Zur Herleitung der Gronwallschen Nomographierbarkeitsbedingungen

Bekanntlich heisst eine Funktion $w = F(u, v)$ *nomographierbar*, wenn es eine *Massausche Determinante*

$$M(u, v, w) = \begin{vmatrix} U_1(u) & V_1(v) & W_1(w) \\ U_2(u) & V_2(v) & W_2(w) \\ U_3(u) & V_3(v) & W_3(w) \end{vmatrix} \tag{1}$$

gibt, so dass für alle Wertepaare (u, v) eines Gebietes G der (u, v)-Ebene

$$M(u, v, F(u, v)) = 0$$

ist.

Das Verschwinden der Massauschen Determinante kann gedeutet werden als Bedingung dafür, dass je eine Gerade der drei Geradenscharen in der (x, y)-Ebene

$$U_1(u)\, x + U_2(u)\, y + U_3(u) = 0\,,$$

$$V_1(v)\, x + V_2(v)\, y + V_3(v) = 0\,,$$

$$W_1(w)\, x + W_2(w)\, y + W_3(w) = 0$$

sich für $w = F(u, v)$ in einem Punkte schneiden. Die Funktion $w = F(u, v)$ ist also durch eine *geradlinige Netztafel* (*Geradentafel*) darstellbar.

Durch eine passende Wahl des Koordinatenursprungs in der (x, y)-Ebene und des Gebietes G kann erreicht werden, dass $U_3(u)$, $V_3(v)$ und $W_3(w)$ nicht verschwinden Mit

$$\frac{U_i(u)}{U_3(u)} = f_i(u)\,, \quad \frac{V_i(v)}{V_3(v)} = g_i(v)\,, \quad \frac{W_i(w)}{W_3(w)} = h_i(w) \quad (i = 1, 2) \tag{2}$$

erhält die Massausche Determinante (1) die Form

$$M(u, v, w) = U_3(u)\, V_3(v)\, W_3(w) \begin{vmatrix} f_1(u) & g_1(v) & h_1(w) \\ f_2(u) & g_2(v) & h_2(w) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ihr Verschwinden kann gedeutet werden als Bedingung dafür, dass je ein Punkt der drei Skalen in der (ξ, η)-Ebene

$$\left.\begin{aligned} c_u&: \xi = f_1(u)\,, & \eta &= f_2(u) \\ c_v&: \xi = g_1(v)\,, & \eta &= g_2(v) \\ c_w&: \xi = h_1(w)\,, & \eta &= h_2(w) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

für $w = F(u, v)$ kollinear sind. Die Funktion $w = F(u, v)$ ist also auch durch eine (zur Geradentafel duale) *Fluchtlinientafel* darstellbar.

Fasst man die Elemente je einer Spalte der Massauschen Determinante (1) als Koordinaten eines Vektors des dreidimensionalen affinen Raumes auf, so bedeutet das Verschwinden der Massauschen Determinante die Bedingung dafür, dass die Vektoren

$$\mathfrak{U}(u) = \begin{pmatrix} U_1(u) \\ U_2(u) \\ U_3(u) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{V}(v) = \begin{pmatrix} V_1(v) \\ V_2(v) \\ V_3(v) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{W}(w) = \begin{pmatrix} W_1(w) \\ W_2(w) \\ W_3(w) \end{pmatrix}$$

für $w = F(u, v)$ komplanar sind:

$$M(u, v, F(u, v)) = (\mathfrak{U}(u)\, \mathfrak{V}(v)\, \mathfrak{W}(F(u, v))) = 0\,.$$

Die durch diese geometrische Deutung nahegelegte Verwendung der Vektorschreibweise gestattet eine übersichtliche Herleitung der Gronwallschen Nomographierbarkeitsbedingungen.

Mittels der Richtungen der Vektoren $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, die durch die Verhältnisse ihrer Koordinaten gegeben sind, gelangt man mit (2) wieder zu den Gleichungen (3) der Skalen c_u, c_v, c_w der Fluchtlinientafel für die Funktion $w = F(u, v)$.

Im folgenden sei I_u das Intervall $u_a < u < u_b$, I_v das Intervall $v_a < v < v_b$, und es sei $G = \{(u, v);\, u \in I_u, v \in I_v\}$. Von den Vektoren $\mathfrak{U}(u)$ und $\mathfrak{V}(v)$ wird vorausgesetzt:

1) $\mathfrak{U}(u)$ und $\mathfrak{V}(v)$ seien viermal stetig differenzierbar[1] für $u \in I_u$ bzw. $v \in I_v$.

