

Werk

Titel: Netzprojektion eines Tetraeders.

Autor: KLIX, W.-D.

Jahr: 1968

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199_0023|log26

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

also die Berührungspunkte von m^c mit u^c . Berührende Parallelkreisbilder sind aber leicht zu finden, da die Tangenten an alle Kreise $p^{\varepsilon 0}$ in ihren Schnittpunkten mit $m^{\varepsilon 0}$ dieselbe Richtung haben. Figur 3 zeigt nach dieser Methode die Umrisspunkt-konstruktion für den gegebenen Meridian m ; die erwähnte Tangentenrichtung ist in diesem Fall normal zu e . Man sucht also jenen Punkt $V^{\varepsilon 0}$ von $m^{\varepsilon 0}$ auf, dessen Tangente normal zu e ist, unterwirft ihn der Kollineation \mathfrak{R}^{-1} und erhält den Umrisspunkt V^c von m^c .

JOSEF P. TSCHUPIK, Graz

Netzprojektion eines Tetraeders

Bei einer *Netzprojektion* des P_3 auf eine Bildebene werden als Abbildungsmittel die ∞^2 Geraden eines Strahlnetzes benutzt. Durch spezielle Wahl der Leitgeraden dieses abbildenden Netzes kann erreicht werden, dass die Bilder von Raumgeraden entweder Kreise oder Parabeln mit fester Achsenrichtung sind; es handelt sich dann um eine *spezielle elliptische* bzw. eine *spezielle parabolische Netzprojektion*. Die bekannten – z. B. in [9] dargestellten – Beziehungen zwischen der elliptischen Netzprojektion eines Tetraeders und der MIQUELSchen *Kreisfigur* werden durch Heranziehung einer speziellen parabolischen Netzprojektion zu Aussagen über gewisse *Parabelfiguren* der Ebene erweitert. Dies erscheint aus zwei Gründen mitteilenswert: Einmal wird ein weiteres Beispiel dafür gegeben, wie Aussagen über ebene Figuren durch räumliche Betrachtungen gewonnen werden können. Zum anderen werden durch das gleiche Prinzip, nämlich verschiedene Netzprojektionen, gleichberechtigt nebeneinander stehende Sachverhalte in der Bildebene erhalten, die sich durch rein planimetrische Überlegungen nicht ohne weiteres ineinander überführen zu lassen scheinen. – In den ersten drei Abschnitten werden einige benötigte Eigenschaften der Netzprojektion bereitgestellt.

1. Die Netzprojektion [1–4] ist eine auf J. STEINER zurückgehende *Abbildung des dreidimensionalen projektiven Raumes P_3* auf eine *Bildebene π* , bei der als Abbildungsmittel die Geraden eines Strahlnetzes \mathfrak{N} , also einer linearen Strahlkongruenz verwendet werden. Je nach der Art des abbildenden Netzes soll auch die Netzprojektion *hyperbolisch*, *elliptisch* oder *parabolisch* heißen; die Bildebene π enthalte keine Leitgerade von \mathfrak{N} . Das Bild P' bzw. ε' eines Punktes P bzw. einer Ebene ε wird erklärt als der Schnittpunkt von π mit der mit P bzw. ε inzidierenden Netzgeraden n_p bzw. n_ε . Das Bild g' einer Geraden g ist die Gesamtheit der Spurpunkte der die Gerade g treffenden Netzgeraden. Da diese Netzgeraden einen Regulus \mathfrak{R}_g bilden, ist g' i. allg. ein Kegelschnitt durch die beiden Spurpunkte der Leitgeraden von \mathfrak{N} in π , die im parabolischen Fall durch ein Linienelement zu ersetzen sind.

Satz 1. *Jeder Punkt von π ist gleichzeitig Bildpunkt der ∞^1 auf der durch ihm gehenden Netzgeraden liegenden Punkte und der ∞^1 durch diese Netzgerade gehenden Ebenen. Jeder durch die Spurpunkte der Leitgeraden von \mathfrak{N} gehende Kegelschnitt von π ist Bild der ∞^1 -Geraden, die zu dem \mathfrak{N} angehörenden Regulus durch diesen Kegelschnitt konjugiert sind.*

Die Spurkurve von \mathfrak{R}_g zerfällt in zwei Geraden, wenn die in π liegende Netzgerade n_π diesem Regulus angehört.

