Werk

Titel: Aufgaben.

Jahr: 1979

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199_0034|log7

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

2. Auf jeweils eine Abbildung bezogen, mögen die strichpunktierten Strecken, die als Endpunkte 2 der hervorgehobenen k Punkte, aber keine weiteren dieser k Punkte enthalten, von gleicher Länge sein. (Genau die Endpunkte dieser Strecken besitzen dann bei Beachtung der *knapp erläuterten Konstruktionsvorschriften* dieses Abschnitts Mindestabstand.) Man zerlege E in 12 kongruente Rechtecke R_s $(1 \leq s \leq 12)$ mit Seitenlängen $1/4$ und $1/3$ bzw. in 16 kongruente Quadrate Q_t $(1 \leq t \leq 16)$ mit Seitenlänge $1/4$; die in Abb. 1 bzw. Abb. 2 hervorgehobenen Punkte seien entsprechende Ecken der R_s bzw. Q_t. In Abb. 4 beachte man den angegebenen rechten Winkel und lege 3 der 13 Punkte auf die Diagonale $\overline{AC}$. In Abb. 3 enthalte der Rand von E bei Aufzählung im mathematisch positiven Sinn folgende Punkte: $A = P_1, P_2, B, P_3, P_4, C, P_5, P_6, D, P_7, P_8, A$.

3. Aufgrund von 2 ergibt sich folgende Tabelle:

Konfiguration dargestellt in	k	Mindestabstand d	Zugehörige Dichte $\frac{k\pi d^2}{4(1+d)^2}$
Abb. 1	10	$\frac{5}{12}$	0,67941018
Abb. 3	10	0,42127954	0,69003579
Abb. 2	13	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	0,69661443
Abb. 4	13	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	0,73305767

Die im Fall $k = 10$ in Abb. 3 dargestellte Anordnung ist vermutlich die einzige 10elementige Teilmenge von E, die maximalen Mindestabstand besitzt. In [2] wurden Methoden entwickelt, die das Auffinden und Begründen solcher *Vermutungen* ermöglichen.

Klaus Schlüter, Stuttgart

LITERATURVERZEICHNIS

1 Michael Goldberg: The packing of equal circles in a square. Math. Mag. *43*, 24–30 (1970).
2 Klaus Schlüter: Diplomarbeit, Universität Stuttgart.

Aufgaben

Aufgabe 798. A_1, A_2, A_3 seien die Ecken eines ebenen Dreiecks Δ. Auf den Verlängerungen seiner Seiten seien die Punkte $U_1, \ldots, U_6$ folgendermassen angenommen:

$$\begin{array}{llll} U_1, U_4 \text{ auf } A_2A_3, & |A_2U_1| = |A_1A_2|, & |A_3U_4| = |A_3A_1|, \\ U_2, U_5 \text{ auf } A_3A_1, & |A_3U_5| = |A_2A_3|, & |A_1U_2| = |A_1A_2|, \\ U_3, U_6 \text{ auf } A_1A_2, & |A_1U_3| = |A_3A_1|, & |A_2U_6| = |A_2A_3|. \end{array}$$

Ferner seien V_1, V_2, V_3 bzw. W_1, W_2, W_3 die Mittelpunkte der Seiten $\overline{U_2U_3}$, $\overline{U_1U_6}$, $\overline{U_4U_5}$ bzw. $\overline{U_5U_6}$, $\overline{U_3U_4}$, $\overline{U_1U_2}$ des so entstehenden Sechsecks $U_1 \cdots U_6$.

a) Man zeige, dass sich die Transversalen A_iV_i $(i=1, 2, 3)$ in einem Punkt L und die Transversalen A_iW_i $(i=1,2,3)$ in einem Punkt P schneiden.

b) Man zeige, dass L, P und der Inkreismittelpunkt I von Δ kollinear sind.

c) Man bestimme den Wertebereich des Teilungsverhältnisses $|LI|/|IP|$.

J. T. Groenman, Groningen, NL

Lösung: Es seien a_i $(i=1, 2, 3)$ die Seitenlängen von Δ, O ein Bezugspunkt ausserhalb der Ebene von Δ und $\boldsymbol{b}_i = \overrightarrow{OA_i}$ die Basisvektoren eines räumlichen Koordinatensystems. Da jede Winkelhalbierende von Δ die Gegenseite innen im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, ist

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a_1\boldsymbol{b}_1 + a_2\boldsymbol{b}_2 + a_3\boldsymbol{b}_3}{a_1+a_2+a_3}.$$

Die drei Vektoren

$$\boldsymbol{b}_i - x_i\overrightarrow{A_iV_i} = \boldsymbol{b}_i - x_i(a_j/2a_k)(\boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{b}_j) - x_i(a_k/2a_j)(\boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{b}_k)$$
$$(i,j,k = 1,2,3 \text{ im Zyklus})$$

sind für

$$x_i = 2a_ja_k/(a_1^2+a_2^2+a_3^2)$$

gleich dem Vektor

$$\overrightarrow{OL} = \frac{a_1^2\boldsymbol{b}_1 + a_2^2\boldsymbol{b}_2 + a_3^2\boldsymbol{b}_3}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