2) $([\mathfrak{U}\, \mathfrak{V}]\, [\mathfrak{U}\, \mathfrak{U}']\, [\mathfrak{V}\, \mathfrak{V}']) = (\mathfrak{U}\, \mathfrak{V}\, \mathfrak{U}')\, (\mathfrak{U}\, \mathfrak{V}\, \mathfrak{V}') = L\, N \neq 0$[2]) für $(u, v) \in G$; dabei ist zur Abkürzung

$$(\mathfrak{U}\, \mathfrak{V}\, \mathfrak{U}') = L(u, v)\,, \quad (\mathfrak{U}\, \mathfrak{V}\, \mathfrak{V}') = N(u, v) \tag{4}$$

gesetzt worden.

Die Endpunkte der Ortsvektoren $\mathfrak{U}(u)$ und $\mathfrak{V}(v)$ beschreiben dann je eine Raumkurve C_u bzw. C_v.

Die Voraussetzung 2) ist nur dann erfüllt, wenn

2a) $\mathfrak{U} \neq 0$, $\mathfrak{U}' \neq 0$, $\mathfrak{V} \neq 0$, $\mathfrak{V}' \neq 0$.

2b) $[\mathfrak{U}\, \mathfrak{U}'] \not\equiv 0$ und $[\mathfrak{V}\, \mathfrak{V}'] \not\equiv 0$: C_u und C_v dürfen keine Geraden durch den Ursprung sein. Die Skalen c_u und c_v dürfen also[3]) nicht in je einen Punkt entarten.

2c) $[\mathfrak{U}\, \mathfrak{U}'] \neq 0$ und $[\mathfrak{V}\, \mathfrak{V}'] \neq 0$: C_u und C_v dürfen keine Tangente durch den Ursprung schicken. Die Skalen c_u und c_v müssen also[3]) streng monoton sein.

2d) $L = (\mathfrak{U}\, \mathfrak{V}\, \mathfrak{U}') \neq 0$ und $N = (\mathfrak{U}\, \mathfrak{V}\, \mathfrak{V}') \neq 0$: Diejenigen Wertepaare $(u, v) \in G$, für die der Tangentenvektor $\mathfrak{U}'$ von C_u (bzw. $\mathfrak{V}'$ von C_v) und die Ortsvektoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ komplanar sind, für die also[3]) die Skala c_v (bzw. c_u) von einer Tangente der Skala c_u (bzw. c_v) geschnitten wird, müssen ausgeschlossen werden. Liegen C_u und C_v in je einer Ebene durch den Ursprung, sind also c_u und c_v geradlinig, so dürfen C_u und C_v nicht derselben Ebene und c_u und c_v nicht derselben Geraden angehören, da sonst $L \equiv 0$ und $N \equiv 0$.

---

[1]) Ableitungen nach der jeweiligen Veränderlichen werden mit $d\mathfrak{U}/du = \mathfrak{U}'$, $d\mathfrak{V}/dv = \mathfrak{V}'$ usw. bezeichnet.

[2]) Hier und im folgenden werden die Formeln $[[\mathfrak{A}\, \mathfrak{B}]\, [\mathfrak{C}\, \mathfrak{D}]] = (\mathfrak{A}\, \mathfrak{B}\, \mathfrak{D})\, \mathfrak{C} - (\mathfrak{A}\, \mathfrak{B}\, \mathfrak{C})\, \mathfrak{D}$ und $([\mathfrak{A}\, \mathfrak{B}]\, [\mathfrak{C}\, \mathfrak{D}]\, [\mathfrak{E}\, \mathfrak{F}]) = [[\mathfrak{A}\, \mathfrak{B}]\, [\mathfrak{C}\, \mathfrak{D}]]\, [\mathfrak{E}\, \mathfrak{F}] = (\mathfrak{A}\, \mathfrak{B}\, \mathfrak{D})\, (\mathfrak{C}\, \mathfrak{E}\, \mathfrak{F}) - (\mathfrak{A}\, \mathfrak{B}\, \mathfrak{C})\, (\mathfrak{D}\, \mathfrak{E}\, \mathfrak{F})$ benutzt.

[3]) Die Interpretation der Bedingungen 2b) bis 2e) für die Skalen c_u und c_v ergibt sich mittels (2) und (3).