Daher gilt der

Satz 2. *Jede Treffgerade h von n_π geht bei Netzprojektion in eine Gerade h' von π über. Die zweite zum Netzbild gehörende Gerade ist n_π .*

Aus den eben dargestellten Eigenschaften der Netzprojektion folgt für zwei sich schneidende Geraden der

Satz 3. a) *Ist S der Schnittpunkt zweier Geraden a' und b einer Ebene ε , dann schneiden sich die Bildkegelschnitte a' und b' ausser in den Spurpunkten L_1, L_2 der Leitgeraden von \mathfrak{R} in zwei weiteren Punkten, von denen der eine der Bildpunkt S' von S und der andere der Bildpunkt ε' von ε ist.*

b) *Schneiden sich a und b nicht, dann sind die von L_1 und L_2 verschiedenen Schnittpunkte der Bilder a' und b' die Spurpunkte der beiden Netzgeraden, die sowohl a als auch b treffen; es gibt genau zwei solche Netzgeraden, da b den Regulus \mathfrak{R}_a in zwei Punkten schneidet und umgekehrt.*

2. Durch besondere Wahl des Netzes \mathfrak{R} kann bei reeller affiner Bildebene π erreicht werden, dass die Bilder der Geraden des P_3 nur gewisse Kegelschnitte sind. Es treten z. B. *gleichseitige Hyperbeln, Kreise* bzw. *Parabeln mit gemeinsamer Achsenrichtung* als Bildkegelschnitte auf, wenn die Geraden mittels einer geeigneten, im folgenden *speziell* genannten hyperbolischen, elliptischen bzw. parabolischen Netzprojektion abgebildet werden. Zu diesem Zweck wird die Bildebene π zunächst durch eine *uneigentliche Gerade u* projektiv abgeschlossen. Die Leitgeraden werden so gewählt, dass ihre Spurpunkte in π , durch die die Bildkegelschnitte der Geraden gehen, uneigentliche Punkte von π werden; u ist dann die in π liegende Netzgerade n_π . Die Bildpunkte von Punkten bzw. Ebenen, deren abbildende Netzgerade n_π ist, sind unbestimmt. Es liegt daher nahe, die Punkte von n_π als *den uneigentlichen Punkt* von π zu definieren, d. h. die Bildebene π nicht projektiv, sondern *konform abzuschliessen*. Ob die Bildebene als projektiv oder konform abgeschlossen aufzufassen ist, wird im folgenden der jeweiligen Problemstellung angepasst.

Fasst man die uneigentlichen Spurpunkte der Leitgeraden von \mathfrak{R} in π als die *Fundamentalphunkte einer Metrik* in der Bildebene bei den jeweiligen speziellen Netzprojektionen auf, dann liegt in π eine *pseudoeuklidische, euklidische* bzw. *isotrope Metrik* vor [7, 8]. Da die Bilder der Geraden Kegelschnitte durch diese Fundamentalphunkte sind, lässt sich zusammenfassend der folgende Satz aussprechen:

Satz 4. *Liegt eine spezielle Netzprojektion vor, d. h. ist die in π liegende Netzgerade n_π die uneigentliche Gerade u von π , dann gehen die Geraden des P_3 in die «Kreise» der Bildebene über, wenn die Spurpunkte der Leitgeraden von \mathfrak{R} als Fundamentalphunkte einer Metrik in π angesehen werden.*

Eine spezielle hyperbolische Netzprojektion liegt somit vor, wenn die Spurpunkte der Leitgeraden von \mathfrak{R} bez. der absoluten Kreispunkte von π harmonisch liegen; die Bilder der Geraden sind gleichseitige Hyperbeln bzw. die *pseudoeuklidischen Kreise* dieser Bildebene mit pseudoeuklidischer Metrik. Bei spezieller elliptischer Netzprojektion werden die absoluten Kreispunkte von π als die Spurpunkte der Leitgeraden von \mathfrak{R} gewählt, so dass \mathfrak{R} ein (Rechts- oder Links-) Drehnetz ist. Die Metrik

in π ist dann euklidisch, die Bilder der Geraden sind daher gewöhnliche *euklidische Kreise*. Eine spezielle parabolische Netzprojektion bildet die Geraden des P_3 auf die Parabeln mit der Achsenrichtung U ab, wobei der uneigentliche Punkt U der Spurpunkt der Leitgeraden des abbildenden parabolischen Netzes ist. Durch das Linien-element (U, u) wird in π eine isotrope Metrik bestimmt, und die Parabeln durch U werden daher als die *isotropen Kreise* in π bezeichnet.

