus, wegen $-(s-a)^2 + q = -bc$ etc.,

$$\overline{IA}^2 - bc = \overline{IB}^2 - ca = \overline{IC}^2 - ab. \tag{3}$$

Es soll nun gezeigt werden, dass das zum Punkt E gehörende Zahlentripel (k_1, k_2, k_3) nicht nur für E, sondern für alle Punkte der Geraden durch E und den Umkreismittelpunkt U des Dreiecks charakteristisch ist.
Es sei P ein Punkt der Geraden UE, mit $\overrightarrow{UP} = \lambda \overrightarrow{UE}$.
Aus $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{UA} + \overrightarrow{PU} = \overrightarrow{UA} - \lambda \overrightarrow{UE}$ ergibt sich, wenn r der Umkreisradius ist, $\overline{PA}^2 = r^2 - 2\lambda \overrightarrow{UA} \cdot \overrightarrow{UE} + \lambda^2 \overline{UE}^2$. Ebenso $\overline{PB}^2 = r^2 - 2\lambda \overrightarrow{UB} \cdot \overrightarrow{UE} + \lambda^2 \overline{UE}^2$, somit $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 2\lambda \overrightarrow{UE}(\overrightarrow{UB} - \overrightarrow{UA}) = 2\lambda \overrightarrow{UE} \cdot \overrightarrow{AB}$. Insbesondere für $P = E$, d. h. $\lambda = 1$, heisst dies $\overline{EA}^2 - \overline{EB}^2 = 2\overrightarrow{UE} \cdot \overrightarrow{AB}$. Ersetzt man $\overline{EA}^2 - \overline{EB}^2$ nach (1) noch durch $k_2 - k_1$, so bekommt man $\overline{PA}^2 + \lambda k_1 = \overline{PB}^2 + \lambda k_2$ und, weitergehend zur Ecke C,

$$\overline{PA}^2 + \lambda k_1 = \overline{PB}^2 + \lambda k_2 = \overline{PC}^2 + \lambda k_3. \tag{4}$$

Dass es zu einer vorgegebenen Zahl λ nur *einen* Punkt P gibt, der die Bedingung (4) erfüllt, dass also umgekehrt aus (4) auch $\overrightarrow{UP} = \lambda \overrightarrow{UE}$ folgt, zeigen die Fusspunkte der Lote von P auf die Seiten des Dreiecks. Der Fusspunkt F des Lotes auf AB ist, wegen $\overline{FA}^2 - \overline{FB}^2 = \overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = \lambda(k_2 - k_1)$, durch λ eindeutig bestimmt. Ebenso sind es die andern.

Satz: *Wenn bei einem Dreieck ABC, mit dem Umkreismittelpunkt U, für die Eckentfernungen $\overline{EA}$, $\overline{EB}$, $\overline{EC}$ eines Punktes E die Gleichung*

$$\overline{EA}^2 + k_1 = \overline{EB}^2 + k_2 = \overline{EC}^2 + k_3$$

gilt, dann sind für jeden Punkt P die Aussagen

$$\overrightarrow{UP} = \lambda \overrightarrow{UE}$$

und

$$\overline{PA}^2 + \lambda k_1 = \overline{PB}^2 + \lambda k_2 = \overline{PC}^2 + \lambda k_3$$

äquivalent.

Beispiele:

– Für die Punkte der Eulergeraden gilt, nach (2):

$$\overrightarrow{UP} = \lambda \overrightarrow{UH} \Leftrightarrow \overline{PA}^2 + \lambda a^2 = \overline{PB}^2 + \lambda b^2 = \overline{PC}^2 + \lambda c^2. \tag{5}$$

– Für die Punkte der Geraden UI gilt, wegen (3):

$$\overrightarrow{UP} = \lambda \overrightarrow{UI} \Leftrightarrow \overline{PA}^2 - \lambda bc = \overline{PB}^2 - \lambda ca = \overline{PC}^2 - \lambda ab. \tag{6}$$

