Werk

Titel: Bemerkung zu einer Anwendung des Bertrandschen Postulats in der Zahlentheorie.

Autor: Salát, Tibor

Jahr: 1971

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199_0026|log14

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Hence by lemmas 1 and 2,

$$Q_k^*(x) = \sum_{n \leqslant \sqrt[k]{x}} \mu(n) \left\{ x \frac{\varphi(n)}{n^{k+1}} + O\left(x^s \frac{\sigma_{-s}(n)}{n^{sk}} \right) \right\}$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\,\varphi(n)}{n^{k+1}} + O\left(x \sum_{n > \sqrt[k]{x}} \frac{1}{n^k} \right) + O\left(x^s \sum_{n \leqslant \sqrt[k]{x}} \frac{\sigma_{-s}(n)}{n^{sk}} \right)$$

$$= \alpha_k^*\, x + O(x^{1/k}) + O\left(x^s \sum_{n \leqslant \sqrt[k]{x}} \frac{\sigma_{-s}(n)}{n^{sk}} \right). \tag{1}$$

Now, choosing $0 < s < 1/k$, we obtain

$$\sum_{n \leqslant \sqrt[k]{x}} \frac{\sigma_{-s}(n)}{n^{sk}} = \sum_{n \leqslant \sqrt[k]{x}} \frac{1}{n^{sk}} \sum_{d\delta = n} \frac{1}{d^s} = \sum_{d\delta \leqslant \sqrt[k]{x}} \frac{1}{d^{s(1+k)}\,\delta^{sk}} = \sum_{d \leqslant \sqrt[k]{x}} \frac{1}{d^{s(1+k)}} \sum_{\delta \leqslant \frac{\sqrt[k]{x}}{d}} \frac{1}{\delta^{sk}}$$

$$= O\left(\sum_{d \leqslant \sqrt[k]{x}} \frac{1}{d^{s(1+k)}} \left(\frac{\sqrt[k]{x}}{d} \right)^{1-sk} \right) = O\left(x^{1/k - s} \sum_{d \leqslant \sqrt[k]{x}} \frac{1}{d^{s+1}} \right) = O\left(x^{1/k - s} \right).$$

Hence from (1), the theorem follows.

D. Suryanarayana, Waltair, India

REFERENCES

[1] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th ed. (Oxford 1965).

[2] D. Suryanarayana, *Two Arithmetic Functions and Asymptotic Densities of Related Sets*, Portugaliae Mathematica (to appear in vol. 30 (1971).

Bemerkung zu einer Anwendung des Bertrandschen Postulats in der Zahlentheorie

Durch Anwendung des Bertrandschen Postulats kann man das folgende interessante Ergebnis beweisen:

Keine der Partialsummen

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \quad (n > 1)$$

der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ ist ganz (siehe [1], S. 139, Exercise 2).

Eine der erwähnten Anwendung des Bertrandschen Postulats ähnliche Methode ermöglicht uns, einige Ergebnisse über Partialsummen einiger Teilreihen der harmonischen Reihe zu beweisen (die Teilreihen der harmonischen Reihe nennt man Ahmessche Reihen, vgl. [2]).

Im folgenden bedeutet $a_1 < a_2 < \cdots$ eine Folge von natürlichen Zahlen und $P(x)$ bezeichnet die Anzahl derjenigen Indices i, für welche $a_i \leqq x$ (x ist eine reelle Zahl) und a_i eine Primzahl ist.

Satz 1. Haben $a_1 < a_2 < \cdots$ und $P(x)$ die vorige Bedeutung und setzen wir voraus, dass für ein geeignetes m die Ungleichung

$$\frac{P(a_m)}{P\left(\frac{a_m}{2}\right)} > 1$$

gilt, dann ist die Summe $S_m = \sum_{k=1}^{m} 1/a_k$ nicht ganz.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $P(a_m/2) < P(a_m)$. Aus der Definition von $P(x)$ folgt die Existenz eines Index $i \leqq m$, mit der Eigenschaft, dass a_i eine Primzahl p ist und

$$\frac{a_m}{2} < p \leqq a_m \tag{1}$$

gilt.

Bezeichnen wir mit B das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ und setzen $A_k = B/a_k$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$, dann haben wir

$$S_m = \frac{A}{B}, \quad A = \sum_{k=1}^{m} A_k . \tag{2}$$

Mit (1) sieht man unmittelbar, dass $p \mid B$, $p^2 \nmid B$ und $p \nmid a_k$ für $k \leqq m$, $k \neq i$. Daraus und aus der Definition der Zahlen A_k folgt $p \mid A_k$ für $k \leqq m$, $k \neq i$ und $p \nmid A_i$. Infolgedessen

$$p \nmid A . \tag{3}$$

Falls S_m eine ganze Zahl wäre, dann würde $p \mid A$ aus (2) und $p \mid B$ folgen. Das steht aber im Widerspruch zu (3).

Eine leichte Folgerung aus Satz 1 ist

Satz 2. Haben $a_1 < a_2 < \ldots$ und $P(x)$ die vorige Bedeutung und ist

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{P(x)}{P\left(\frac{x}{2}\right)} > 1 , \tag{4}$$

dann existiert ein m_0 derart, dass keine der Partialsummen $S_m = \sum_{k=1}^{m} 1/a_k$ $(m \geqq m_0)$ der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/a_k$ ganz ist.

Beweis. Es genügt festzustellen, dass aus (4) die Unendlichkeit der Folge $a_1 < a_2 < \ldots$ folgt. Alles übrige ist klar.

Satz 2 ermöglicht uns eine Aussage über die Nicht-Ganzheit der Partialsummen einiger Ahmesschen Reihen.

Satz 3. Haben $a_1 < a_2 < \ldots$ und $P(x)$ die vorige Bedeutung und existieren zwei Konstanten c, α derart, dass $c > 0$, $\alpha \geqq 0$ und

$$P(x) \sim \frac{c\,x}{\log^{\alpha} x} \text{ [1]} \tag{5}$$

gilt, dann existiert ein m_0, so dass keine der Partialsummen $S_m = \sum_{k=1}^{m} 1/a_k$ $(m \geqq m_0)$ der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/a_k$ ganz ist.

Beweis. Die Unendlichkeit der Folge $a_1 < a_2 < \ldots$ folgt aus (5). Durch eine leichte Rechnung bekommt man

$$\frac{P(x)}{P\left(\frac{x}{2}\right)} \sim 2\left(\frac{\log x - \log 2}{\log x}\right)^{\alpha} \to 2 .$$

Satz 3 folgt nun aus Satz 2.

---

[1]) $f(x) \sim g(x)$ bedeutet $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.