3. Im folgenden sollen die Grundzüge einer parabolischen Netzprojektion dargestellt werden, da wegen des Zusammenfallens der Leitgeraden einige Besonderheiten auftreten [3]. Ein parabolisches Strahlennetz \mathfrak{N}_p mit der doppelt zu zählenden Leitgeraden l ergibt sich, wenn zwischen der Punktreihe l und dem Ebenenbüschel l eine *Korrelation* \mathfrak{F} erklärt wird; die Netzgeraden gehören dann solchen Geradenbüscheln an, deren Trägerpunkt und Trägerebene durch \mathfrak{F} einander entsprechen. Die in π liegende Netzgerade n_π ist die Schnittgerade der dem Spurpunkt L von l bei \mathfrak{F} entsprechenden Ebene mit π . Punkte bzw. Ebenen, die weder mit l noch mit n_π inzidieren, heißen allgemeine Punkte bzw. Ebenen; Geraden, die weder l noch n_π treffen, heißen allgemeine Geraden. Die mit dem allgemeinen Punkt P inzidierende Netzgerade n_P ist die Verbindungsgerade von P mit dem der Ebene Pl durch \mathfrak{F} entsprechenden Punkt von l . Dual dazu ist die mit der allgemeinen Ebene ε inzidierende Netzgerade n_ε die Schnittgerade von ε mit der dem Punkt εl durch \mathfrak{F} zugeordneten Ebene durch l . Das Bild g' einer allgemeinen Geraden g ist im hyperbolischen Fall ein Kegelschnitt durch die Spurpunkte L_1 und L_2 der Leitgeraden des hyperbolischen Netzes \mathfrak{N}_h . Da \mathfrak{N}_p als Grenzfall von \mathfrak{N}_h aufgefasst werden kann, wobei die getrennten Spurpunkte L_1, L_2 der Leitgeraden von \mathfrak{N}_h in den Spurpunkt L der Leitgeraden l von \mathfrak{N}_p zusammengerückt sind und dort das Linienelement (L, n_π) bilden, gilt der

Satz 5. *Die Bilder g' aller allgemeinen Geraden g sind bei parabolischer Netzprojektion Kegelschnitte mit dem gemeinsamen Linienelement (L, n_π) .*

Die oben erwähnte spezielle parabolische Netzprojektion ergibt sich z. B., wenn eine Ferngerade des P_3 als Leitgerade l von \mathfrak{N}_p gewählt und deren Spurpunkt $L = U$ in π durch \mathfrak{F} die Fernebene des P_3 zugeordnet wird. Dann ist die Ferngerade u von π die in π liegende Netzgerade n_π , und es gilt daher der

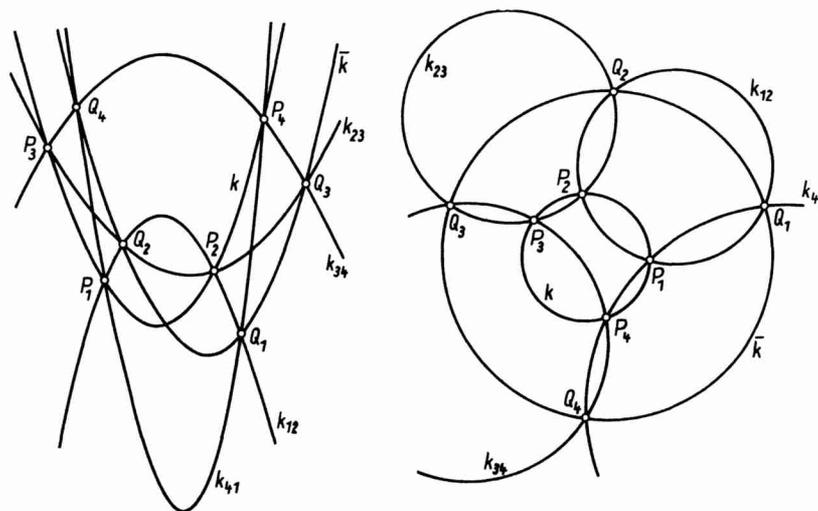
Satz 6. *Die Bilder g' aller allgemeinen Geraden g sind bei spezieller parabolischer Netzprojektion Parabeln mit der gemeinsamen Achsenrichtung U .*

Bemerkung: Eine weitere mögliche spezielle parabolische Netzprojektion, die hier nicht verwendet wird, ergibt sich, wenn die Leitgerade l des Netzes zu π parallel ist und die Korrelation \mathfrak{F} dem Fernpunkt U von l die durch l gehende Parallelebene von π zuordnet.