– Wir betrachten noch die Gerade durch U und den Lemoinepunkt L. Der Lemoinepunkt (oder Symmedianenschnittpunkt [3] oder Grebepunkt [2]) ist bekanntlich der Punkt im Innern des Dreiecks, dessen Abstände d_1, d_2, d_3 von den Dreiecksseiten proportional zu diesen sind. Mit dem Ansatz $d_1 = \mu a, \ldots$ ergibt sich, wenn man die Inhalte der Teildreiecke LAB, LBC, LCA zum Inhalt J des Dreiecks ABC aufsummiert: $\mu = 2J:(a^2 + b^2 + c^2)$. Es seien Y und Z die Fusspunkte der Lote von L auf die Seiten AC und AB. Dann ist LA Umkreisdurchmesser des Dreiecks LYZ. Trigonometrisch ergibt sich

$$\overline{LA}^2 = \frac{\overline{YZ}^2}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}(d_2^2 + d_3^2 - 2d_2 d_3 \cos(180° - \alpha)) = \frac{b^2c^2(-a^2 + 2b^2 + 2c^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

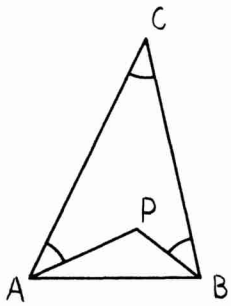
Subtrahiert man von $\overline{LA}^2$ den Ausdruck $2b^2c^2:(a^2 + b^2 + c^2)$, so erhält man den bei zyklischer Vertauschung invarianten Ausdruck $-3a^2b^2c^2:(a^2 + b^2 + c^2)^2$, folglich

$$\overrightarrow{UP} = \lambda \overrightarrow{UL} \Leftrightarrow \overline{PA}^2 - \lambda \frac{2b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \overline{PB}^2 - \lambda \frac{2c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \ldots. \tag{7}$$

Wie nützlich dieser Eckentfernungssatz bei verschiedenen Anwendungen sein kann, soll die folgende Auswahl zeigen.

Anwendung 1

Bei einem Dreieck ABC sei P der Punkt, für welchen $\sphericalangle CBP = \sphericalangle PAC = \sphericalangle ACB$ ist (Fig. 1). Dieser Punkt P liegt auf der Eulergeraden des Dreiecks.



Figur 1.

Beweis:

Wir berechnen die Strecken $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ und zeigen, dass sich (5) erfüllen lässt. Beim Dreieck PAB, mit denWinkeln $\sphericalangle PBA = \beta - \gamma$, $\sphericalangle BAP = \alpha - \gamma$, $\sphericalangle APB = 3\gamma$ (Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung des Falles, wo $\gamma = \sphericalangle ACB$ der kleinste Winkel des Dreiecks ABC ist. Das Endresultat ist in allen Fällen dasselbe), ist $\overline{PA} = \dfrac{c\sin(\beta-\gamma)}{\sin(3\gamma)}$.

Im Folgenden sollen bei allen Formeln jeweils möglichst nur die Seitenlängen a, b, c des Dreiecks ABC nebst allenfalls dem Umkreisradius r, dem Inkreisradius ϱ und dem Inhalt J vorkommen. Aus $\sin\beta = \dfrac{b}{2r}$, $\cos\beta = \dfrac{a^2-b^2+c^2}{2ac}$ etc., ergibt sich $\sin(\beta-\gamma) = \dfrac{b^2-c^2}{2ar}$ und $\sin(3\gamma) = 3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma = \dfrac{c(3r^2-c^2)}{2r^3}$, somit $\overline{PA} = \dfrac{(b^2-c^2)r^2}{a(3r^2-c^2)}$, und entsprechend $\overline{PB} = \dfrac{(a^2-c^2)r^2}{b(3r^2-c^2)}$. Bei der Berechnung von $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2$ wird die Formel $-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2 = 16J^2 = \dfrac{a^2b^2c^2}{r^2}$ benützt.

