Aufgaben

Aufgabe 894. Die hypergeometrische Reihe $F(1, 1; 1/2; z)$ stellt eine elementare transzendente Funktion dar. Man gebe diese an.

E. Lanckau, Karl-Marx-Stadt, DDR

Lösung: Wir werden die folgenden wohlbekannten, für komplexe z mit $|z| < 1$ gültigen Formeln für hypergeometrische Funktionen an:

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z), \tag{1}$$

$$\frac{d}{dz} F(a, b; c; z) = \frac{a\,b}{c} F(a+1, b+1; c+1; z), \tag{2}$$

$$F(1/2, 1/2; 3/2; z^2) = z^{-1} \arcsin z. \tag{3}$$

Dabei ist bei der Potenz rechts in (1) ebenso wie bei arcsin in (3) der Hauptwert gemeint; für einen Beweis dieser Formeln vergleiche man etwa [1], S. 29 bzw. S. 25 bzw. S. 44. Mit (2) und (3) ist

$$\frac{d}{dz} F(-1/2, -1/2; 1/2; z) = \frac{1}{2} z^{-1/2} \arcsin z^{1/2};$$

andererseits ist die Funktion

$$G(z) := z^{1/2} \arcsin z^{1/2} + (1-z)^{1/2} \tag{4}$$

in $|z| < 1$ holomorph und genügt dort ebenfalls der Bedingung

$$\frac{d}{dz} G(z) = \frac{1}{2} z^{-1/2} \arcsin z^{1/2}.$$

Daher sind $F(-1/2, -1/2; 1/2; z)$ und $G(z)$ in $|z| < 1$ identisch, wenn man beachtet, dass bei $z = 0$ beide gleich 1 sind. Mit (1) und (4) sieht man direkt

$$F(1, 1; 1/2; z) = z^{1/2} (1-z)^{-3/2} \arcsin z^{1/2} + (1-z)^{-1}.$$

P. Bundschuh, Köln, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

1 I. N. Sneddon: Spezielle Funktionen der mathematischen Physik, Mannheim: Bibliographisches Institut, 1963.

Weitere Lösungen sandten R. Askey (Madison, USA), L. Cseh (Cluj, Rumänien), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), V. D. Mascioni (Origlio), H.-J. Seiffert (Berlin, BRD), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil), H. Wallner (Graz, A), C. Wildhagen (Breda, NL), R. Wyss (Flumenthal).