Aufgaben

Aufgabe 541. Let I, O, H denote respectively the incenter, the circumcenter and the orthocenter of a triangle with sides a, b, c and the inradius r. Prove that the area K of the triangle IOH is given by

$$K = |(a-b)(b-c)(c-a)|/8r.$$

W. J. BLUNDON, Memorial Univ. of Newfoundland

1. Lösung: Die Ecken des Dreiecks seien bezüglich O durch die Vektoren z_i dargestellt. Dann gelten für H und I die Vektordarstellungen $H = \Sigma z_i$ und $I = (1/2s) \Sigma a_i z_i$, wobei a_i die Länge der Gegenseite der Ecke z_i, und $2s = \Sigma a_i$ ist. Demnach hat das Dreieck IOH den Flächeninhalt

$$K = \frac{1}{2} \left| \det \left(\Sigma z_i ; \frac{1}{2s} \Sigma a_i z_i \right) \right| = \frac{1}{4s} |\Sigma (a_{i+1} - a_i) \det (z_i ; z_{i+1})| .$$

Nun ist bekanntlich

$$\det (z_i ; z_{i+1}) = \frac{1}{8rs} a_{i+2}^2 (a_i^2 + a_{i+1}^2 - a_{i+2}^2) ,$$

folglich

$$K = \frac{1}{32 r s^2} |\Sigma (a_{i+1} - a_i) a_{i+2}^2 (a_i^2 + a_{i+1}^2 - a_{i+2}^2)|$$

$$= \frac{1}{32 r s^2} |\Pi (a_{i+1} - a_i) \cdot (\Sigma a_i)^2| = \frac{1}{8r} |\Pi (a_{i+1} - a_i)| , \quad \text{q.e.d.}$$

O. REUTTER, Ochsenhausen

2. Lösung: Nach R. TUCKER und T. C. SIMMONS, Sol. qu. 3733 Ed. Times *43*, 60 gilt, wenn R der Umkreisradius des ebenen Dreiecks mit Innenwinkeln ABC ist,

$$K = \left| 2R^2 \sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{C-A}{2} \right| .$$

Wegen $a - b = 2R (\sin A - \sin B) = 4R \sin((A-B)/2) \sin(C/2)$ (analog $b-c$ und $c-a$) ist die Behauptung von BLUNDON äquivalent mit

$$1 = K/K = (4R \sin(A/2) \sin(B/2) \sin(C/2)) r^{-1} .$$

Dies ist aber allgemein als richtig bekannt, q.e.d. I. PAASCHE, München

Weitere Lösungen sandten L. BANKOFF (Los Angeles, USA), L. CARLITZ (Durham USA), W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf), S. KLEVEN (Sfeinkjer, Norwegen), R. WHITEHEAD (Hayle, England).

Aufgabe 542. a) Trouver un exemple de trois nombres triangulaires distincts > 0, tels que la somme de deux quelconques d'eux est un nombre triangulaire.

b) Démontrer qu'il existe une infinité de tels triples de nombres triangulaires.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Solution: We have to solve the following system of Diophantine equations:

$$t_x + t_y = t_a , \quad t_x + t_z = t_b , \quad t_y + t_z = t_c .$$

If we put here $z = t_x - 1$, $b = t_x$ then the second equation is an identity. We put further

$$x = 2n^2 + n - 1 , \quad y = 2n^3 - n - 1 , \quad a = 2n^3 , \quad c = b + n^2 - n - 1 .$$

Then for $n > 1$, $x < y < z$, and a simple calculation shows that the system is satisfied. For $n = 2$ we get: $t_9 + t_{13} = t_{16}$, $t_9 + t_{44} = t_{45}$, $t_{13} + t_{44} = t_{46}$.

P. PIELORZ, Katowice, Poland