$$\begin{aligned}
\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 &= \frac{r^4}{(3r^2-c^2)^2}\left(\frac{(b^2-c^2)^2}{a^2} - \frac{(a^2-c^2)^2}{b^2}\right)\\
&= \frac{r^4}{a^2b^2(3r^2-c^2)^2}(-a^6+2a^4c^2-a^2c^4+b^6-2b^4c^2+b^2c^4)\\
&= \frac{r^4}{a^2b^2(3r^2-c^2)^2}(b^2-a^2)(3a^2b^2-16J^2) = \frac{(b^2-a^2)r^2}{3r^2-c^2}.
\end{aligned}$$

Das Dreieck APC liefert $\overline{PC}^2 = \overline{PA}^2 + b^2 - 2\overline{PA}\,b\cos\gamma$. Mit Umformungen, wie vorhin, erhält man

$$\begin{aligned}
\overline{PC}^2 - \overline{PA}^2 &= b^2 - \frac{(b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)r^2}{a^2(3r^2-c^2)}\\
&= \frac{1}{a^2(3r^2-c^2)}(r^2(3a^2b^2-16J^2) - (b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)r^2)\\
&= \frac{(a^2-c^2)r^2}{3r^2-c^2},
\end{aligned}$$

und ebenso

$$\overline{PC}^2 - \overline{PB}^2 = \frac{(b^2-c^2)r^2}{3r^2-c^2}.$$

Daraus folgt

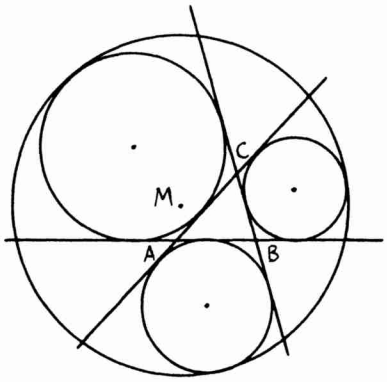
$$\overline{PA}^2 + \frac{r^2}{3r^2-c^2}a^2 = \overline{PB}^2 + \frac{r^2}{3r^2-c^2}b^2 = \overline{PC}^2 + \frac{r^2}{3r^2-c^2}c^2.$$

Das heisst: P liegt auf der Eulergeraden, und es ist $\overrightarrow{UP} = \dfrac{r^2}{3r^2 - c^2}\overrightarrow{UH}$.

Anwendung 2

Der Mittelpunkt M des Kreises, der die drei Ankreise eines Dreiecks ABC, mit den Seitenlängen a, b, c, umschliessend berührt (Fig. 2), liegt auf der Geraden durch den Umkreismittelpunkt U und den Lemoinepunkt L des Dreiecks, und es gilt

$$\overrightarrow{UM} = -\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{4abc}\overrightarrow{UL}.$$



Figur 2.

Beweis:

Gezeigt werden muss, nach (7), dass es eine Zahl λ gibt, mit

$$\overline{MA}^2 - \lambda\frac{2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2} = \overline{MB}^2 - \lambda\frac{2c^2a^2}{a^2+b^2+c^2} = \dots. \tag{8}$$

Für die Berechnung der Eckentfernungen $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ werden zwei Hilfssätze benützt.

Hilfssatz 1:

Bei einem Dreieck PQR sei V ein Punkt der Geraden PQ. Dann gilt

$$\overline{RV}^2 = \frac{\overline{RP}^2\,\overline{VQ}^2 + \overline{QR}^2\,\overline{PV}^2}{\overline{PQ}} - \overline{PV}\cdot\overline{VQ}.$$

Auf die Herleitung dieser einfachen Formel kann verzichtet werden.

