Aufgaben

Aufgabe 552. In einem Simplex des R_n werden zwei Punkte beliebig so gewählt, dass keiner von ihnen auf einem $(n-1)$-dimensionalen Grenzraum liegt. Man zeige, dass die Fusspunkte der «Ecktransversalen» durch die beiden Punkte auf den Simplexkanten auf einer n-dimensionalen Quadrik liegen.

Bemerkung. Unter dem Fusspunkt P_{ij} der «Ecktransversalen» durch den beliebigen Punkt P auf der Kante $A_i A_j$ versteht man den Schnittpunkt der Geraden $A_i A_j$ mit dem $(n-1)$-dimensionalen Unterraum, gebildet durch die Punkte

$$A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_{n+1}, P .$$

J. Schopp, Budapest

Lösung des Aufgabenstellers: Es ist bekannt und lässt sich leicht einsehen, dass im n-dimensionalen Raum $A = n(n+3)/2 = 2n + \binom{n}{2}$ Punkte eindeutig eine n-dimensionale Quadrik bestimmen, falls höchstens $k(k+3)/2$ $(k < n)$ Punkte in einem k-dimensionalen Unterraum liegen.

Seien P und Q die gegebenen Punkte, P_{ij} bzw. Q_{ij} ihre Fusspunkte auf der Kante $A_i A_j$, wenn man die Simplexspitze mit $A_i (i = 1, \ldots, n+1)$ bezeichnet. Die Anzahl $B = (n+1)n$ der Fusspunkte ist gleich der doppelten Kantenanzahl. Offenbar ist $A < B$, falls $n > 1$ ist.

Betrachten wir jetzt sämtliche Fusspunkte der Ecktransversalen durch P, P_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n+1;\ i \neq j)$, deren Anzahl $a = \binom{n+1}{2}$ ist. Nehmen wir dazu von den Fusspunkten der Ecktransversalen durch Q diejenigen, die auf jenen Kanten liegen, deren Endpunkt A_k ist, also die Fusspunkte Q_{ki} $(i = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n+1)$; ihre Anzahl ist $a' = n$. Aus $a + a' = A$ folgt, dass die ausgewählten Fusspunkte eine n-dimensionale Quadrik bestimmen.

Wir beweisen, dass ein beliebiger Fusspunkt Q_{ij} $(i, j = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n+1;\ i \neq j)$ – welcher bei der Bestimmung der Quadrik nicht vorkam –, auch zur Quadrik gehört.

Die Ebene $A_i A_j A_k$ schneidet die Quadrik in einem Kegelschnitt. Dieser Kegelschnitt ist durch die Fusspunkte P_{ij}; P_{ik}; P_{jk} Q_{ik} Q_{jk} bestimmt. Laut Aufgabe Nr. 530 (El. Math. *22*, 89 (1967)) ist aber auch Q_{ij} ein Punkt dieses Kegelschnittes und damit auch ein Punkt der Quadrik, q.e.d.

Aufgabe 553. k étant un nombre naturel donné, appelons P_k le problème suivant: Existe-t-il des nombres triangulaires > 0 qui sont sommes de k nombres triangulaires consécutifs > 0?

Examiner pour quels entiers k, tels que $2 \leqq k \leqq 10$, le problème P_k n'a pas de solutions, pour quels k il admet un nombre fini > 0 de solutions, et pour quels k il a une infinité de solutions.

W. Sierpiński, Varsovie

Lösung: P_k bedeutet: Gibt es zu festem natürlichem $k \geqq 2$ Paare (m, n) natürlicher Zahlen derart, dass

$$t_m = t_n + \cdots + t_{n+k-1} \quad \text{mit} \quad t_a = \frac{a(a+1)}{2} \tag{1}$$

für alle natürlichen a gilt? Aus der Forderung (1) wird somit die Diophantische Gleichung

