Aufgaben

Aufgabe 556. Es sei $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$, a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ eine p-te Einheitswurzel und p eine Primzahl. Man zeige, dass jede p-te Einheitswurzel gleich oft als Summand in der obigen Summe vorkommt. H. LÜNEBURG, Mainz

Lösung: Nach Voraussetzung ist jedes a_j eine der p Zahlen $\exp(2\pi i k/p) = e_k$ $(k = 0, \ldots, p-1)$, sodass wir schreiben können:

$$0 = \sum_{j=1}^{u} a_j = \sum_{k=0}^{p-1} n_k e_k \quad \text{mit} \quad \sum_{k=0}^{p-1} n_k = n\,, \tag{*}$$

wobei die n_k ganzrationale nichtnegative Zahlen sind. Bekanntlich genügt e_1 (sowie $e_2, \ldots, e_{p-1}$, falls $p > 2$) der über dem Integritätsbereich Γ der ganzrationalen Zahlen irreduziblen Gleichung $x^{p-1} + \cdots + 1 = 0$. Beachtet man $e_k = e_1^k$ $(k = 0, \ldots, p-1)$, so genügt ferner e_1 nach (*) der Gleichung $n_{p-1} x^{p-1} + \cdots + n_0 = 0$ und aus der Identität

$$n_{p-1} x^{p-1} + \cdots + n_0 - n_{p-1} (x^{p-1} + \cdots + 1) = (n_{p-2} - n_{p-1}) x^{p-2} + \cdots + (n_0 - n_{p-1})$$

folgt, dass e_1 auch der Gleichung $(n_{p-2} - n_{p-1}) x^{p-2} + \cdots + (n_0 - n_{p-1}) = 0$ genügen müsste, woraus mit Rücksicht auf den Grad der irreduziblen Gleichung für e_1 folgt: $n_{p-1} = n_{p-2} = \cdots = n_0$ bzw. $p\, n_0 = n$ q.e.d. P. BUNDSCHUH, Freiburg-Littenweiler

Weitere Lösungen sandten: A. BRANDIS (Universität Heidelberg), D. Ž. DJOKOVIĆ (University of Waterloo, Canada), J. FEHÉR (Pécs/Ungarn), W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf).

Aufgabe 557. a, b, n seien natürliche Zahlen. Man zeige die Existenz einer absoluten Konstanten C_1 mit folgender Eigenschaft: Ist $n!\,(a!\,b!)^{-1}$ eine ganze Zahl, so ist

$$a + b < n + C_1 \log n\,.$$

Diese Aussage ist scharf in folgendem Sinn: Es gibt eine absolute Konstante C_2, so dass die Forderungen $a + b > n + C_2 \log n$, $n!\,(a!\,b!)^{-1} =$ ganze Zahl für unendlich viele n erfüllbar sind. P. ERDÖS

Lösung des 1. Teils: Wir können ohne weiteres a oder b als $\geqslant 2$ voraussetzen. Wenden wir dann die bekannte Formel $m! = \prod_{p \leqslant m} p^{e_p}$, wobei $e_p = \sum_{k=1}^{\lambda_m} [m/p^k]$ und $\lambda_m = [\log m/\log p]$ ist, auf $n!$, $a!$ und $b!$ an, so erhalten wir aus der Bedingung der Ganzheit von $n!\,(a!\,b!)^{-1}$ die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{\lambda_n} [n\, p^{-k}] \geqslant \sum_{i=1}^{\lambda_a} [a\, p^{-i}] + \sum_{j=1}^{\lambda_b} [b\, p^{-j}]\,, \tag{1}$$

die für alle Primzahlen p mit $2 \leqslant p \leqslant \max(a, b)$ gelten muss. Aus (1) wird, wenn man links vergrössert und rechts verkleinert

$$n \sum_k p^{-k} > a \sum_i p^{-i} + b \sum_j p^{-j} - \frac{\log a\, b}{\log p}\,. \tag{2}$$