Daher gehen die Geraden A_iV_i durch den Punkt L, den Lemoine-Punkt von Δ. Die drei Vektoren

$$\boldsymbol{b}_i + y_i\overrightarrow{A_iW_i} = \boldsymbol{b}_i + \frac{y_i(a_i+a_j)}{2a_j}(\boldsymbol{b}_k - \boldsymbol{b}_i) + \frac{y_i(a_i+a_k)}{2a_k}(\boldsymbol{b}_j - \boldsymbol{b}_i)$$

sind für

$$y_i = a_ja_k/(a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)$$

gleich dem Vektor

$$\overrightarrow{OP} = \frac{a_1(a_2+a_3)\boldsymbol{b}_1 + a_2(a_3+a_1)\boldsymbol{b}_2 + a_3(a_1+a_2)\boldsymbol{b}_3}{2(a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)}.$$

Daher gehen die Geraden A_iW_i durch den Punkt P. Die Vektoren $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{OP}$ sind komplanar, da die aus ihren Koordinaten gebildete Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1(a_2+a_3) & a_2(a_3+a_1) & a_3(a_1+a_2) \end{vmatrix} = 0$$

ist. Somit sind I, L, P kollinear. Das Längenverhältnis der Vektoren

$$\overrightarrow{LI} = \frac{a_1(a_2^2+a_3^2-a_1a_2-a_1a_3)\boldsymbol{b}_1+\cdots}{(a_1+a_2+a_3)(a_1^2+a_2^2+a_3^2)}$$

und

$$\overrightarrow{IP} = \frac{a_1(a_2^2+a_3^2-a_1a_2-a_1a_3)\boldsymbol{b}_1+\cdots}{2(a_1+a_2+a_3)(a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)}$$

lässt sich an jeder der drei Koordinaten ablesen und beträgt

$$|LI|/|IP| = 2(a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)/(a_1^2+a_2^2+a_3^2).$$

Aus den bekannten Dreiecksungleichungen

$$a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2 < a_1^2+a_2^2+a_3^2 \leq 2(a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)$$

ergibt sich als Wertebereich dieses Verhältnisses

$$1 < |LI|/|IP| \leq 2,$$

mit Gleichheit rechts genau für das gleichseitige Dreieck.

Mária Herbert, Pécs, Ungarn

Weitere Lösungen sandten J. Banning (Dedzjum, NL), K. Grün (Linz, A), L. Kuipers (Mollens VS), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), I. Paasche (München, BRD), A. Reuschel (Wien, A).

Aufgabe 799. Es sei k eine natürliche Zahl und a eine reelle Zahl mit $a \geq e$. Man zeige: Zu jeder reellen Zahl x mit $x \geq (\log a)^k$ existiert eine natürliche Zahl m derart, dass

$$\frac{x}{2^{k+1}(\log ax)^k} < m \leq \frac{x}{(\log am)^k}.$$

L. Kuipers, Mollens VS

Lösung mit Verschärfung: Seien k, a, x beliebig wie in der Aufgabenstellung vorgegeben; wir zeigen dann sogar, dass es ein natürliches m gibt mit

$$\frac{x}{2}(\log ax)^{-k} < m \leq x(\log am)^{-k}. \tag{1}$$

Da die Funktion $y(\log ay)^k$ in $y \geqslant 1$ streng monoton wächst, bei $y \to \infty$ nicht beschränkt bleibt und an der Stelle $y=1$ gleich $(\log a)^k \geqslant 1$ ist, ist die Menge $N(k,a,x) := \{n \in \mathbf{N} \mid n(\log an)^k \leq x\}$ nicht leer und endlich. Sei m ihr grösstes Element; offenbar genügt es bereits der rechten Ungleichung in (1) und weiter gilt

$$x < (m+1)\left(\log a(m+1)\right)^k. \tag{2}$$

Wäre $m+1 \leq x(\log ax)^{-k}$, so folgte aus (2) und der vorhin festgestellten Monotonie von $y(\log ay)^k$, dass $x < x(\log ax)^{-k}(\log ax - k \log\log ax)^k \leq x$. Somit ist $x(\log ax)^{-k} < m+1 \leqslant 2m$, was auch die linke Seite von (1) beweist.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Eine weitere Lösung sandte H. Harborth (Braunschweig, BRD).

Aufgabe 800. Man zeige, dass für alle $n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^{-1} = \frac{n+1}{n+2}[1+(-1)^n].$$

S. Gabler, Mannheim, BRD

Lösung: Aus der Identität

$$k!\,(n-k)!\,(n+2) = k!\,(n-k+1)! + (k+1)!\,(n-k)!$$

folgt
$$\binom{n}{k}^{-1} = \frac{n+1}{n+2}\left\{\binom{n+1}{k}^{-1} + \binom{n+1}{k+1}^{-1}\right\}.$$

Summiert man über k von 0 bis n, so heben sich rechts ersichtlich alle Summanden bis auf den ersten und letzten weg. Dies ergibt unmittelbar die Behauptung.

P. Hohler, Olten
Problemgruppe Bern

Anmerkung der Redaktion. Verschiedene Einsender bemerkten, dass sich Aufgabe 800 samt Lösung in [1] findet. Ferner wurde von mehreren Lesern auf [2] hingewiesen, wo die allgemeinere Identität

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{x}{k}^{-1} = \frac{x+1}{x+2}\left\{1+(-1)^n \binom{x+1}{n+1}^{-1}\right\}$$

bewiesen wird. Als weitere Verallgemeinerung zeigt L. Hämmerling

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{p+q+n}{p+k}^{-1} = \frac{p+q+n+1}{p+q+n+2}\left\{\binom{p+q+n+1}{p}^{-1} + (-1)^n \binom{p+q+n+1}{q}^{-1}\right\} \quad \text{für } p,q,n \in \mathbf{N}_0.$$