Hilfssatz 2:

Wenn bei einem Dreieck ABC, mit den Seitenlängen a, b, c und dem Inhalt J, für einen Punkt P die Differenzen der Eckentfernungsquadrate $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = d_1$, $\overline{PA}^2 - \overline{PC}^2 = d_2$

bekannt sind, lässt sich die Eckentfernung $\overline{PA}$ mit der Formel

$$\overline{PA}^2 = \frac{1}{16\,J^2}(b^2(c^2+d_1)^2 + c^2(b^2+d_2)^2 - (c^2+d_1)(b^2+d_2)(-a^2+b^2+c^2)) \quad (9)$$

berechnen.

Beweis:

Es seien Y und Z die Fusspunkte der Lote von P auf die Geraden AC und AB. Es ist

$$\overrightarrow{AZ} = \left(\overrightarrow{AP}\frac{\overrightarrow{AB}}{c}\right)\frac{\overrightarrow{AB}}{c} \quad \text{und} \quad \overline{PB}^2 = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB})^2 = \overline{PA}^2 + c^2 + 2\,\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AB},$$

somit $\overrightarrow{AZ} = \dfrac{c^2+d_1}{2\,c^2}\overrightarrow{AB}$. Ebenso $\overrightarrow{AY} = \dfrac{b^2+d_2}{2\,b^2}\overrightarrow{AC}$. Beim Dreieck $A\,Z\,Y$ liefern die trigonometrischen Sätze:

$$\overline{PA}^2 = \frac{\overline{YZ}^2}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}(\overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AY})^2$$

$$= \frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{(c^2+d_1)^2}{4\,c^2} + \frac{(b^2+d_2)^2}{4\,b^2} - 2\frac{(c^2+d_1)}{2\,c^2}\cdot\frac{(b^2+d_2)}{2\,b^2}\,b\,c\cos\alpha\right),$$

woraus die Formel sofort folgt.
Es seien nun I_a, I_b, I_c die Ankreismittelpunkte des Dreiecks ABC und ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c deren Radien, ϱ der Inkreisradius und r der Umkreisradius. Wir wenden beim Dreieck $I_b I_c M$ den Hilfssatz 1 an. Die Strecken $\overline{AI_b} = \varrho_b : \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ und $\overline{AI_c} = \varrho_c : \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ sind bekannt, nicht aber die andern, da der Radius x des Kreises auch gesucht ist. Setzt man für $\overline{MI_b}^2$ und $\overline{MI_c}^2$ einfach $(x-\varrho_b)^2$ und $(x-\varrho_c)^2$ ein, so ergibt sich

$$\overline{MA}^2 = x^2 - \frac{4\,\varrho_b\,\varrho_c}{\varrho_b+\varrho_c}x + \varrho_b\,\varrho_c - \frac{\varrho_b\,\varrho_c}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Wegen $\varrho_b = \dfrac{J}{s-b}$, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{s(s-a)}{b\,c}$ und $J^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, wird daraus $\overline{MA}^2 = x^2 - \dfrac{b\,c}{r}x - (s-b)(s-c)$. Entsprechendes für $\overline{MB}$ und $\overline{MC}$. Nun kann der Hilfssatz 2 angewendet werden. Es ist

$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = \frac{c\,(a-b)}{r}x + (s-c)(b-a),\ \overline{MA}^2 - \overline{MC}^2 = \frac{b\,(a-c)}{r}x + (s-b)(c-a).$$

Eingesetzt in (9), ergibt sich

$$16J^2\left(x^2-\frac{bc}{r}x-(s-b)(s-c)\right)$$
$$=b^2\left(c^2+\frac{c(a-b)}{r}x+(s-c)(b-a)\right)^2+c^2\left(b^2+\frac{b(a-c)}{r}\;x+(s-b)(c-a)\right)^2$$
$$-\left(c^2+\frac{c(a-b)}{r}x+(s-c)(b-a)\right)\left(b^2+\frac{b(a-c)}{r}x+(s-b)(c-a)\right)(-a^2+b^2+c^2),$$