Setzt man $a + b = s$ und beachtet $4\,a\,b \leqslant s^2$, so wird aus (2)

$$n\,(1 - p^{-\lambda_n}) > s - (a\, p^{-\lambda_a} + b\, p^{-\lambda_b}) - 2\,\frac{p-1}{\log p}\,(\log s - \log 2)$$

und hieraus, gültig für alle p mit $2 \leqslant p \leqslant \max(a, b)$

$$n - 1 > s - 2\,p - 2\,\frac{p-1}{\log p}\,(\log s - \log 2)$$

und da dies jedenfalls für $p = 2$ gelten muss, folgt notwendig

$$n + 1 > s - \frac{2}{\log 2} \log s . \tag{3}$$

Nun sei C eine feste Konstante $> 2/\log 2$. Wir nehmen an, die Ungleichung $s \geqslant n + C \log n$ gälte für unendlich viele n. Für diese n folgt aus (3), dessen rechte Seite für $s \geqq 3$ monoton wächst,

$$1 + \frac{2}{\log 2} \log \left(1 + C \frac{\log n}{n}\right) > \left(C - \frac{2}{\log 2}\right) \log n ,$$

was für genügend grosse n unmöglich ist. P. Bundschuh, Freiburg-Littenweiler

Lösung des 2. Teils (nach Angaben des Aufgabenstellers): Wir zeigen folgendes schärfere Resultat: Es existiert eine absolute Konstante C, so dass mit $a = [C \log n]$ der Quotient $(2\,n)!\,[(n + a)!\,n!]^{-1}$ für «fast alle» n (d.h. mit Ausnahme einer Folge der Dichte Null) ganz ist. Es gilt also für fast alle n

$$\binom{2\,n}{n} \equiv 0 \;(\operatorname{mod} A(n, a)) , \qquad A(n, a) = \prod_{i=1}^{a} (n + i) . \tag{1}$$

Ist p eine Primzahl und

$$p^{v_p(n)} \,\Big\|\, \binom{2\,n}{n} , \qquad p^{u_p(n)} \,\|\, A(n, a)$$

so ist (1) äquivalent mit

$$u_p(n) \leqq v_p(n) . \tag{2}$$

Es sei x eine genügend grosse Zahl. Beim Beweis von (2) für die $n \leqq x$ können wir (endlich viele) Teilfolgen weglassen, wenn die Gliederanzahl je $o(x)$ ist.

1. $p > (\log x)^2$, also $p > a$. In $A(n, a)$ kann höchstens ein Faktor ein Multiplum von p sein. Aus $u_p(n) \geqq 2$ folgt also die Existenz eines i $(0 < i \leqq a)$ mit $n \equiv -i \pmod{p^2}$. Die Anzahl der $n \leqq x$, die in eine dieser a Restklassen $\operatorname{mod} p^2$ fallen, ist höchstens $a[x/p^2]$. Die Summation über alle $p > (\log x)^2$ ergibt

$$\sum a[x/p^2] < a\,x/(\log x)^2 < C\,x/\log x = o(x) .$$

Diese n fallen also ausser Betracht. Somit können wir uns beim Beweis von (2) auf den Fall $u_p(n) = 1$ beschränken. In der Darstellung

$$n = a_0 + a_1\,p + \cdots + a_k\,p^k , \quad 0 \leqq a_i < p \tag{3}$$

ist dann $a_0 = p - i > p/2$, weil

$$i \leqq a < C \log x < 0{,}5\,(\log x)^2 < p/2 .$$

Bekanntlich ist $v_p(n)$ gleich der Anzahl der $a_i > p/2$ in (3). Aus $u_p(n) = 1$ folgt also $v_p(n) \geqq 1$, w.z.b.w.

2. $p \leqq (\log x)^2$. Es sei $w = [10 \log \log x]$. Wir zeigen nun, dass man die $n \leqq x$, für die es ein $i \leqq a$ und eine Primzahl $p \leqq (\log x)^2$ mit $n + i \equiv 0 \pmod{p^w}$ gibt, weglassen kann. In der Tat ist die Anzahl dieser n höchstens gleich

$$\sum_{p \leqq (\log x)^2} a \left[\frac{x}{p^w}\right] < \frac{a\,x}{2^w} (\log x)^2 < \frac{C\,x(\log x)^3}{2^w} = o(x) .$$

Wir betrachten jetzt die n, für die $n + i \not\equiv 0 \pmod{p^w}$ für alle $i\,(1 \leqq i \leqq a)$. Dann ist $a < p^w$. Aus der Formel für die Primzahlzerlegung der Fakultät ergibt sich

$$\begin{aligned} u_p(n) = \sum\left\{\left[\frac{n+a}{p^\alpha}\right] - \left[\frac{n}{p^\alpha}\right]\right\} &\leqq \sum_{\alpha=1}^{w}\left\{\left[\frac{a}{p^\alpha}\right] + 1\right\} \\ &< \frac{a}{p-1} + 10 \log \log x \leqq \frac{C \log x}{p-1} + 10 \log \log x . \end{aligned} \tag{4}$$