2e) $[\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}] \neq 0$: Diejenigen Wertepaare $(u, v) \in G$, für die $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ proportional sind, für die also[3]) die Skalen c_u und c_v gemeinsame Punkte besitzen, müssen ausgeschlossen werden. Wenn C_u und C_v ganz oder teilweise auf demselben Kegel (Spitze im Ursprung) liegen, wenn also die Skalen c_u und c_v ganz oder teilweise derselben Kurve angehören, liegen die auszuschliessenden Punkte $(u, v) \in G$ auf einem stetigen Kurvenbogen in der (u, v)-Ebene, der wegen 2c) streng monoton ist.

Weiter wird vorausgesetzt, dass

3) $w = F(u, v)$ für $(u, v) \in G$ eine eindeutige, reellwertige Funktion ist, die stetige erste und zweite partielle Ableitungen besitzt und deren Ableitungen $\partial F/\partial u = F_u$ und $\partial F/\partial v = F_v$ für $(u, v) \in G$ nicht verschwinden.
4) $\mathfrak{W}(w)$ einmal stetig differenzierbar ist für $w = F(u, v)$ mit $(u, v) \in G$ und dass $\mathfrak{W} \neq 0$ und $\mathfrak{W}' \neq 0$ sind. Der Endpunkt des Ortsvektors $\mathfrak{W}(w)$ beschreibt dann eine Raumkurve C_w.

Wie eingangs erwähnt, heisst die Funktion $w = F(u, v)$ nomographierbar, wenn für alle $(u, v) \in G$

$$M(u, v, F(u, v)) = (\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{W}) = [\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}]\,\mathfrak{W} = \Omega\,\mathfrak{W} = 0\,, \tag{5}$$

wobei

$$\Omega(u, v) = [\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}]\,. \tag{5a}$$

Aus der Identität (5) folgt

$$d(\Omega\,\mathfrak{W}) = (\Omega\,\mathfrak{W})_u\,du + (\Omega\,\mathfrak{W})_v\,dv = 0\,,$$

also

$$(\Omega\,\mathfrak{W})_u = \Omega_u\,\mathfrak{W} + \Omega\,\mathfrak{W}'\,F_u = 0\,, \quad (\Omega\,\mathfrak{W})_v = \Omega_v\,\mathfrak{W} + \Omega\,\mathfrak{W}'\,F_v = 0\,. \tag{6}$$

Darin ist

$$\Omega\,\mathfrak{W}' = (\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{W}') \neq 0\,; \tag{7}$$

denn anderenfalls gäbe es einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor $\mathfrak{W}$, der den Gleichungen

$$\Omega\,\mathfrak{W} = 0\,, \quad \Omega_u\,\mathfrak{W} = 0\,, \quad \Omega_v\,\mathfrak{W} = 0$$

genügt, dann und nur dann, wenn entgegen der Voraussetzung 2)

$$(\Omega\,\Omega_u\,\Omega_v) = ([\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}]\,[\mathfrak{U}'\,\mathfrak{V}]\,[\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}']) = (\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{U}')\,(\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{V}') = L\,N = 0$$

wäre.

Wegen 4) und (7) ist für $w = F(u, v)$

$$[[\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}]\,[\mathfrak{W}\,\mathfrak{W}']] = (\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{W}')\,\mathfrak{W} \neq 0\,.$$

Daraus folgt $[\mathfrak{W}\,\mathfrak{W}'] \neq 0$, d.h. die vom Endpunkt des Ortsvektors $\mathfrak{W}$ beschriebene Raumkurve C_w ist keine Gerade durch den Ursprung und schickt keine Tangente durch den Ursprung. Die Skala c_w entartet also nicht in einen Punkt und ist streng monoton.

Aus (6) entfernt man die Glieder mit $\mathfrak{W}'$ und erhält

$$F_u(\Omega\,\mathfrak{W})_v - F_v(\Omega\,\mathfrak{W})_u = (F_u\,\Omega_v - F_v\,\Omega_u)\,\mathfrak{W} = \overset{(1)}{\Omega}\,\mathfrak{W} = 0^{4)}\,, \tag{8}$$

wobei

$$\overset{(1)}{\Omega} = F_u\,\Omega_v - F_v\,\Omega_u = F_u[\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}'] - F_v[\mathfrak{U}'\,\mathfrak{V}]\,. \tag{8a}$$

---

[4]) Diese Identität verwendet auch BAHVALOV [1].