eine quadratische Gleichung für x. Die Auflösung ist einfacher, als es scheint, denn eine Lösung, nämlich $-\frac{r}{2}$, ist bekannt (Feuerbach'scher Kreis). Mit Vieta kann die zweite, der Radius des hier gesuchten, umschliessend berührenden Kreises, berechnet werden. Nach einigen Umformungen ergibt sich

$$x=\frac{1}{8J}(a^2b+a^2c+ab^2+abc+ac^2+b^2c+bc^2). \tag{10}$$

Oben eingesetzt

$$\overline{MA}^2-\overline{MB}^2=\frac{c(a-b)}{8rJ}(\ldots)+(s-c)(b-a)=\frac{(a-b)}{2ab}((\ldots)-2ab(s-c))$$
$$=\frac{cs}{ab}(a^2-b^2)=\frac{acs}{b}-\frac{bcs}{a}.$$

Somit gilt

$$\overline{MA}^2+\frac{bcs}{a}=\overline{MB}^2+\frac{cas}{b}=\overline{MC}^2+\frac{abs}{c}.$$

Das ist die Zeile (8) mit dem Koeffizienten $\lambda=-s(a^2+b^2+c^2):2abc$, q.e.d.

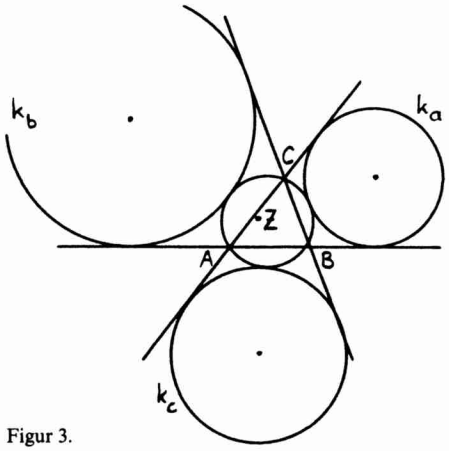
Es kann, unter Verwendung des Brocardwinkels ω, auch $\lambda=-\dfrac{s\cot w}{2r}$ geschrieben werden, und für den Radius ist die Darstellung $x=\dfrac{s^2+\varrho^2}{4\varrho}$ möglich.

Weniger bekannt dürfte der folgende Satz sein.

Anwendung 3

Bei einem Dreieck ABC mit dem Umkreisradius r und dem Inkreisradius ϱ seien k_a, k_b, k_c die drei Kreise, welche den Umkreis von aussen und je zwei Dreiecksseiten berühren (ohne die dritte Seite zu schneiden) (Fig. 3). Dann liegt das Potenzzentrum Z von k_a, k_b, k_c auf der Geraden durch den Umkreismittelpunkt U und den Inkreismittelpunkt I des Dreiecks, und es gilt

$$\overrightarrow{UZ}=-\frac{2r}{2r-\varrho}\overrightarrow{UI}.$$



Figur 3.

Beweis:

Es seien, wie üblich, a, b, c die Seitenlängen, s der halbe Umfang und J der Inhalt des Dreiecks. Der Radius x_a des Kreises k_a kann am besten mit Hilfe der Inversion am Kreis um A mit dem Radius $\sqrt{bc}$ berechnet werden. Diese Inversion bildet B in den Punkt B^* auf AB, mit der Entfernung b von A, ab. Entsprechend ist $\overline{AC^*} = c$. Das Dreieck AC^*B^* ist dem Dreieck ABC kongruent. Der Umkreis geht über in die Gerade B^*C^*, der Kreis k_a in den Inkreis des Dreiecks AB^*C^*. Wenn T der Berührungspunkt von k_a mit AB ist, ergibt sich aus $\overline{AT^*} = s - a$ sofort $\overline{AT} = \dfrac{bc}{s-a}$ und daraus

$$x_a = \frac{bc\varrho}{(s-a)^2}.$$

Es folgt hier übrigens auch unmittelbar, dass die Polare von A bezüglich k_a durch den Ankreismittelpunkt I_a läuft, ein Satz von A. Mannheim [4].
Nun sollen für die weitere Rechnung Koordinaten zu Hilfe genommen werden, angemessenerweise baryzentrische. Dazu eine kurze