$$(2m+1)^2 - k(2n+k)^2 = \frac{1}{3}(k-1)(k^2+k-3) = r(k) \tag{2}$$

oder in etwas anderer Bezeichnung

$$u^2 - k v^2 = r(k) . \tag{2'}$$

Ist $k = 2, 3, 5, 7, 8, 10$, so hat P_k jeweils unendlich viele Lösungen. Denn für $k = 2$ reduziert sich (2′) auf die Pellsche Gleichung $u^2 - 2v^2 = 1$. Für $k = 3, 5, 7, 8, 10$ entnehmen wir untenstehender Tabelle je eine Lösung (u, v) von (2′), aus der man mit Hilfe der unendlich vielen Lösungen der zugehörigen Pellschen Gleichung $x^2 - k y^2 = 1$ je unendlich viele Lösungen gewinnen kann. Für $k = 6$ wird aus (2'): $u^2 - 6v^2 = 65$, woraus $u \not\equiv 3 \pmod 6$ folgt. Da u aber ungerade sein muss, folgt $u \equiv \pm 1 \pmod 6$ und also $u^2 - 6v^2 \equiv 1 \pmod 6$, während $65 \equiv -1 \pmod 6$, so dass (2') für $k = 6$ keine Lösung besitzt. Bleiben die beiden Quadratzahlen $k = 4, 9$. Für $k = 4$ wird aus (2'): $(u + 2v)(u - 2v) = 17$, was nur geht, wenn $u + 2v = 17$, $u - 2v = 1$, woraus folgt $v = 2n + 4$, d.h. $n = 0$, so dass wir für $k = 4$ wieder keine Lösung bekommen. Für $k = 9$ wird aus (2'): $(u + 3v)(u - 3v) = 232$. Da beide Faktoren links gerade sein müssen, kommen nur $u + 3v = 116$, $u - 3v = 2$ bzw. $u + 3v = 58$, $u - 3v = 4$ in Frage, wo der zweite Fall wie vorher auf $n = 0$ führt und somit ausfällt; der erste führt auf $u = 59$, $v = 19$, d.h. $m = 29$, $n = 5$, was tatsächlich die einzige existierende Lösung von P_9 liefert.

k	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(k)$	6	17	36	65	106	161	232	321
u	3	–	9	–	13	13	59	19
v	1	–	3	–	3	1	19	2

P. Bundschuh, Freiburg-Littenweiler

Eine weitere Lösung sandte G. Wulczyn, Bucknell University, USA.

Aufgabe 554. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres naturels k pour lesquels le problème P_k (voir n° 553) n'a pas de solutions, et une infinité de nombres k pour lesquels P_k a une infinité de solutions. W. Sierpiński, Varsovie

Lösung (nach A. Schinzel, Warschau): Wir verwenden die Bezeichnungen und Formeln der Lösung zu Aufgabe 553.

a) P_k hat für $k = 9t + 6$ ($t = 0, 1, 2, \ldots$) keine Lösung. In der Tat ist für diese k $r_k \equiv 2 \pmod 3$ und aus (2) ergibt sich nun die unmögliche Kongruenz $(2m + 1)^2 \equiv 2 \pmod 3$.

b) P_k hat für $k = 3t^2 - 1$ stets eine Lösung, da (2) die Lösung

$$n_0 = \frac{t - 3t^2 + 2}{2}, \quad m_0 = \frac{t(3t^2 - 1)}{2}$$

besitzt. Andererseits ist $k \equiv 2$ oder $3 \pmod 4$, also nie ein Quadrat, so dass $x^2 - ky^2 = 1$ unendlich viele Lösungen hat. Die Zahlen $x + k^2 y - 1$ und $kx + y - k$ sind gerade. Setzt man

$$n = x n_0 + y m_0 + \frac{kx + y - k}{2}, \quad m = k y n_0 + x m_0 + \frac{x + k^2 y - 1}{2},$$

so ergeben sich unendlich viele ganzzahlige Lösungen von (2) für jedes $k = 3t^2 - 1$.

Weitere Lösungen sandten E. Teuffel (Korntal/Stuttgart) und G. Wulczyn (Bucknell University, USA).

Aufgabe 555. Aus neun Punkten $A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ eines Kegelschnitts werden die Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ und das Dreieck gebildet, das aus den Geraden A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 als Seiten besteht. Ist Dreieck ABC zu zweien der anderen Dreiecke perspektiv, so auch zu dem dritten. W. Schöbe, München

1. Lösung (analytisch): Über das Koordinatendreieck sei so verfügt, dass $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$ die Gleichung des Kegelschnitts K ist und die ersten drei Punkte durch $A(1 \mid 0 \mid 0)$, $B(0 \mid 1 \mid 0)$, $C(0 \mid 0 \mid 1)$ gegeben sind. Die Dreiecke Δ_1 und Δ_2 seien perspektiv zum Koordinatendreieck Δ mit den Zentren $Z_1(u_1 \mid u_2 \mid u_3)$ und $Z_2(v_1 \mid v_2 \mid v_3)$. Eine einfache Rechnung ergibt die Koordinaten der sechs auf K liegenden Ecken von Δ_1 und Δ_2. Die Verbindungsgeraden A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 (Seiten von Δ_3) schneiden die homologen Seiten von Δ in den Punkten $P(0 \mid u_2v_2 \mid -u_3v_3)$, $Q(-u_1v_1 \mid 0 \mid u_3v_3)$, $R(u_1v_1 \mid -u_2v_2 \mid 0)$. Diese drei Punkte liegen auf der Geraden

$$\frac{x_1}{u_1v_1} + \frac{x_2}{u_2v_2} + \frac{x_3}{u_3v_3} = 0. \tag{1}$$

Δ und Δ_3 sind also perspektiv (Umkehrung von «Desargues»).