Werk

Titel: Über eine spezielle Differenzengleichung.

Autor: Wimmer, H.

Jahr: 1970

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199_0025|log33

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Satz 2: Liegt das Zentrum $\boldsymbol{o}$ innerhalb des Ovals $\boldsymbol{y}(s)$ so, dass der Flächenschwerpunkt des zentro-äquiaffinen Tangentenbildes $\boldsymbol{z}(s) = \boldsymbol{y}'(s)$ auf $\boldsymbol{o}$ fällt, so hat $y(s)$ mindestens 6 Extrema der zentro-äquiaffinen Krümmung.

Dass man in jedem Oval das Zentrum auf genau eine Weise so wählen kann, folgt, wie schon in [2] gesagt, aus der von SANTALÓ [6] gelösten Minimumaufgabe (s. auch [3]). In Satz 1 ist Konvexität nicht verlangt. Dementsprechend kann man Satz 2 auch für Kurven formulieren, deren Tangenten sich in stets derselben Weise drehen und $\boldsymbol{o}$ nicht treffen, die aber Doppelpunkte und Spitzen haben können.

In einem Oval gibt es i.allg. noch weitere Punkte, für die man 6 Extrema der zentro-äquiaffinen Krümmung erhält, z.B. den Mittelpunkt der grössten einbeschriebenen Ellipse. Hier kann man ohne Bezug auf den Satz von den sextaktischen Punkten mittels einer Methode von MUKHOPADHYAYA [4] hyperoskulierende Zentralkegelschnitte finden, die den Extrema entsprechen.

E. HEIL, TH Darmstadt

LITERATURVERZEICHNIS

[1] W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie II. Affine Differentialgeometrie* (Berlin 1923).
[2] H. GUGGENHEIMER, Aufgabe 493, El. Math. *21*, 17–18 (1966); Bemerkung zur Aufgabe 493, El. Math. *24*, 17 (1969).
[3] E. HEIL, *Abschätzungen für einige Affininvarianten konvexer Kurven*, Monatsh. Math. *71*, 405–423 (1966).
[4] S. MUKHOPADHYAYA, *Sur les nouvelles méthodes de géométrie*, C. R. Séances Soc. Math. Franc. *1933*, 41–45.
[5] E. SALKOWSKI, *Affine Differentialgeometrie* (Berlin 1934).
[6] L. A. SANTALÓ, *Un invariante afín para las curvas convexas del plano*, Mathematicae Notae *8*, 103–111 (1948).

Über eine spezielle Differenzengleichung

Vorgelegt sei die Differenzengleichung k-ter Ordnung

$$u(n+k) = \frac{1}{k}\left[u(n+k-1) + u(n+k-2) + \cdots + u(n)\right] \tag{1}$$

mit den Anfangswerten $u(0) = u_0, \ldots, u(k-1) = u_{k-1}$.

Für das asymptotische Verhalten der Lösungen von (1) gilt

Satz: Es existiert $\lim\limits_{n\to\infty} u(n)$ für beliebige Anfangswerte und

$$\lim_{n\to\infty} u(n) = \frac{u_0 + 2u_1 + 3u_2 + \cdots + k\,u_{k-1}}{1 + 2 + 3 + \cdots + k}$$

d.h. $\lim u(n)$ ist ein gewogenes arithmetisches Mittel der Anfangswerte.

Die charakteristische Gleichung von (1) ist

$$q^k = \frac{1}{k}\left(q^{k-1} + \cdots + q + 1\right) \tag{2}$$

oder

$$f(q) = q^k - \frac{1}{k}\left(q^{k-1} + \cdots + 1\right) = 0\,. \tag{3}$$

Es wird gezeigt:

a) $f(q)$ nimmt auf dem Einheitskreis nur für $q = 1$ den Wert 0 an.

b) Mit Ausnahme von $q = 1$ liegen alle Nullstellen von $f(q)$ innerhalb des Einheitskreises.

c) $f(q)$ hat keine mehrfachen Nullstellen.

Zu a). Setzt man auf beiden Seiten von (2) Betragstriche, so folgt aus $|q| = 1$, $q = 1$.

Zu b)

$$\frac{f(q)}{q-1} = \frac{1}{k}\left[k\,q^{k-1} + (k-1)\,q^{k-2} + \cdots + 2\,q + 1\right] \tag{4}$$

$$\frac{f(q)}{q-1} = \frac{d}{dq}\,\frac{1}{k}\,(q^k + q^{k-1} + \cdots + q)$$

Da die Nullstellen der Ableitung $p'(q)$ eines Polynoms $p(q)$ im Inneren jeder konvexen Kurve liegen, innerhalb welcher auch die Nullstellen von $p(q)$ liegen, ergibt sich zusammen mit a), dass $f(q)/(q-1)$ nur Wurzeln innerhalb des Einheitskreises hat.

