

Werk

Titel: Aufgaben.

Jahr: 1972

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199_0027|log19

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Indeed, if $x \in X$, let $R(x) = \{y \mid (x, y) \in R\}$, and set $B = \{R(x) \mid x \in X\}$. By the axiom of choice there is a function $f: X \rightarrow \cup B$ such that $f(x) \in R(x)$ for each $x \in X$; clearly, $f \in F$. Let U denote the union of the functions in F . Then $U \subset R$. Assume that there is an element (x, y) in R which is not in U . Let $f \in F$. Then $(x, y) \notin f$. Since f is a function with domain X there is a unique $z \in X$ such that $(x, z) \in f \subset R$. Define a new function g from f by replacing the element (x, z) in f by the original element (x, y) . Since $f \subset R$ and $(x, y) \in R$ we have $g \subset R$; that is, $g \in F$. It follows that $(x, y) \in g \subset U$, contrary to the way that (x, y) was chosen. The proof is now complete.

It is easy to see that the axiom of choice is a consequence of the theorem. In fact, if $E = \{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ is a nonempty family of nonempty sets, let R be the relation from A into $\cup E$ given by $R = \{(\alpha, x_\alpha) \mid \alpha \in A, x_\alpha \in X_\alpha\}$. By the theorem there is a function $f \subset R$ such that $f(\alpha) \in X_\alpha$ for each $\alpha \in A$, i.e., f is a choice function. Hence, the theorem and the axiom of choice are equivalent.

R. S. Doran, Texas Christian University, USA

Aufgaben

Aufgabe 642. Am ebenen Dreieck mit Seiten abc , Inradius r , Umradius R und Flächeninhalt rs beweise man die Verschärfung

$$(b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2 + k [rs\sqrt{3} + (4 - 2\sqrt{3})r(R - 2r)] \leq \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 & \text{für } k = 4 \\ (a + b + c)^2/2 & \text{für } k = 6 \end{cases}$$

zweier Ungleichungen von H. Hadwiger, JBer. DMV 49, 2. Abt. S. 35–39.

I. Paasche, München

Solution: Since

$$\begin{aligned} & 3[(b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2 - a^2 - b^2 - c^2] \\ &= 2 \left[(b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2 - \frac{1}{2} (a + b + c)^2 \right] \end{aligned}$$

the two stated inequalities are equivalent. It accordingly suffices to prove the first.

For $k = 4$ we have to prove

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4rs\sqrt{3} + 4(4 - 2\sqrt{3})r(R - 2r) \leq 2(bc + ca + ab), \quad (*)$$

or what is the same thing,

$$(a + b + c)^2 + 4rs\sqrt{3} + 4(4 - 2\sqrt{3})r(R - 2r) \leq 4(bc + ca + ab).$$

Since

$$bc + ca + ab = s^2 + 4Rr + r^2,$$

this reduces to

$$rs\sqrt{3} + (4 - 2\sqrt{3})r(R - 2r) \leq 4Rr + r^2,$$

or

$$s \leq 2R + (3\sqrt{3} - 4)r. \quad (**)$$

This inequality has been proved by W. J. Blundon (Canadian Math. Bulletin 8(1965), 615–626). Moreover (**) holds if and only if the triangle is equilateral. Hence the same is true of (*).

L. Carlitz, Durham, N. C., USA

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Freiburg i. Br.), M. Majić (Zagreb, Jugoslawien) und K. Schuler (Rottweil, BRD).

Aufgabe 643. Man beweise, dass für $n \geq 2$ die Ebene durch ein vollständiges n -Eck in allgemeiner Lage in

$$\frac{1}{8} \cdot (n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 26n + 8)$$

Gebiete zerlegt wird.

