

## Werk

**Titel:** Die Realteil- und Imaginärteilflächen analytischer Funktionen.

**Autor:** Kreyszig, Erwin

**Jahr:** 1969

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199\\_0024|log13](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199_0024|log13)

## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

---

El. Math.

Band 24

Heft 2

Seiten 25–48

10. März 1969

---

## Die Realteil- und Imaginärteilträchen analytischer Funktionen

### 1. Einleitung

Einer komplexen Funktion

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \quad (z = x + i y) \quad (1.1)$$

kann man verschiedenartige reelle oder komplexe Flächen zuordnen. Bekannt und eingehend untersucht sind z. B. die Betragflächen [2, 6, 7, 9, 10]. In der vorliegenden Arbeit nehmen wir an,  $f(z)$  sei analytisch, und ordnen  $f(z)$  die *Realteilfläche*  $R(f)$ , definiert durch

$$\mathbf{x}(x, y) = (x, y, u(x, y)) , \quad (1.2)$$

und die *Imaginärteilträche*  $I(f)$ , definiert durch

$$\mathbf{x}(x, y) = (x, y, v(x, y)) , \quad (1.3)$$

zu.

In Abschnitt 3 und 4 beweisen wir, dass beide Flächen in einem beliebigen Punkt jeweils dieselbe Gaußsche Krümmung haben, dass aber diese identische Abbildung für nichtkonstantes  $f$  nicht isometrisch ist. Die Frage nach der Existenz isometrischer Abbildungen führt auf das komplizierte System (4.3) bzw. (5.4). In einzelnen Fällen (u. a.  $e^z$ ,  $z^n$ ) sieht man sofort, dass  $R(f)$  und  $I(f)$  isometrisch sind. In anderen Fällen (z. B.  $\ln z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ) besteht keine Isometrie, wie gezeigt wird. Wie man Aussagen aus den genannten Systemen in systematischer Weise gewinnt, wird in den letzten beiden Abschnitten erörtert.

Interessanterweise fügt sich WANGERINS klassisches Beispiel [8], das von Überlegungen bei Drehflächen herröhrt, auch in unsere funktionentheoretisch motivierte Untersuchung ein.

Meinen Mitarbeitern, Herrn Doz. Dr. H. KNAPP und Herrn Dr. K. ECKER, danke ich für Diskussionsbemerkungen im Rahmen unseres differentialgeometrischen Seminars.

### 2. Hilfsformeln

Die Darstellungen (1.2) und (1.3) haben die Form

$$\mathbf{x}(x, y) = (x, y, h(x, y)) .$$

Für eine solche Darstellung hat die erste Grundform die Koeffizienten

$$g_{11} = 1 + h_x^2, \quad g_{12} = h_x h_y, \quad g_{22} = 1 + h_y^2, \quad (2.1)$$

also die Diskriminante

$$g = 1 + h_x^2 + h_y^2. \quad (2.2)$$

Die zweite Grundform hat die Koeffizienten

$$b_{11} = h_{xx}/\sqrt{g}, \quad b_{12} = h_{xy}/\sqrt{g}, \quad b_{22} = h_{yy}/\sqrt{g}, \quad (2.3)$$

also die Diskriminante

$$b = R_{1212} = \frac{1}{g} (h_{xx} h_{yy} - h_{xy}^2). \quad (2.4)$$

Dabei ist  $R_{abcd}$  der kovariante Krümmungstensor. So erhalten wir die Gaußsche Krümmung

$$K = \frac{b}{g} = \frac{1}{g^2} (h_{xx} h_{yy} - h_{xy}^2). \quad (2.5)$$

### 3. Gaußsche Krümmung

Für die Realteilfläche  $R(f)$  folgt aus (1.2), (2.1) und den Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$g_{11} = 1 + (\operatorname{Re} f')^2, \quad g_{12} = -\operatorname{Re} f' \operatorname{Im} f', \quad g_{22} = 1 + (\operatorname{Im} f')^2, \quad (3.1)$$

wobei der Strich die Ableitung nach  $z$  bedeutet. So wird

$$g = 1 + |f'|^2. \quad (3.2)$$

Die zweite Grundform hat die Koeffizienten

$$b_{11} = u_{xx}/\sqrt{g}, \quad b_{12} = u_{xy}/\sqrt{g}, \quad b_{22} = u_{yy}/\sqrt{g}, \quad (3.3)$$

