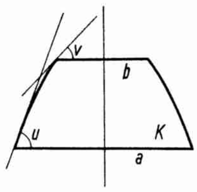
Kleine Mitteilungen

Ungleichungen für konvexe Rotationshalbkörper bei Radien- und Winkelnebenbedingungen

Die nachfolgend mitgeteilten Ungleichungen beziehen sich auf das Volumen V, die Oberfläche F und auf das Integral der mittleren Krümmung M eines konvexen Rotationshalbkörpers K des gewöhnlichen dreidimensionalen Raumes. Ein solcher Halbkörper K weist eine zur Rotationsachse orthogonale Stützebene auf, die einen Äquatorkreis (Breitenkreis mit grösstem Radius) von K enthält. K soll die unten folgenden Nebenbedingungen erfüllen: Es seien a, b, u, v vier vorgegebene reelle Zahlen, die den Einschränkungen $a > b \geqslant 0$ und $\pi/2 > u \geqslant v \geqslant 0$ unterworfen sind, so soll K den Bodenradius a, den Deckradius b, den Bodenstützwinkel u und den Deckstützwinkel v aufweisen; die Bedeutung der vier genannten Grössen ergibt sich aus Fig. 1.



Figur 1

Es gelten dann die Ungleichungen

I) $a^2 M - 2 \sin u \, a F + 3 \sin^2 u \, V \leqslant \pi a^3 [P(u) + Q(u, v; b/a)]$

II) $a^2 M - \sin u \, a F + \sin^2 u \, V \geqslant \pi a^3 [P^*(u, v) + Q^*(u, v; b/a)]$,

wobei die auf den rechten Seiten verwendeten Hilfsfunktionen der Tafel

$$P(u) = \pi - u - \sin u \, (2 + \cos u)$$

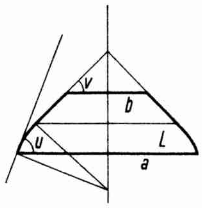
$$Q(u, v; t) = -(\operatorname{tg} v - v) \, t + 2 \sin u \left(\frac{1}{\cos v} - 1\right) t^2 - \sin^2 u \operatorname{tg} v \, t^3$$

$$P^*(u, v) = \pi - v - \sin u \left(\frac{1}{\cos v} + 1\right) + \left(1 + \frac{\sin^2 u}{3}\right) \operatorname{tg} v$$

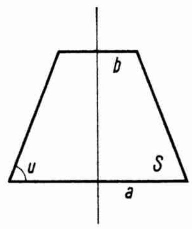
$$Q^*(u, v; t) = -(\operatorname{tg} v - v) \, t + \sin u \left(\frac{1}{\cos v} - 1\right) t^2 - \frac{\sin^2 u \operatorname{tg} v}{3} \, t^3$$

zu entnehmen sind.

In I) gilt Gleichheit genau dann, wenn K ein abgestumpfter Kappenkörper der Kugelhalblinse L ist. Vgl. hierzu Fig. 2. In II) gilt dagegen Gleichheit genau dann, wenn $u = v$ und K ein Kegelstumpf S ist. Vgl. Fig. 3.



Figur 2



Figur 3