Zwischenbetrachtung:

1) Unter den baryzentrischen Koordinaten $(p_1/p_2/p_3)$ eines Punktes P, bezüglich eines Dreiecks ABC, versteht man das multiplikativ homogene Zahlentripel, verschieden von (0/0/0), das die Gleichung

$$p_1\overrightarrow{PA} + p_2\overrightarrow{PB} + p_3\overrightarrow{PC} = 0 \tag{11}$$

erfüllt [1]. Man kann P auffassen als Schwerpunkt der mit den Gewichten p_1, p_2, p_3 versehenen Punkte A, B, C. Für den Vektor $\overrightarrow{QP}$ von irgendeinem Punkt Q zum Punkt $P(p_1/p_2/p_3)$ gilt

$$\overrightarrow{QP} = \frac{p_1\overrightarrow{QA} + p_2\overrightarrow{QB} + p_3\overrightarrow{QC}}{p_1 + p_2 + p_3}, \tag{12}$$

denn es ist

$$p_1\overrightarrow{QA} + p_2\overrightarrow{QB} + p_3\overrightarrow{QC} = p_1\overrightarrow{QA} + p_2\overrightarrow{QB} + p_3\overrightarrow{QC}$$
$$-(p_1\overrightarrow{PA} + p_2\overrightarrow{PB} + p_3\overrightarrow{PC}) = p_1\overrightarrow{QP} + p_2\overrightarrow{QP} + p_3\overrightarrow{QP}.$$

Die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes P sind proportional zu den (orientierten) Inhalten der Dreiecke PBC, PCA, PAB. Dies folgt aus

$$p_3(\overrightarrow{PB} \times \overrightarrow{PC}) = \overrightarrow{PB} \times (-p_1\overrightarrow{PA} - p_2\overrightarrow{PB})$$
$$= -p_1(\overrightarrow{PB} \times \overrightarrow{PA}) = p_1(\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}) \text{ etc.}$$

Beispielsweise hat der Dreiecksschwerpunkt S, wegen der Inhaltsgleichheit der Teildreiecke SBC, SCA, SAB, die Koordinaten (1/1/1). Der Inkreismittelpunkt I hat die Koordinaten $(a/b/c)$, der Ankreismittelpunkt I_a die Koordinaten $(-a/b/c)$; man achte auf den Umlaufsinn der Dreiecke.

Bei Berechnungen ist es häufig nützlich, das baryzentrische Koordinatentripel $(p_1/p_2/p_3)$ noch durch $p_1 + p_2 + p_3$ zu dividieren, also so zu normieren, dass die Koordinatensumme gleich 1 wird: $S\left(\frac{1}{3}\Big/\frac{1}{3}\Big/\frac{1}{3}\right)$, $I\left(\frac{a}{2s}\Big/\frac{b}{2s}\Big/\frac{c}{2s}\right)$.

2) Wenn die Eckentfernungen $\overline{ZA}$, $\overline{ZB}$, $\overline{ZC}$ eines Punktes Z bekannt sind, lässt sich seine Entfernung von einem beliebigen Punkt $P(p_1/p_2/p_3)$, dessen baryzentrische Koordinaten normiert sind $(p_1 + p_2 + p_3 = 1)$, mit der folgenden wichtigen Formel berechnen:

$$\overline{ZP}^2 = p_1\overline{ZA}^2 + p_2\overline{ZB}^2 + p_3\overline{ZC}^2 - (a^2p_2p_3 + b^2p_3p_1 + c^2p_1p_2). \tag{13}$$

Beweis:

Aus (11) folgt, immer unter Berücksichtigung der Normiertheit,

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP} + (1 - p_2 - p_3)\overrightarrow{PA} + p_2\overrightarrow{PB} + p_3\overrightarrow{PC} = p_2\overrightarrow{AB} + p_3\overrightarrow{AC}.$$
$$\overline{PA}^2 = p_2^2c^2 + 2p_2p_3bc\cos\alpha + p_3^2b^2 = p_2^2c^2 + p_2p_3(-a^2 + b^2 + c^2) + p_3^2b^2.$$
$$p_1\overline{ZA}^2 + p_2\overline{ZB}^2 + p_3\overline{ZC}^2 = p_1(\overrightarrow{ZP} + \overrightarrow{PA})^2 + \ldots.$$

(Die Punkte stehen für die weiteren Glieder, die aus dem ersten durch zyklische Vertauschung hervorgehen)

$$= p_1(\overline{ZP}^2 + 2\overrightarrow{ZP}\cdot\overrightarrow{PA} + \overline{PA}^2) + \ldots = \overline{ZP}^2 + (p_1\overline{PA}^2 + \ldots)$$
$$= \overline{ZP}^2 + ((p_1p_2^2c^2 + p_1p_2p_3(-a^2 + b^2 + c^2) + p_1p_3^2b^2) + \ldots).$$

Es muss noch nach a^2, b^2, c^2 geordnet werden.

$$= \overline{ZP}^2 + p_2p_3a^2 + p_3p_1b^2 + p_1p_2c^2, \quad \text{q.e.d.}$$

Z. B. ergibt sich für die Strecke $\overline{UI}$ die bekannte Euler'sche Formel

$$\overline{UI}^2 = \frac{a}{2s} r^2 + \ldots - \left(a^2 \frac{b}{2s} \frac{c}{2s} + \ldots\right) = r^2 - \frac{abc}{2s} = r^2 - 2r\varrho .$$

Ende der Zwischenbetrachtung.

Der Mittelpunkt M_a des Kreises k_a hat die Koordinaten

$$\left(J - \frac{b x_a}{2} - \frac{c x_a}{2} \Big/ \frac{b x_a}{2} \Big/ \frac{c x_a}{2}\right) = \left(1 - \frac{b x_a}{2J} - \frac{c x_a}{2J} \Big/ \frac{b x_a}{2J} \Big/ \frac{c x_a}{2J}\right).$$

Entsprechend zyklisch

$$M_b\left(\frac{a x_b}{2J} \Big/ 1 - \frac{c x_b}{2J} - \frac{a x_b}{2J} \Big/ \frac{c x_b}{2J}\right), \quad x_b = \frac{c a \varrho}{(s-b)^2}, \quad \text{etc.}$$

Gibt es nun auf der Geraden UI einen Punkt Z, der die Potenzbedingung

$$\overline{ZM_a}^2 - x_a^2 = \overline{ZM_b}^2 - x_b^2 = \overline{ZM_c}^2 - x_c^2 \tag{14}$$

erfüllt? Nach (6) erfüllt Z, wenn $\overrightarrow{UZ} = \lambda \overrightarrow{UI}$ ist, die Gleichung

$$\overline{ZA}^2 - \lambda bc = \overline{ZB}^2 - \lambda ca = \overline{ZC}^2 - \lambda ab . \tag{15}$$

Nach (13) ist

$$\begin{aligned} \overline{ZM_a}^2 = {} & \left(1 - \frac{b x_a}{2J} - \frac{c x_a}{2J}\right)\overline{ZA}^2 + \frac{b x_a}{2J}\overline{ZB}^2 + \frac{c x_a}{2J}\overline{ZC}^2 \\ & - \left(a^2 \frac{b c x_a^2}{4J^2} + b^2(\ldots)\frac{c x_a}{2J} + c^2(\ldots)\frac{b x_a}{2J}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Setzt man, gemäss (15), für $\overline{ZA}^2$, $\overline{ZB}^2$, $\overline{ZC}^2$ hier $k + \lambda bc$, $k + \lambda ca$, $k + \lambda ab$ ein, wobei k die nicht weiter bekannte Konstante der Zeile (15) ist, und geht man mit (16) in (14), so erhält man eine (zyklisch fortlaufende) Gleichung für λ. Es genügt vorerst, nur den vorderen Teil von (14): $\overline{ZM_a}^2 - x_a^2 = \overline{ZM_b}^2 - x_b^2$ zu betrachten. Die Auflösung nach λ ergibt nach kurzer Umformung – dass k herausfällt, ist schnell ersichtlich – den Ausdruck