Ebenso, wie aus (5) die neue Identität (8) gewonnen wurde, erhält man aus (8)

$$F_u\left(\overset{(1)}{\Omega}\,\mathfrak{W}\right)_v - F_v\left(\overset{(1)}{\Omega}\,\mathfrak{W}\right)_u = \left(F_u\,\overset{(1)}{\Omega}_v - F_v\,\overset{(1)}{\Omega}_u\right)\mathfrak{W} = \overset{(2)}{\Omega}\,\mathfrak{W} = 0 \tag{9}$$

mit

$$\left.\begin{aligned}\overset{(2)}{\Omega} = F_u\,\overset{(1)}{\Omega}_v - F_v\,\overset{(1)}{\Omega}_u = (F_{uv}F_u - F_{uu}F_v)\,[\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}'] + (F_{uv}F_v - F_{vv}F_u)\,[\mathfrak{U}'\,\mathfrak{V}]\\ + F_u^2[\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}''] - 2\,F_u F_v[\mathfrak{U}'\,\mathfrak{V}'] + F_v^2[\mathfrak{U}''\,\mathfrak{V}].\end{aligned}\right\} \tag{9a}$$

Einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor $\mathfrak{W}$, der den Gleichungen (5) $\Omega\,\mathfrak{W} = 0$, (8) $\overset{(1)}{\Omega}\,\mathfrak{W} = 0$ und (9) $\overset{(2)}{\Omega}\,\mathfrak{W} = 0$ genügt, gibt es dann und nur dann, wenn für alle $(u, v) \in G$ mit (5a), (8a) und (9a)

$$\left(\Omega\,\overset{(1)}{\Omega}\,\overset{(2)}{\Omega}\right) = 0. \tag{10}$$

Für die Ausrechnung dieser Bedingung werden die Ableitungen von (4) benötigt:

$$(\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{U}'') = L_u, \quad (\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}'\,\mathfrak{U}') = L_v, \quad (\mathfrak{U}'\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{V}') = N_u, \quad (\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{V}'') = N_v. \tag{11}$$

Die Ausrechnung von (10) ergibt[5])

$$(F_u\,N\,\mathfrak{U} + F_v\,L\,\mathfrak{V})\,\overset{(2)}{\Omega} = L\,N\left(F_u\frac{\mathfrak{U}}{L} + F_v\frac{\mathfrak{V}}{N}\right)\overset{(2)}{\Omega} = 0,$$

und bei Berücksichtigung von (11)

$$F_{uu}F_v^2 - 2\,F_{uv}F_uF_v + F_{vv}F_u^2 - F_uF_v\,(p(u,v)\,F_v + q(u,v)\,F_u) = 0 \tag{12}$$

mit

$$p(u,v) = \frac{L_u}{L} - 2\,\frac{N_u}{N} = \left(\ln\frac{L}{N^2}\right)_u, \qquad q(u,v) = \frac{N_v}{N} - 2\,\frac{L_v}{L} = \left(\ln\frac{N}{L^2}\right)_v. \tag{13}$$

Für die Ableitungen von p und q gelten

$$\left.\begin{aligned}\varphi(u,v) &= 2\,p_v + q_u = -3\,(\ln N)_{uv} = 3\,\frac{L}{N^2}\,(\mathfrak{V}\,\mathfrak{V}'\,\mathfrak{V}''),\\ \psi(u,v) &= p_v + 2\,q_u = -3\,(\ln L)_{uv} = -3\,\frac{N}{L^2}\,(\mathfrak{U}\,\mathfrak{U}'\,\mathfrak{U}'');\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

dabei wurden die Beziehungen

$$N\,N_{uv} - N_u N_v = -L(\mathfrak{V}\,\mathfrak{V}'\,\mathfrak{V}''), \qquad L\,L_{uv} - L_u L_v = N(\mathfrak{U}\,\mathfrak{U}'\,\mathfrak{U}'')$$

benutzt. Wenn $(\mathfrak{V}\,\mathfrak{V}'\,\mathfrak{V}'')$ und $(\mathfrak{U}\,\mathfrak{U}'\,\mathfrak{U}'')$ nicht identisch verschwinden, erhält man durch Berechnung von $(\ln\varphi)_u$ und $(\ln\psi)_v$ wegen (14) und (13)

$$\varphi_u = p\,\varphi, \qquad \psi_v = q\,\psi. \tag{15}$$

Nach GRONWALL [4] und SMIRNOV [5], vgl. auch [2], sind (12) und (15) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Nomographierbarkeit der Funktion $w = F(u, v)$.

[5]) Vgl. Fussnote 2.

