ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band 25 Heft 2 Seiten 25-48 10. März 1970

Zentralaffine Kennzeichnung des Jordanschen Inhaltes

Die Klasse K_n der im Jordanschen Sinne messbaren Punktmengen des n-dimensionalen euklidischen Raumes E_n hat bekanntlich die Eindeutigkeitseigenschaft im Sinne der axiomatischen Inhaltstheorie. Dies besagt, dass eine über K_n definierte reellwertige Funktion Φ, die translationsinvariant, additiv und nichtnegativ-definit ist, im wesentlichen, das heisst bis auf eine multiplikative Konstante, mit dem Jordanschen Inhalt J zusammenfallen muss. Die Inhaltsfunktion J ist demnach durch die drei erwähnten Eigenschaften über der Klasse K_n eindeutig festgelegt. – Ziel des ersten Teils der vorliegenden Note ist es, eine weitere derartige Charakterisierung des Jordanschen Inhalts auf elementare Weise zu begründen, wobei an die Stelle der Translationsinvarianz die Forderung tritt, dass die über K_n definierte Funktion Φ bezüglich der Gruppe G_n der zentralaffinen volumtreuen Abbildungen des E_n auf sich invariant ausfällt. Neu hinzuzufügen ist die Bedingung, dass Φ über den Nullmengen von K_n verschwindet. – Im zweiten Teil skizzieren wir einfache Zugänge zu bekannten Sätzen der Geometrie der Zahlen, die sich aufgrund der nun zur Verfügung stehenden axiomatischen Kennzeichnung des Inhaltes J anbieten. Die in Betracht gezogenen Funktionen Φ über K_n erscheinen als Mittelwerte, die sich über die unimodulare Gruppe G_n erstrecken. Hierbei werden allerdings Existenz und die üblichen Mittelwertseigenschaften als gesichert unterstellt.

1. Es sei $n \geqslant 2$ (ganz) vorausgesetzt und E_n bezeichne den n-dimensionalen euklidischen Raum mit dem Ursprung $z \in E_n$. Weiter soll G_n die Gruppe der zentralaffinen unimodularen Abbildungen γ: $E_n \to E_n$, welche den Ursprung z festlassen, anzeigen. Für eine Punktmenge $A \subset E_n$ und eine Abbildung $\gamma \in G_n$ soll γA das Bild von A bezeichnen. Weiter bedeute nun K_n die Klasse der im Jordanschen Sinn messbaren Punktmengen $A \subset E_n$ vom Inhalt $J(A)$ und $K_n^0 \subset K_n$ sei die Teilklasse der Jordanschen Nullmengen, für die also $J(A) = 0$ ist.

Sei nun Φ: $K_n \to \mathbb{R}$ eine reellwertige über K_n definierte Funktion. Für uns sind die nachfolgenden vier Eigenschaften, die einer solchen Funktion zukommen können, von besonderer Bedeutung:

$$A \in K_n\,, \ \gamma \in G_n \Rightarrow \Phi(\gamma A) = \Phi(A); \tag{1}$$

$$A, B \in K_n\,, \ A \cap B = \phi \Rightarrow \Phi(A \cup B) = \Phi(A) + \Phi(B); \tag{2}$$

$$A \in K_n \Rightarrow \Phi(A) \geqq 0; \tag{3}$$

$$A \in K_n^0 \Rightarrow \Phi(A) = 0\,. \tag{4}$$

Diese besagen, dass die Funktion Φ G-invariant, additiv, definit und nulltreu ist. – Es gilt nun der folgende

Satz. *Genügt die über K_n definierte Funktion Φ den vier Bedingungen (1) bis (4), so gibt es eine reelle Konstante $c \geqslant 0$ derart, dass $\Phi(A) = c\,J(A)$ gilt.*

Der Jordansche Inhalt J ist also im wesentlichen durch die Eigenschaften charakterisiert, über K_n definiert und dort zentralaffin-unimodular invariant, additiv, nichtnegativ-definit und nulltreu zu sein. – Es ist noch zu beachten, dass unser Satz im Falle $n = 1$, der nach Voraussetzung nicht zugelassen ist, tatsächlich falsch wird. In der Tat: Identifizieren wir den E_1 mit einer Koordinatenachse (x-Achse) und wird für $A \in K_1$ der Riemannsche Integralansatz $\Phi(A) = \int^{A} |x|\, dx$ gemacht, so werden die Forderungen (1) bis (4) erfüllt, doch gilt die Satzaussage offensichtlich nicht.