A. Dreiding und P. Hohler, Zürich

1. *Lösung:* Die fragliche Anzahl von Gebieten sei mit A_n bezeichnet. Die angegebene Formel ist offenbar für $n = 2$ richtig. Wir betrachten alsdann ein vollständiges $(n + 1)$ -Eck in allgemeiner Lage. Es entsteht aus dem vollständigen n -Eck P_1, \dots, P_n durch Hinzufügen des Punktes P_{n+1} und der n Geraden $P_k P_{n+1}$, $k = 1, \dots, n$. Jede dieser Geraden liefert offenbar

$$\binom{n}{2} - (n - 1)$$

neue Schnittpunkte und somit

$$\binom{n}{2} - (n - 1) + 1 = \frac{n^2 - 3n + 4}{2}$$

neue Gebiete. Das ergibt zunächst einen Gesamtzuwachs von

$$\frac{n^3 - 3n^2 + 4n}{2}$$

Gebieten, welche nicht den Eckpunkt P_{n+1} besitzen. Ferner haben wir offenbar $2n$ Gebiete mit dem gemeinsamen Eckpunkt P_{n+1} , also einen Zuwachs um $2n - 1$ Gebiete. Somit gilt

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n + \frac{n^3 - 3n^2 + 4n}{2} + 2n - 1 \\ &= A_n + \frac{n^3 - 3n^2 + 8n - 2}{2}, \end{aligned}$$

womit sich die behauptete Formel in einfacher Weise durch Induktion ergibt.

H. Kappus, Bottmingen BL

2. *Lösung:* Durch m Geraden in allgemeiner Lage wird die Ebene in

$$s(m) = \frac{1}{2} (m^2 + m + 2)$$

Gebiete zerlegt, da $s(m+1) = s(m) + (m+1)$, $s_0 = 1$.

Von diesen $s(m)$ Gebieten sind $a(m) = 2m$ unbeschränkt und

$$j(m) = \frac{1}{2} (m^2 - 3m + 2)$$

beschränkt. Sind die m Geraden nicht in allgemeiner Lage, sondern gibt es genau r Punkte P_1, \dots, P_r , durch die mehr als zwei Geraden hindurchgehen, und zwar durch P_ϱ g_ϱ Geraden ($\varrho = 1, \dots, r$), dann wird die Ebene in

$$z = s(m) - \sum_{\varrho=1}^r j(g_\varrho)$$

Gebiete zerlegt.

Im speziellen Fall der Aufgabe ist

$$m = \binom{n}{2}, \quad r = n, \quad g_\varrho = n - 1,$$

also

$$\begin{aligned} z &= s \left[\binom{n}{2} \right] - nj(n-1) = \frac{1}{2} \left[\binom{n}{2}^2 + \binom{n}{2} + 2 \right] \\ &\quad - n \frac{1}{2} \left[(n-1)^2 - 3(n-1) + 2 \right] = \frac{1}{8} (n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 26n + 8). \end{aligned}$$

H. Wimmer, Graz, Österreich

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht ZH; zwei Lösungen), H. Frischknecht (Berneck SG), H. Harborth (Braunschweig, BRD), I. Paasche (München; zwei Lösungen), O. Reutter (Ochsenhausen, BRD) und W. R. Umbach (Rottorf, BRD).

Aufgabe 644. Im Dreieck ABC sei $\beta \leq \gamma$, wobei B bzw. C den Scheitel von β bzw. γ bezeichnet. Wählt man $X \in \overline{AB}$ und $Y \in \overline{AC}$ so, dass $\sphericalangle XCB = \lambda\gamma$ und $\sphericalangle YBC = \lambda\beta$ mit $0 < \lambda \leq 1$, so gilt $CX \leq BY$ mit Gleichheit genau für $\beta = \gamma$. Man beweise diese Behauptung. P. Erdős, Budapest

Solution: Let us compare the angles CXB and CYB .

$$\sphericalangle CXB = \alpha + (1 - \lambda)\gamma \geq \sphericalangle CYB = \alpha + (1 - \lambda)\beta.$$

Therefore the circle passing through C, X, B will cut BY in point Z of the triangle. Now the angle in the circle standing on BZ is

$$\lambda\gamma + \sphericalangle ZCX = \lambda\gamma + \sphericalangle ZBX = \lambda\gamma + (1 - \lambda)\beta \geq \beta.$$

This means that

$$CX \leq BZ \leq BY,$$

with equality holding if and only if $\beta = \gamma$.