Falls $(\mathfrak{V}\,\mathfrak{V}'\,\mathfrak{V}'')$ bzw. $(\mathfrak{U}\,\mathfrak{U}'\,\mathfrak{U}'')$ identisch verschwindet, liegt C_v bzw. C_u in einer Ebene durch den Ursprung, die Skala c_v bzw. c_u ist also geradlinig; dann tritt wegen (14) $\varphi(u, v) = 0$ bzw. $\psi(u, v) = 0$ an die Stelle der ersten bzw. zweiten Differentialgleichung (15). Wenn c_v und c_u zugleich geradlinig sind, lauten die Bedingungen $p_v = 0$ und $q_u = 0$.

Bei einer regulären homogenen Affinität werden die Spatprodukte (4) mit der Determinante der Transformation multipliziert. Wie aus (13) ersichtlich ist, sind p und q gegenüber regulären homogenen Affinitäten invariant, folglich auch die Nomographierbarkeitsbedingungen (12) und (15). Bei einer regulären homogenen Affinität des Raumes unterliegt die (ξ, η)-Ebene einer regulären Kollineation.

Abschliessend sei darauf hingewiesen, dass bei Voraussetzung der Existenz stetiger Ableitungen höherer Ordnung von $\mathfrak{U}(u)$, $\mathfrak{V}(v)$ und $F(u, v)$ nach dem Vorbild von (8) und (9) weitere Identitäten $\overset{(l)}{\Omega}\,\mathfrak{W} = 0$ mit

$$\overset{(l)}{\Omega} = F_u \overset{(l-1)}{\Omega}_v - F_v \overset{(l-1)}{\Omega}_u, \qquad \overset{(0)}{\Omega} = \Omega \qquad (l = 1, \dots, n)$$

gewonnen werden können. $\overset{(l)}{\Omega}$ enthält Ableitungen von Ω und damit von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ sowie von $F(u, v)$ bis zur l-ten Ordnung. Bis zur Ableitungsordnung n stehen $n + 1$ Identitäten $\overset{(l)}{\Omega}\,\mathfrak{W} = 0$ $(l = 0, \dots, n)$ zur Verfügung, von denen je drei analog zu (10) eine Bedingung

$$\left(\overset{(i)}{\Omega}\,\overset{(j)}{\Omega}\,\overset{(k)}{\Omega}\right) = 0 \tag{16}$$

mit verschiedenen $i, j, k \in \{0, \dots, n\}$ liefern. Insgesamt gibt es $\binom{n+1}{3} = n\,(n^2 - 1)/6$ derartige Bedingungen.

Im oben behandelten Fall $n = 2$ treten in der Bedingung (10) die beiden von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ abhängigen Koeffizienten p und q auf, und zwar linear. Wünschenswert wären Nomographierbarkeitsbedingungen für $w = F(u, v)$, die von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ unabhängig sind. Man könnte versuchen, mittels der $\binom{n+1}{3}$ Bedingungen (16) für hinreichend grosses n die von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ abhängigen Koeffizienten, deren Anzahl mit n ebenfalls wächst, zu eliminieren. Doch ist, wie BLASCHKE [3] bemerkt hat, zu erwarten, dass erst für $n = 9$ hinreichend viele Bedingungen zur Verfügung stehen; das sind $\binom{10}{3} = 120$. Daher dürfte sich kaum jemand finden, der genügend Mut und Ausdauer besitzt, diesen Weg zu beschreiten. Die zu erwartenden Bedingungen hätten für die praktische Nomographie natürlich keine Bedeutung.

R. WODICKA, Aachen

LITERATURVERZEICHNIS

[1] S. V. BAHVALOV, *Some Geometric Properties of Nomographic Equations*, Soviet Math. Dokl. *1*, 822–824 (1961), (englisch); Dokl. Akad. Nauk SSSR *133*, 258–260 (1960), (russisch).

[2] H. BEHNKE, G. BERTRAM, R. SAUER, *Grundzüge der Mathematik*, Band IV; Göttingen 1966, 35–38.

[3] W. BLASCHKE, *Einführung in die Geometrie der Waben*, Basel und Stuttgart 1955, 42–44.

[4] T.-H. GRONWALL, *Sur les équations entre trois variables représentables par des nomogrammes à points alignés*, J. math. pures appl. [6], *8*, 59–102 (1912).

[5] S. V. SMIRNOV, *Der Gronwallsche Hauptsatz über die Nomographierbarkeit*, Dokl. Akad. Nauk SSSR *124*, 34–37 (1959), (russisch).