also wegen  $\Delta u = 0$  und (3.2) die Diskriminante

$$b = -\frac{|f''|^2}{1 + |f'|^2}. \quad (3.4)$$

Aus (2.5) erhalten wir die Gaußsche Krümmung

$$K(z) = -\frac{|f''|^2}{(1 + |f'|^2)^2}. \quad (3.5)$$

Wie wir aus (3.5) sehen, haben  $f(z)$  und

$$f_1(z) = e^{i\gamma} f(z) + c \quad (\gamma \text{ reell})$$

dieselbe Gaußsche Krümmung. Für  $\gamma = -\pi/2$  und  $c = 0$  liefert dies den

**Satz 3.1.** *Die Realteilfläche  $R(f)$  und die Imaginärteilefläche  $I(f)$  einer analytischen Funktion  $f(z)$  haben in entsprechenden Punkten dieselbe Gaußsche Krümmung.*

Aus (3.5) und Satz 3.1 folgt ferner:

*$R(f)$  und  $I(f)$  sind mit Ausnahme der Punkte, in denen  $f''(z) = 0$  ist, hyperbolisch gekrümmt.*

#### 4. Isometriebedingung

Der Satz 3.1 legt es nahe, der Frage der Isometrie von  $R(f)$  und  $I(f)$  nachzugehen. Bekanntlich gilt allgemein der

**Satz 4.1.** a) Ist eine Abbildung  $A: F \rightarrow F^*$  isometrisch, so stimmt die Gaußsche Krümmung in einem Punkt  $P \in F$  und in seinem Bild  $P^* = A P \in F^*$  überein. b) Haben zwei Flächen dieselbe konstante Gaußsche Krümmung, so sind sie (lokal) isometrisch.

Aus (3.5) und Satz 4.1b folgt im vorliegenden Fall sofort das triviale Ergebnis, dass für die lineare Funktion  $f(z) = a z + k$  die Flächen  $R(f)$  und  $I(f)$  isometrisch sind.

Der Abbildungen wegen, die wir betrachten wollen, setzen wir  $z^* = x^* + i y^*$  und schreiben (1.3) in der Form

$$x^*(x^*, y^*) = (x^*, y^*, v(x^*, y^*)) . \quad (4.1)$$

Es gilt dann der folgende

**Satz 4.2. Eine Abbildung**

$$x^* = \alpha(x, y), \quad y^* = \beta(x, y) \quad (4.2)$$

der Realteilfläche  $R(f)$  einer analytischen Funktion  $f(z)$ ,  $z = x + i y$ , auf die Imaginärteilefläche  $I(f)$  [vgl. (4.1)] dieser Funktion ist genau dann isometrisch, wenn

$$\left. \begin{array}{l} \text{a)} \quad 1 + u_x^2 = (1 + u_{y^*}^2) \alpha_x^2 - 2 u_{x^*} u_{y^*} \alpha_x \beta_x + (1 + u_{x^*}^2) \beta_x^2, \\ \text{b)} \quad u_x u_y = (1 + u_{y^*}^2) \alpha_x \alpha_y - u_{x^*} u_{y^*} (\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x) + (1 + u_{x^*}^2) \beta_x \beta_y, \\ \text{c)} \quad 1 + u_y^2 = (1 + u_{y^*}^2) \alpha_y^2 - 2 u_{x^*} u_{y^*} \alpha_y \beta_y + (1 + u_{x^*}^2) \beta_y^2 \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

gilt. Hierbei bedeuten Indizes partielle Ableitungen nach den betreffenden Variablen; die partiellen Ableitungen auf der linken Seite und von  $\alpha$  und  $\beta$  sind an der Stelle  $(x, y)$  zu nehmen, die übrigen an der Stelle  $(x^*, y^*)$ .

*Beweis.* Die Abbildung (4.2) ist genau dann isometrisch, wenn die zu (1.2) bzw. (4.1) gehörigen ersten Grundformen in entsprechenden Punkten übereinstimmen,  $ds^{*2} = ds^2$ . Hieraus folgt

$$g_{11} = g_{11}^* \alpha_x^2 + 2 g_{12}^* \alpha_x \beta_x + g_{22}^* \beta_x^2$$

usw. Dabei hat  $ds^{*2}$  die Koeffizienten

$$g_{11}^* = 1 + v_{x^*}^2, \quad g_{12}^* = v_{x^*} v_{y^*}, \quad g_{22}^* = 1 + v_{y^*}^2. \quad (4.4)$$

Mittels der Cauchy-Riemann-Gleichungen ersetzen wir Ableitungen von  $v(x^*, y^*)$  durch solche von  $u(x^*, y^*)$  und erhalten (4.3).