Zu c). Setzt man $h(q) := k\,q^k\,(q-1) - (q^k - 1)$ so ist $h(q) = k\,(q-1)\,f(q)$.

Aus den höheren Ableitungen von $h(q)$ erkennt man, dass $h(q)$ eine einzige Mehrfachwurzel besitzt, und zwar die Doppelwurzel $q = 1$. $f(q) = h(q)/k\,(q-1)$ hat demnach nur Nullstellen erster Ordnung.

Aus a), b), c) folgt, dass die Lösung von (1), die zu den Anfangswerten $u_0 = \ldots = u_{k-1} = 0$ gehört, stabil, jedoch nicht attraktiv ist [1].

Die Nullstellen von $f(q)$ seien $x_1, x_2, \ldots, x_k$ mit $x_1 = 1$. Da sämtliche Nullstellen wegen c) voneinander verschieden sind, folgt für $u(n)$ die Darstellung

$$u(n) = a_1\,x_1^n + \cdots + a_k\,x_k^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Wegen a) und b) ist $\lim\limits_{n\to\infty} u(n) = a_1$.

Die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_k$ hängen mit den Anfangswerten durch das folgende lineare Gleichungssystem zusammen

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \ldots & x_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_k \end{pmatrix}$$

Die Determinante des Systems, eine Vandermondesche Determinante, werde mit $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ bezeichnet. Wegen

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (x_k - x_{k-1}) \ldots (x_j - x_i) \ldots (x_2 - x_1), \quad j > i$$

und $x_i \neq x_j$ ist $\Delta \neq 0$, das System somit eindeutig lösbar.

$$a_1 = \frac{Z}{\Delta(x_1, \ldots, x_k)}, \qquad Z := \begin{vmatrix} u_0 & 1 & \ldots & 1 \\ u_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ u_{k-1} & x_2^{k-1} & \ldots & x_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

Definiert man

$$\Delta_r^* := \begin{vmatrix} x_2^0 & \dots & x_k^0 \\ x_2^1 & \dots & x_k^1 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ x_2^{r-1} & \dots & x_k^{r-1} \\ x_2^{r+1} & \dots & x_k^{r+1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ x_2^{k-1} & \dots & x_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

so gibt die Entwicklung von Z nach der ersten Spalte $Z = \sum_{r=0}^{k-1} u_r\,(-1)^r\,\Delta_r^*$.

Für Δ_r^* gilt $\Delta_r^* = S_{k-r-1}(x_2, x_3, \dots, x_k)\,\Delta(x_2, \dots, x_k)$
mit $S_m(x_2, \dots, x_k) = x_2 x_3 \dots x_{m+1} + \dots + x_{k-m+1} \dots x_{k-1} x_k$ als elementarsymmetrischer Funktion m-ter Ordnung von $x_2, \dots, x_k$ [2]. Somit gilt

$$Z = \sum_{r=0}^{k-1} u_r\,(-1)^r\,S_{k-r-1}(x_2, \dots, x_k)\,\Delta(x_2, \dots, x_k)\,. \tag{5}$$

Die Nennerdeterminante von a_1 ergibt sich aus (5) für die speziellen Werte $u_0 = u_1 = \dots = u_{k-1} = 1$.

$$\Delta(x_1 = 1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r\,S_{k-1-r}(x_2, \dots, x_k)\,\Delta(x_2, \dots, x_k)\,.$$

Man erhält

$$a_1 = \frac{\sum_{r=0}^{k-1} u_r\,(-1)^r\,S_{k-1-r}(x_2, \dots, x_k)}{\sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r\,S_{k-1-r}(x_2, \dots, x_k)}\,.$$

Der Vergleich von (4) mit

$$\frac{f(q)}{q-1} = (q - x_2) \dots (q - x_k) = \sum_{r=0}^{k-1} q^r\,(-1)^{k-r}\,S_{k-1-r}(x_2, \dots, x_k)$$

führt schliesslich zu

$$a_1 = \frac{u_0 + 2\,u_1 + 3\,u_2 + \dots + k\,u_{k-1}}{1 + 2 + \dots + k}\,.$$

Eine Untersuchung der Gleichung (1) findet man auch bei MARKOFF [3]. – Die Methode, nach der der Grenzwert in der vorliegenden Mitteilung hergeleitet wurde, lässt sich unmittelbar auf Differenzengleichungen übertragen, deren charakteristisches Polynom den Bedingungen a), b), c) genügt.

H. WIMMER, TH Graz

LITERATURVERZEICHNIS

[1] W. HAHN, *Stability of Motion* (Berlin, Heidelberg und New York 1967).
[2] F. NEISS, *Determinanten und Matrizen*, 5. Auflage (Berlin, Göttingen und Heidelberg 1959), S. 40.
[3] A. A. MARKOFF, *Differenzenrechnung* (Leipzig 1896).