Zur Abschätzung von $v_p(n)$ benötigen wir die Ungleichung

$$\sum_{r=0}^{L} \binom{k+1}{r} < \left(\frac{5}{4}\right)^{k+1}. \tag{5}$$

Hier ist

$$L = \left[\frac{\log x}{100 \log p}\right] \quad \text{und} \quad k = \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \left(\text{oder } \left[\frac{\log x}{\log p}\right] - 1\right)$$

der grösste Exponent in (3). Zum Beweis von (5) beachte man, dass $L < (k+1)/2$. Also gilt für genügend grosses k

$$\sum_{r=0}^{L} \binom{k+1}{r} < (k+1) \binom{k+1}{L} < (k+1) \frac{(k+1)^L}{L!} < (k+1) \left(\frac{(k+1)\, e}{L}\right)^L$$

$$< (k+1)\,(100\, e)^{0{,}01\,(k+1)} < (5/4)^{(k+1)}.$$

Wir beweisen nun, dass für fast alle $n \leqq x$ und alle $p < (\log x)^2$

$$v_p(n) > \frac{\log x}{100 \log p}. \tag{6}$$

$v_p(n)$ ist wieder gleich der Anzahl der $a_i > p/2$ in (3). Wir zeigen, dass die n, für die $v_p(n) \leqq L$ ist für irgendein $p < (\log x)^2$, weggelassen werden können. Es seien $i_1, i_2, \ldots, i_r$, $r \leqq L$, die Indices der $a_i > p/2$ in (3). Diese Indices kann man offenbar auf $\sum_{r=0}^{L} \binom{k+1}{r}$ Arten wählen. Für jede dieser Wahlen ist die Anzahl der für a_j $(0 \leqq j \leqq k)$ möglichen Werte $(p-1)/2$, wenn $j = i_s$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$ und $(p+1)/2$ sonst. Die Anzahl der $n \leqq x$ mit $v_p(n) \leqq L$ ist also mit (5) nicht grösser als

$$((5/8)\,(p+1))^{k+1} \leqq p^{k+1}\,(15/16)^{k+1}. \tag{7}$$

Wegen $p^k \leqq x < p^{k+1}$ und $p \leqq (\log x)^2$ ist $p^{k+1} < x\,(\log x)^2$ und $k+1 > (\log x)/(2 \log \log x)$. Die rechte Seite von (7) ist kleiner als

$$x \left(\frac{16}{15}\right)^t \quad \text{mit} \quad t = \frac{2 \log \log x}{\log (16/15)} - \frac{\log x}{2 \log \log x},$$

also $o(x/(\log x)^2)$; da höchstens $(\log x)^2$ Werte p in Betracht kommen, ist unsere Behauptung bewiesen.

Der Abschluss des Beweises ergibt sich sofort aus (4) und (6), denn für ein genügend kleines C und ein genügend grosses x ist

$$\frac{C}{p-1} + \frac{10 \log \log x}{\log x} < \frac{1}{100 \log p}.$$

Aufgabe 558. Es sei $\mathfrak{S}$ die symmetrische Gruppe vom Grade $n+1$ dargestellt auf der Ziffernmenge $\{1, 2, \ldots, n+1\}$. Jedem $S \in \mathfrak{S}$ ordnen wir ein n-Tupel $k_1(S), k_2(S), \ldots, k_n(S)$ von nichtnegativen ganzen Zahlen zu, wobei $k_i(S)$ die Anzahl der Ziffern $j \in \{i+1, \ldots, n+1\}$ ist, für die $j\,S < i\,S$ ist. Man zeige, dass dies eine umkehrbare Zuordnung von $\mathfrak{S}$ auf die Menge der n-Tupel $k_1, k_2, \ldots, k_n$ mit $0 \leqq k_i \leqq n+1-i$ ist. Man leite daraus die Polynomidentität

$$(x-1)^n \sum_{S \in \mathfrak{S}} x^{N(S)} = \prod_{i=1}^{n} (x^{i+1} - 1)$$

ab, wobei $N(S)$ die Anzahl der Paare (i, j) mit $i < j$ und $j\,S < i\,S$ ist.