Wir vermerken noch folgendes: Aus (4.4) ergibt sich

$$g_{11}^* = 1 + (\operatorname{Im} f')^2, \quad g_{12}^* = \operatorname{Re} f' \operatorname{Im} f', \quad g_{22}^* = 1 + (\operatorname{Re} f')^2, \quad (4.5)$$

wobei der Strich die Ableitung nach  $z^*$  bezeichnet. Im Falle der Abbildung

$$x^* = x, \quad y^* = y \quad (4.6)$$

stimmt die Gaußsche Krümmung von  $R(f)$  und  $I(f)$  in entsprechenden Punkten überein (Satz 3.1). Aus (3.1) und (4.5) folgt dann

$$g_{11}^* = g_{22}, \quad g_{12}^* = -g_{12}, \quad g_{22}^* = g_{11}, \quad (4.7)$$

und wir sehen, dass (4.6) für nichtkonstantes  $f(z)$  keine isometrische Abbildung ist. Dies kann man auch mittels (4.3) und der Cauchy-Riemann-Gleichungen bestätigen.

### 5. Spezielle Ansätze

Unsere einfache Überlegung im Zusammenhang mit (4.6) zeigt, dass *eine* Methode, Aussagen aus (4.3) zu gewinnen, darin besteht, die Abbildungsfunktionen (4.2) in spezieller Weise anzusetzen und dann  $u(x, y)$  und damit  $f(z)$  zu bestimmen. Wir wollen dies für zwei weitere Fälle erläutern.

Bei einer Translation

$$x^* = x, \quad y^* = y + k \quad (5.1)$$

erhalten wir aus (4.3) zunächst

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \pm u_y(x, y + k), \\ u_x(x, y) u_y(x, y) &= -u_x(x, y + k) u_y(x, y + k), \\ u_y(x, y) &= \mp u_x(x, y + k). \end{aligned}$$

Der Produktansatz  $u(x, y) = F(x) G(y)$  liefert beim Einsetzen

$$F'(x) G(y) = \pm F(x) G'(y + k)$$

usw. Separation und Integration ergibt  $F = e^{cx}$ . Das zugehörige  $G(y)$  bestimmt man am einfachsten aus  $\Delta u = 0$ . So erhalten wir insgesamt das *Ergebnis*:

*Bei  $f(z) = e^{cz}$ ,  $c$  reell, sind  $R(f)$  und  $I(f)$  isometrisch, sogar kongruent, und können durch die Translation (5.1) mit  $k = \pi/2c$  ineinander übergeführt werden.*

Um die Rotation in ähnlicher Weise behandeln zu können, gehen wir zu Polarkoordinaten  $r, \phi$  und  $r^*, \phi^*$  über, die durch

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad x^* = r^* \cos \phi^*, \quad y^* = r^* \sin \phi^*$$

definiert sind. Wir schreiben einfach

$$f(z) = u(r, \phi) + i v(r, \phi). \quad (5.2)$$

Wie Satz 4.2 ergibt sich der

**Satz 5.1. Eine Abbildung**

$$r^* = \gamma(r, \phi), \quad \phi^* = \omega(r, \phi) \quad (5.3)$$

der Realteilfläche  $R(f)$  einer analytischen Funktion (5.2) auf die Imaginärteilefläche  $I(f)$  dieser Funktion ist genau dann isometrisch, wenn