4. Die hier aufgezeigten Zusammenhänge zwischen spezieller elliptischer bzw. spezieller parabolischer Netzprojektion und der euklidischen bzw. isotropen Metrik der Bildebene sollen an anderer Stelle ausführlicher behandelt werden. Hier sollen diese beiden Projektionen nur benutzt werden, um die Punkte, Geraden und Ebenen von *Tetraedern* des P_3 in π abzubilden. Die bereits bekannten Beziehungen zwischen der *Netzprojektion eines Tetraeders* mittels eines Drehnetzes und der *MIQUELSchen Kreisfigur* ([9]) werden hier nochmals zusammengestellt und gleichzeitig durch die Heranziehung der speziellen parabolischen Netzprojektion auf die *isotrope Ebene* übertragen, bzw. es werden neue Sätze über gewisse *Parabelfiguren der euklidischen Ebene*

ausgesprochen. Dazu ist es vorteilhaft, sowohl die euklidischen Kreise als auch die Parabeln mit einer gemeinsamen Achsenrichtung (in den Bildern lotrecht angenommen), die als isotrope Kreise aufgefasst werden können, als «Kreise» zu bezeichnen. – Um im folgenden unwesentliche Fallunterscheidungen im parabolischen Fall zu vermeiden, wird vorausgesetzt, dass die Kanten des abzubildenden Tetraeders die Leitgerade l von \mathfrak{N} nicht treffen. Wenn man ein räumliches kartesisches Koordinatensystem so annimmt, dass π dessen xy -Ebene und die uneigentliche Leitgerade l die Ferngerade der yz -Ebene sind, bedeutet das, dass keine Tetraederkante parallel zur yz -Ebene verläuft. Ein solches Tetraeder soll *allgemein* heissen. Das Bild eines allgemeinen Tetraeders \mathfrak{T} des P_3 ist eine Figur \mathfrak{T}' in π , die den 4 Ecken, 6 Kanten und 4 Ebenen von \mathfrak{T} entsprechend aus 6 «Kreisen» und 8 Punkten besteht. Da jede Kante von \mathfrak{T} mit zwei Ebenen und zwei Eckpunkten inzidiert, wird jeder «Kreis» von \mathfrak{T}' genau 4 Punkte enthalten und durch jeden Punkt von \mathfrak{T}' werden genau 3 «Kreise» gehen, da mit jeder Ebene und mit jedem Eckpunkt von \mathfrak{T} jeweils 3 Kanten inzidieren. Diese Figur \mathfrak{T}' beschreibt der folgende

Satz 7. *Wählt man auf einem «Kreis» k vier Punkte P_i ($i = 1, \dots, 4$) und zeichnet durch die Punkte P_i und P_j einen «Kreis» k_{ij} ($ij = 12, 23, 34, 41$), dann liegen die vier von P_i verschiedenen Schnittpunkte Q_i ($i = 1, \dots, 4$) der «Kreise» k_{i_1} und k_{i_j} auf einem «Kreis» \bar{k} (Figur 1).*



Figur 1

Im euklidischen Fall ist diese Figur unter dem Namen *MIQUELSche Kreisfigur* in der Literatur bekannt [9].

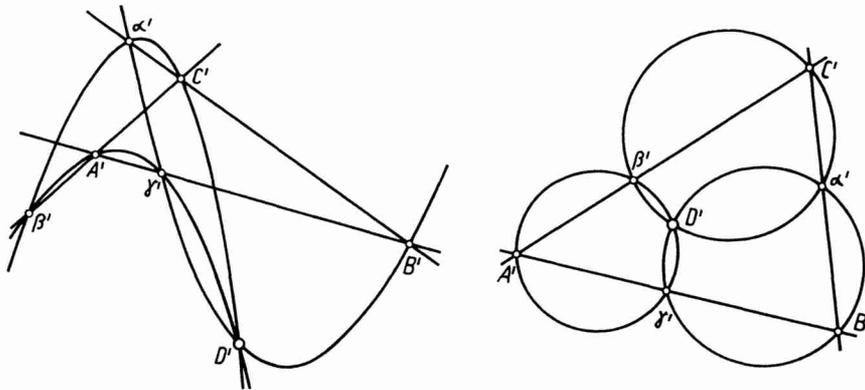
Die Bezeichnungen in den Sätzen 7 und 9 stimmen der übersichtlicheren Formulierung wegen nicht mit den üblichen Bezeichnungen von \mathfrak{T} überein.

5. Aus den Eigenschaften der Netzprojektion, insbesondere aus Satz 1, folgt, dass es ∞^1 verschiedene Tetraeder mit dem gleichen Bild \mathfrak{T}' in π gibt. Es sind dies die ∞^1 Tetraeder, die durch eine Kollineation des P_3 mit den Leitgeraden von \mathfrak{N} als Achsen

auseinander hervorgehen. Ungeachtet dieser in diesem Zusammenhang unwesentlichen Vieldeutigkeit gibt es Tetraeder, die bez. π spezielle Lage haben. Auf diese Sonderlagen von \mathfrak{T} und die sich daraus ergebenden Sonderfälle der MIQUELSchen «Kreis»-Figur \mathfrak{T}' soll näher eingegangen werden.