$$\lambda = \frac{x_a^2 bc\left(a^2 + \left(\frac{2J}{x_a} - b - c\right)(b+c)\right) - x_b^2 ac\left(b^2 + \left(\frac{2J}{x_b} - c - a\right)(a+c)\right) + 4J^2(x_a^2 - x_b^2)}{2Jc\left(b x_a\left(\frac{2J}{x_a} + 2a - b - c\right) - a x_b\left(\frac{2J}{x_b} + 2b - a - c\right)\right)}.$$

Nachdem man für die Radien eingesetzt hat, bleibt nur nachzuweisen, dass dieserAusdruck symmetrisch ist in a, b, c, das heisst invariant bei zyklischer Vertauschung der

Seiten. Dies bedeutet dann, dass mit diesem λ, wie gewünscht, die ganze Zeile (14) erfüllt werden kann. Ohne Computerunterstützung wieder eine etwas mühsame Umformung. Das Resultat:

$$\lambda = \frac{-4abc}{a^3 - a^2b - a^2c - ab^2 + 6abc - ac^2 + b^3 - b^2c - bc^2 + c^3}$$

$$= \frac{-4abc}{4abc - 8(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{-abc}{abc - 2s\varrho^2} = -\frac{2r}{2r - \varrho}.$$

Damit reiht sich der Punkt Z würdig in die Gesellschaft der besonderen Punkte des Dreiecks ein.

Die Kollinearität der Punkte Z, U, I lässt sich auch auf andere Weise nachweisen. Der hier beschrittene Weg hat den Vorteil, dass er die genaue Lage von Z auf UI liefert und dass damit für weiterführende Rechnungen allfällig Verhältnisse, Streckenlängen usw. zur Verfügung stehen.

So kann z. B. auch der Kreis berechnet werden, der die drei Kreise k_a, k_b, k_c nicht wie der Umkreis von aussen, sondern umschliessend berührt. Sein Mittelpunkt V liegt auch auf UI, man denke an die Inversion am Orthogonalkreis von k_a, k_b, k_c. Sein Radius ist $\frac{r(4r - 3\varrho)}{\varrho}$, und es gilt $\overrightarrow{UV} = -\frac{4r}{\varrho}\overrightarrow{UI}$.

Interessant ist ferner das Dreieck $A'B'C'$, gebildet durch die drei äusseren gemeinsamen Tangenten der Kreise k_a, k_b, k_c. Es ist zentralkollinear zum Dreieck ABC. Die äussere Ähnlichkeitsgerade von k_a, k_b, k_c ist die Kollineationsachse. Das Kollineationszentrum liegt – wieder eine Merkwürdigkeit – auch auf der Geraden UI, es ist der Schnittpunkt von UI mit der Geraden durch den Schwerpunkt und den Gergonnepunkt des Dreiecks ABC.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass man zu analogen Resultaten gelangt, wenn man als Kreise k_a, k_b, k_c nicht die den Umkreis von aussen berührenden Seitenberührkreise nimmt, sondern diejenigen innen. Auch ihr Potenzzentrum liegt auf der Geraden UI.

R. Stärk, Kantonsschule Schaffhausen

LITERATUR

1 Coxeter H. S. M.: Unvergängliche Geometrie. Birkhäuser, Basel 1963.
2 Donath E.: Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976.
3 Johnson R. A.: Advanced Euclidean Geometry. Dover Publications New York 1960.
4 Simon M.: Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert, p. 138. B. G. Teubner, Leipzig 1906.

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/90/060155-11$1.50 + 0.20/0