Wenden wir uns nun dem Beweis des Satzes zu: $S_n \subset K_n$ bezeichne die Klasse der Simplizes $U \subset E_n$ mit einem Eckpunkt im Ursprung z, der $(n-1)$-dimensionalen Gegenseite U' und dem Inhalt $J(U) = u$. Nun sind zwei volumgleiche Simplizes bezüglich der Gruppe G_n äquivalent, so dass mit $U, V \in S_n$ und $u = v$ die Existenz einer Abbildung $\gamma \in G_n$ folgt, für die $V = \gamma\, U$ gilt. Hieraus resultiert mit (1), dass $\Phi(U)$ lediglich eine Funktion des Inhalts u von U sein kann, so dass $\Phi(U) = f(u)$ für alle $U \in S_n$ gilt. Wir wählen nun willkürlich $u, v, w \in R^+$, $w = u + v$ und eine Ebene $T \subset E_n$, die den Ursprung z nicht enthält. Es gibt dann drei Simplizes $U, V, W \in S_n$, $w = u + v$, deren Gegenseiten zu z in der festen Trägerebene T liegen, so dass also $U', V', W' \subset T$ und zudem $U' \cap V' = \phi$ gilt. Für die $(n-1)$-dimensionalen Inhalte in T gilt offenbar $w' = u' + v'$. Nun gibt es nach einem Satz von Süss [1] zur Zerlegungstheorie euklidischer Polyeder Zerlegungen $W' = \bigcup_1^k P'_i$ und $U' \cup V' = \bigcup_1^k Q'_i$ in T im Sinne der Elementargeometrie in paarweise inhaltsgleiche Simplizes $P'_i, Q'_i \in S'_{n-1}$, so dass also $p'_i = q'_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ gilt. Dadurch werden Zerlegungen $W = \bigcup_1^k P_i$ und $U \cup V = \bigcup_1^k Q_i$ im E_n mit $P_i, Q_i \in S_n$ und $p_i = q_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ induziert. Da P_i mit Q_i bezüglich der Gruppe G_n äquivalent ist, ergibt sich, dass $\Phi(P_i) = \Phi(Q_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$ ausfällt. Mit passender Beanspruchung von (2) und (4) lässt sich jetzt $\Phi(W) = \Phi\,(U \cup V) = \Phi(U) + \Phi(V)$, oder weiter $f(w) = f\,(u + v) = f(u) + f(v)$ folgern. Wegen (3) ist $f(u) \geqslant 0$ und die soeben erzielte Funktionalgleichung hat lediglich die triviale Lösung $f(u) = c\,u$, wo c eine passende nichtnegative Konstante ist. Damit resultiert $\Phi(U) = c\,J(U)$ für alle $U \in S_n$. Hieraus kann man mit naheliegender elementargeometrischer Betrachtung auf $\Phi(P) = c\,J(P)$ schliessen, wo P ein beliebiges Polyeder im E_n bezeichnet. Mit (2) und (3) kann noch gefolgert werden, dass Φ monoton ist, so dass sich aufgrund der bekannten äusseren und inneren Approximierbarkeit einer Punktmenge $A \in K_n$ durch Polyeder schliesslich $\Phi(A) = c\,J(A)$ ergibt, was zu zeigen war.

II. Es sollen nun einige Beziehungen aufgezeigt werden, die zwischen dem im ersten Teil bewiesenen Satz und bekannten Sachverhalten der Geometrie der Zahlen bestehen. – Der Ursprung z sei Nullpunkt eines orthogonalen Koordinatensystems im Raum E_n und $L_n^0 \subset E_n$ bezeichne das orthonormierte und exzentrierte Punktgitter, d. h. die Menge der Punkte $p \in E_n$ mit ganzzahligen Koordinaten, die vom Nullpunkt z verschieden sind.

Für $A \in K_n$ soll $N^0(A) = \operatorname{card}(A \cap L_n^0)$ sein, also die Zahl der von A bedeckten nichttrivialen (von z verschiedenen) Gitterpunkte anzeigen. Setzen wir voraus, dass für die über der unimodularen Gruppe G_n durch $N^0(\gamma\, A)$ definierte Funktion ein invarianter Mittelwert $\Phi(A) = \overline{N^0}(\gamma\, A)$ existiert, und dass dieser die üblichen Mittelwertseigenschaften aufweist, so erfüllt Φ die Forderungen (1) bis (4) unseres Satzes, und es resultiert $\Phi(A) = c\, J(A)$. Mit naheliegender Grenzbetrachtung schliesst man auf $c = 1$, so dass also $\overline{N^0}(\gamma A) = J(A)$ wird. Als einfache Folgerung ergibt sich die