Heinz Lüneburg, Mainz

Solution: Let G be the set of all sequences $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ satisfying $0 \leqslant k_i \leqslant n + 1 - i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. We denote by f the given mapping of $\mathfrak{S}$ into G.

(a) *f is injective.* Let us imagine $n + 1$ empty boxes numbered by $1, 2, \ldots, n + 1$. Let $S, T \in \mathfrak{S}$ and suppose that $f(S) = f(T)$, i.e., that $k_i(S) = k_i(T)$ for all $i = 1, 2, \ldots, n$. Since $k_1(S) = 1\,S - 1$, $k_1(T) = 1\,T - 1$ we infer that $1\,S = 1\,T$. Now we put a ball into the box numbered by $1\,S$. It is easy to see that $k_2(S)$ is equal to the number of empty boxes among the first $2\,S - 1$ boxes, i.e., $k_2(S) = 2\,S - 1$ if $1\,S > 2\,S$, and $k_2(S) = 2\,S - 2$ if $1\,S < 2\,S$. Similarly, $k_2(T)$ is equal to the number of empty boxes among the first $2\,T - 1$ boxes. Since $k_2(S) = k_2(T)$ we infer that also $2\,S = 2\,T$. Now we put another ball into the box numbered by $2\,S$. Continuing in this way we conclude that $S = T$.

(b) *f is surjective.* This follows from (a) and the fact that $\mathfrak{S}$ and G have the same number of elements, namely $(n + 1)\,!$.

(c) Since f is a bijection and $N(S) = k_1(S) + k_2(S) + \cdots + k_n(S)$ we find that

$$\sum_{S \in \mathfrak{S}} x^{N(S)} = \sum_{S \in \mathfrak{S}} x^{k_1(S) + k_2(S) + \cdots + k_n(S)} = \sum_{(k_1, \ldots, k_n) \in G} x^{k_1 + \cdots + k_n}$$

$$= \sum_{k_n = 0}^{1} \sum_{k_{n-1} = 0}^{2} \cdots \sum_{k_1 = 0}^{n} x^{k_1 + \cdots + k_n} = \left(\sum_{k_n = 0}^{1} x^{k_n}\right) \left(\sum_{k_{n-1} = 0}^{2} x^{k_{n-1}}\right) \cdots \left(\sum_{k_1 = 0}^{n} x^{k_1}\right)$$

$$= (1 + x)\,(1 + x + x^2)\,\ldots\,(1 + x + \cdots + x^n) = (x - 1)^{-n} \prod_{i=1}^{n} (x^{i+1} - 1)\,.$$

D. Ž. Djoković, University of Waterloo, Ont., Canada

Eine weitere Lösung sandte K. Zacharias (Berlin).

Aufgabe 559. Es sei

$$\varphi\,(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i<j} x_i\,x_j\,, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}\,.$$

Man beschreibe die Lösung des Gleichungssystems

$$\varphi\,(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n) = a_p \quad (p = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

D. Voiculescu, Bukarest

Solution: Put

$$p = \sum_{j=1}^{n} x_j\,, \quad q = \sum_{1 \leq j < k \leq n} x_j\,x_k\,, \quad A = \sum_{j=1}^{n} a_j\,, \quad B = \sum_{j=1}^{n} a_j^2\,.$$

Then it follows from

$$\varphi\,(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) = a_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{*}$$

that

$$a_j + p\,x_j = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} x_j\,x_k = p^2 - q\,.$$

Summing over j gives

$$A + p^2 = n\,(p^2 - q)\,, \quad A = (n - 1)\,p^2 - n\,q\,.$$

Moreover

$$B = \sum_{j=1}^{n} (p^2 - q - p\,x_j)^2 = n\,(p^2 - q)^2 - 2\,p^2\,(p^2 - q) + p^2\,(p^2 - 2\,q)$$
$$= (n - 1)\,p^4 - 2\,n\,p^2\,q + n\,q^2\,,$$

so that

$$n\,B = n\,(n - 1)\,p^4 - 2\,n\,p^2\,[(n - 1)\,p^2 - A] + [(n - 1)\,p^2 - A]^2$$
$$= -\,(n - 1)\,p^4 + 2\,A\,p^2 + A^2\,,$$
$$(n - 1)\,p^4 - 2\,A\,p^2 - A^2 + n\,B = 0\,. \tag{**}$$