- |   |                               |
|---|-------------------------------|
| a) $1 + u_r^2 = (1 + r^{*-2} u_{\phi^*}^2) \gamma_r^2 - 2 u_{r*} u_{\phi^*} \gamma_r \omega_r + r^{*2} (1 + u_{r*}^2) \omega_r^2,$<br>b) $u_r u_\phi = (1 + r^{*-2} u_{\phi^*}^2) \gamma_r \gamma_\phi - u_{r*} u_{\phi^*} (\gamma_r \omega_\phi + \gamma_\phi \omega_r)$<br>$\qquad \qquad \qquad + r^{*2} (1 + u_{r*}^2) \omega_r \omega_\phi,$<br>c) $r^2 + u_\phi^2 = (1 + r^{*-2} u_{\phi^*}^2) \gamma_\phi^2 - 2 u_{r*} u_{\phi^*} \gamma_\phi \omega_\phi + r^{*2} (1 + u_{r*}^2) \omega_\phi^2$ | $\left. \right\} \quad (5.4)$ |
|---|-------------------------------|

gilt, wobei Indizes partielle Ableitungen bedeuten. Die partiellen Ableitungen auf der linken Seite und von  $\gamma$  und  $\omega$  sind an der Stelle  $(r, \phi)$  zu nehmen und die übrigen an der Stelle  $(r^*, \phi^*)$ .

Im Falle einer Rotation

$$r^* = r, \quad \phi^* = \phi + \delta \quad (5.5)$$

folgt aus (5.4)

$$\begin{aligned} u_r(r, \phi) &= \pm r^{-1} u_\phi(r, \phi + \delta), \\ u_r(r, \phi) u_\phi(r, \phi) &= -u_r(r, \phi + \delta) u_\phi(r, \phi + \delta), \\ u_\phi(r, \phi) &= \mp r u_r(r, \phi + \delta). \end{aligned}$$

Der Produktansatz  $u(r, \phi) = R(r) \Phi(\phi)$  ergibt

$$\begin{aligned} R'(r) \Phi(\phi) &= \pm r^{-1} R(r) \Phi'(\phi + \delta), \\ \Phi(\phi) \Phi'(\phi) &= -\Phi(\phi + \delta) \Phi'(\phi + \delta), \\ R(r) \Phi'(\phi) &= \mp r R'(r) \Phi(\phi + \delta). \end{aligned}$$

Separation und Integration führt auf  $R = r^c$ , und  $\Phi$  bestimmt man am einfachsten vermöge  $\Delta u = 0$ . Weiter folgt

$$\Phi(\phi + \delta) = -\Phi(\phi - \delta).$$

So erhalten wir das *Ergebnis*:

*Bei  $f(z) = z^c$ ,  $c$  reell, sind  $R(f)$  und  $I(f)$  isometrisch, sogar kongruent, und können durch die Rotation (5.5) mit  $\delta = \pi/2 c$  ineinander übergeführt werden.*

Dasselbe gilt auch für  $k z^c$ . Weiterhin hat man die folgenden Transformationen, bei denen die Isometrie erhalten bleibt: Translationen und Rotationen in der  $z$ -Ebene, Addition einer Konstanten zu  $f(z)$ . Hieraus folgt:

*Für  $f(z) = a z^2 + b z + c$  sind  $R(f)$  und  $I(f)$  isometrisch.*

## 6. Zwei weitere Methoden

Notwendige Bedingungen für Isometrie sind die Gleichheit von  $K$ , von  $\nabla K$  und von  $\Delta K$  in entsprechenden Punkten. Um festzustellen, ob für eine bestimmte Funktion  $f(z)$  Isometrie von  $R(f)$  und  $I(f)$  vorliegt, bieten sich die folgenden beiden Wege an, die wir gemischte bzw. Minding-Methode nennen wollen.

I. *Gemischte Methode*: Man benutzt Satz 4.1a, um (4.2) gewisse Bedingungen aufzuerlegen, und geht dann in (4.3) ein.

II. *Mindings Methode* [3]: Man benutzt die obigen notwendigen Bedingungen allein, also (4.3) überhaupt nicht, und sieht zu, ob man daraus Bedingungen oder Widersprüche bezüglich der gesuchten Abbildungsfunktionen erhält.