Aussage A. (E. HLAWKA [2], Satz 2). *Ist $A \subset E_n$ eine im Jordanschen Sinn messbare Punktmenge mit dem Inhalt $J(A) < k$, k eine natürliche Zahl, so existiert eine zentralaffine unimodulare Abbildung $\gamma \in G_n$ so, dass $N^0(\gamma A) \leqslant k - 1$ ausfällt.*

Diese Aussage stellt ein Analogon zu dem bekannten Blichfeldt-Scherrerschen Theorem dar, das sich in einem völlig analogen Rahmen auf die Translationsgruppe bezieht. Vgl. hierzu SCHERRER [3] sowie BLICHFELDT [4].

Sei nun weiter $L_n^{00} \subset L_n^0$ die Menge der nichttrivialen primitiven Gitterpunkte, also derjenigen $p \in L_n^0$, für die $(z\, p) \cap L_n^0 = \phi$ ist, wenn $(z\, p)$ das relative «Innere» der Verbindungsstrecke von z und p bedeutet. Ferner sei $A \in K_n$ sternförmig, so dass mit $q \in A$ stets $(z\, q) \subset A$ gilt, und es bezeichne jetzt analog wie oben $N^{00}(A) = \operatorname{card}(A \cap L_n^{00})$. Mit dem als existierend vorausgesetzten Mittelwert $\Phi(A) = \overline{N^{00}}(\gamma A)$, der wieder die Eigenschaften (1) bis (4) aufweist, lässt sich in gleicher Weise auf $\overline{N^{00}}(\gamma A) = c\, J(A)$ schliessen. Die Grenzbetrachtung liefert hier $c = 1/\zeta(n)$, wobei $\zeta(n) = \sum_1^\infty k^{-n}$ den angeschriebenen Riemannschen Zetawert bezeichnet. Die Konstante c ist deutbar als asymptotische Dichte der Menge L_n^{00} im E_n. Zusammengefasst ergibt sich $\overline{N^{00}}(\gamma A) = J(A)/\zeta(n)$ und es folgt die

Aussage B. (E. HLAWKA [2], Satz 3). *Ist $A \subset E_n$ eine bezüglich des Ursprungs z sternförmige und im Jordanschen Sinn messbare Punktmenge vom Inhalt $J(A) < \zeta(n)$, so existiert eine zentralaffine unimodulare Abbildung $\gamma \in G_n$ so, dass $N^0(\gamma A) = 0$ ist.*

Es handelt sich offensichtlich um eine Verschärfung von Aussage A im Falle $k = 1$. Dieses mit Aussage B wiedergegebene Minkowski-Hlawkasche Theorem stellt ein charakteristisches Kernstück der Geometrie der Zahlen dar. Seine Gültigkeit wurde vom erstgenannten Klassiker vermutet und vom nachfolgend zitierten Autor erstmals nachgewiesen.

Die bei unserer einfachen Betrachtung unterstellte Existenz der zuständigen invarianten Mittelwerte ist im analog elementaren Rahmen kaum begründbar. Einen strengen Existenznachweis für derartige sich auf Gitter beziehende Mittelwerte wurde in einem allgemeineren Rahmen von SIEGEL [5] gegeben, der auf diesem Wege einen eleganten neuen Beweis des Hlawkaschen Satzes erzielte. Weitere Existenzbeweise implizieren die Ansätze der affinen Integralgeometrie. Als Testergebnis dieser Theorie wird das Minkowski-Hlawkasche Theorem auch von L. A. SANTALÓ [6] gewonnen.

HUGO HADWIGER, Bern

LITERATURVERZEICHNIS

[1] W. SÜSS, *Über das Inhaltsmass bei mehrdimensionalen Polyedern*, The Tohoku Math. J. *38*, 252–261 (1933).
[2] E. HLAWKA, *Zur Geometrie der Zahlen*, Math. Z. *49*, 285–312 (1944).
[3] W. SCHERRER, *Ein Satz über Gitter und Volumen*, Math. Ann. *86*, 99–107 (1922).
[4] H. F. BLICHFELDT, *A New Principle in the Geometry of Numbers with Some Applications*, Trans. Amer. Math. Soc. *15*, 227–235 (1914).
[5] C. L. SIEGEL, *A Mean Value Theorem in the Geometry of Numbers*, Ann. Math. *46*, 340–347 (1945).
[6] L. A. SANTALÓ, *Introduction to Integral Geometry*, Act. Sci. Ind. *1198* (Hermann + Cie Ed., Paris 1953).