E. Szekeres, Sydney, Australia

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht ZH), P. Bundschuh (Freiburg i. Br.), J. Fehér (Pécs, Ungarn), H. Harborth (Braunschweig, BRD), H. Kappus (Bottmingen BL), F. Leuenberger (Feldmeilen ZH), M. Majić (Zagreb, Jugoslawien), H. Meyer (Birkerød, Dänemark), K. Schuler (Rottweil, BRD), J. Steinig (Urbana, Illinois, USA) und H. Wimmer (Graz, Österreich).

Aufgabe 645. Let p be a fixed prime and a, b, s, k nonnegative integers. Let $E(a, b)$ denote the largest value of k such that $p^k \mid \binom{a+b}{a}$ and let $E'(a, b)$ denote the largest value of k such that

$$p^k \mid (a+b+1) \binom{a+b}{a}.$$

Show that

$$E(a, b) + E'(p^s - a - 1, p^s - b - 1) = s,$$

provided

$$0 \leq a < p^s; \quad 0 \leq b < p^s.$$

L. Carlitz, Duke University, USA

Lösung:

$$\begin{aligned} E &= E(a, b) + E'(p^s - a - 1, p^s - b - 1) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left[\frac{a+b}{p^i} \right] - \left[\frac{a}{p^i} \right] - \left[\frac{b}{p^i} \right] + \left[\frac{2p^s - a - b - 1}{p^i} \right] - \left[\frac{p^s - a - 1}{p^i} \right] - \left[\frac{p^s - b - 1}{p^i} \right] \right) \\ &= \sum_{i=1}^s \left(\left[\frac{2p^s - (a+b) - 1}{p^i} \right] + \left[\frac{a+b}{p^i} \right] \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{s-1} \left(\left[\frac{p^s - a - 1}{p^i} \right] + \left[\frac{a}{p^i} \right] + \left[\frac{p^s - b - 1}{p^i} \right] + \left[\frac{b}{p^i} \right] \right), \end{aligned}$$

denn wegen $0 \leq a < p^s$ und $0 \leq b < p^s$, sowie $a+b < 2p^s$ und $2p^s - a - b - 1 \leq 2p^s - 1$ verschwinden in der ersten Summe von $i = s+1$ an und in der zweiten Summe von $i = s$ an alle Summanden.

Weiter ist mit $x = v p^i + r$; $0 \leq r \leq p^i - 1$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\alpha p^s - x - 1}{p^i} \right] + \left[\frac{x}{p^i} \right] &= \left[\frac{\alpha p^s - (v+1)p^i + p^i - (r+1)}{p^i} \right] + v \\ &= \alpha p^{s-i} - (v+1) + \left[\frac{p^i - (r+1)}{p^i} \right] + v \\ &= \begin{cases} p^{s-i} - 1 & \text{für } i = 1, 2, \dots, s-1 \text{ und } x = a, b \\ 2p^{s-i} - 1 & \text{für } i = 1, 2, \dots, s \text{ und } x = a+b, \end{cases} \end{aligned}$$

denn wegen

$$0 \leq p^i - (r+1) \leq p^i - 1 \text{ ist } \left[\frac{p^i - (r+1)}{p^i} \right] = 0.$$

Also folgt:

$$E = \sum_{i=1}^{s-1} (2p^{s-i} - 1) + 1 - 2 \sum_{i=1}^{s-1} (p^{s-i} - 1) = -(s-1) + 1 + 2(s-1) = s.$$

W.-R. Umbach, Rottorf, BRD

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht ZH), P. Bundschuh (Freiburg i. Br.), J. Fehér (Pécs, Ungarn) und H. Harborth (Braunschweig, BRD).