Wichtig ist in beiden Fällen die Annahme, dass die betrachteten Flächen durch ganz bestimmte Darstellungen gegeben sind. Die Methoden sind nicht verwendbar, wenn wir  $f(z)$  noch ganz beliebig lassen, also Klassen von Flächen betrachten. Selbst wenn man sich auf ein Paar ganz bestimmter Flächen beschränkt, hat man im allgemeinen mit erheblichen Schwierigkeiten zu rechnen. Deshalb wurde frühzeitig versucht, wenigstens für Drehflächen unter Benutzung der Symmetrie praktische Resultate zu erzielen; vgl. P. STÄCKEL [5]. Durch diese Arbeit angeregt, hat dann A. WANGERIN [8] sein bekanntes Beispiel angegeben, das zeigt, dass Gleichheit der Gaußschen Krümmung nur notwendig, aber (im nichtkonstanten Fall) nicht hinreichend für Iso-

metrie ist. Interessanterweise ordnet sich dieses Beispiel in unsere gegenwärtigen von der Funktionentheorie bestimmten Untersuchungen ein, indem wir es folgendermaßen betrachten:

$f(z) = \ln z$  hat die Realteilfläche  $x = (x, y, \ln r)$  und die Imaginärteilefläche  $x^* = (x^*, y^*, \phi^*)$ . Hierbei ist  $z = r e^{i\phi}$  bzw.  $z^* = r^* e^{i\phi^*}$ . Für die Gaußsche Krümmung findet man

$$K = -\frac{1}{(1+r^2)^2} \quad \text{bzw.} \quad K^* = -\frac{1}{(1+r^{*2})^2}.$$

Aus  $K = K^*$  folgt  $r = r^*$ . In (5.4) ist wegen  $u = \ln r$  nun  $u_\phi = 0$ ,  $u_{\phi^*} = 0$  sowie  $\gamma_\varphi = 0$ , und (5.4b) gewinnt die einfache Form  $0 = (r^2 + 1)\omega_r \omega_{\phi^*}$ . Dann wäre aber  $\omega_r = 0$ , da anderenfalls die Funktionaldeterminante der Abbildung identisch verschwände. Aus (5.4a) folgte dann  $1 + 1/r^2 = 1$ , ein Widerspruch. Also lautet unser *Ergebnis*:

Bei  $f(z) = \ln z$  sind  $R(f)$  (Drehfläche der Logarithmuskurve) und  $I(f)$  (Schraubenfläche) nicht isometrisch.

Im vorliegenden Falle ist auch Mindings Methode brauchbar und liefert dasselbe Ergebnis: Aus  $K = K^*$  folgt  $r = r^*$ . Statt  $\nabla K$  betrachten wir einfacher

$$\nabla r^2 = g^{11} (2r)^2 = \nabla r^{*2} = g^{11*} (2r^*)^2.$$

Diese Gleichung ist wegen

$$g^{11} = \frac{r^2}{1+r^2}, \quad g^{11*} = 1, \quad r^* = r$$

unverträglich.  $R(f)$  und  $I(f)$  sind also nicht isometrisch.

$\ln z$  und  $e^z$  zusammen zeigen:

Aus der Isometrie oder Nichtisometrie von  $R(f)$  und  $I(f)$  folgt nicht die entsprechende Aussage für die Umkehrfunktion.

Übrigens ist  $K$  bei  $e^z$  ebenfalls so einfach, dass die Methoden I und II ohne Schwierigkeiten angewendet werden können. Man hat nämlich

$$K = -\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} \quad \text{und} \quad K^* = -\frac{e^{2x*}}{(1+e^{2x*})^2}.$$

$K = K^*$  ergibt  $x = x^*$ . Weiterhin wird

$$\nabla e^x = g^{11} e^{2x} = \frac{e^{2x} + e^{4x} \sin^2 y}{1+e^{2x}}$$

und wegen  $x = x^*$

$$\nabla e^{x*} = g^{11*} e^{2x*} = \frac{e^{2x} + e^{4x} \cos^2 y^*}{1+e^{2x}}.$$

So erhalten wir  $\sin y = \pm \cos y^*$ , also  $y^* = \mp \pi/2$ , in Übereinstimmung mit unserem vorigen Ergebnis.

Schwierig wird die Anwendung der Methoden, wenn  $K$  von beiden Variablen abhängt. Ein typisches Beispiel ist  $f(z) = \cos z$ . Hier hat  $R(f)$  die Gaußsche Krümmung

$$K = -\frac{\cosh^2 y - \sin^2 x}{(\cosh^2 y + \sin^2 x)^2}.$$

Unter Benutzung der Tatsache, dass eine isometrische Abbildung geodätisch sein muss, erhielt H.-W. PU [4] das *Ergebnis*:

Bei  $\cos z$  und  $\sin z$  sind die Realteil- und die Imaginärteilefläche nicht isometrisch.

ERWIN KREYSZIG, Universität Düsseldorf