Ist z. B. die Ebene δ von \mathfrak{T} parallel zu π , dann gehen die drei Kanten a, b, c von δ bei spezieller Netzprojektion nach Satz 2 in Geraden von π über. Drei «Kreise» von \mathfrak{T}' des allgemeinen Falles arten daher in Geraden aus, es ergibt sich also der

Satz 8. *Wählt man auf den drei Seiten a', b', c' eines Dreiecks $A'B'C'$ bzw. die beliebigen Punkte α', β', γ' , dann schneiden sich die «Kreise» durch A', β', γ' ; B', γ', α' und C', α', β' in einem Punkt D' (Figur 2).*



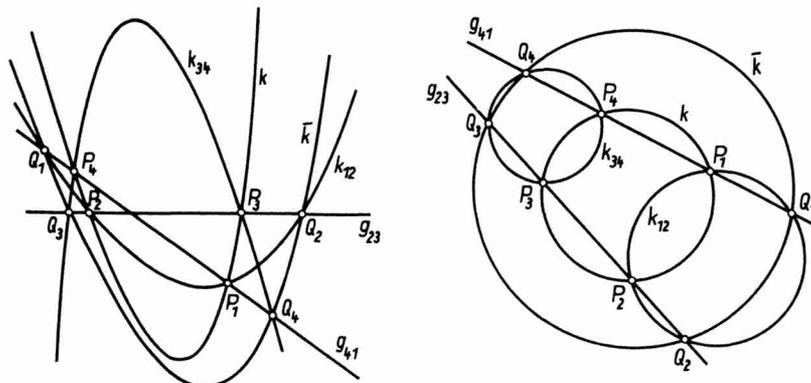
Figur 2

Bemerkung: Der Punkt δ' ist hier der Fernpunkt von π , da die Ebene des Dreiecks ABC zur Bildebene parallel ist; δ' gehört wegen des konformen Abschlusses von π allen drei Geraden des Dreiecks ABC an.

Aus den in Satz 8 gewählten Bezeichnungen geht der Zusammenhang zwischen dem Tetraeder \mathfrak{T} und dessen Bild \mathfrak{T}' deutlich hervor.

Da es möglich ist, dass nur eine Kante von \mathfrak{T} zur Bildebene parallel ist, kann in der MIQUELSchen «Kreis»-Figur ein «Kreis» in eine Gerade ausarten. Sind jedoch genau zwei Kanten von \mathfrak{T} zu π parallel, dann müssen diese in \mathfrak{T} einander gegenüberliegen, d. h. zueinander windschief sein. Die zugehörige «Kreis»-Figur \mathfrak{T}' ergibt sich daher aus der des Satzes 7, wenn entweder k und \bar{k} oder k_{12} und k_{34} oder k_{23} und k_{41} in Geraden entarten. Das entstehende Bild \mathfrak{T}' lässt sich auch in dem Satz beschreiben:

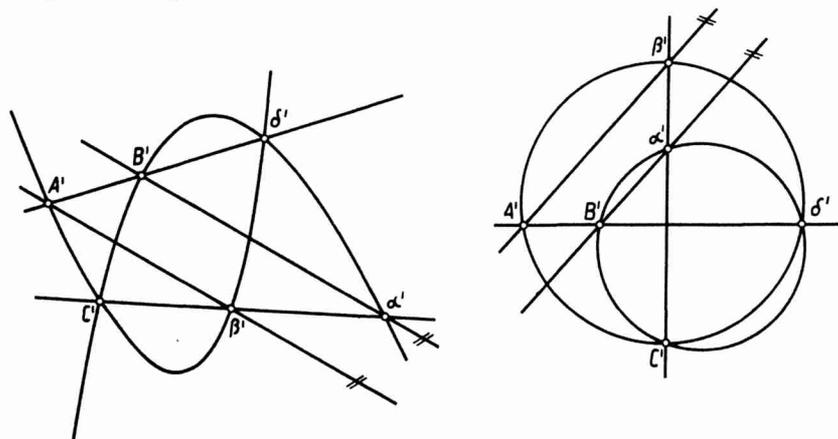
Satz 9. *Auf dem «Kreis» k seien 4 Punkte P_i ($i = 1, \dots, 4$) festgelegt. Zeichnet man durch P_i und P_j einen «Kreis» k_{ij} ($ij = 12, 34$) bzw. die Gerade g_{ij} ($ij = 23, 41$), dann schneiden die Geraden g_{i1} die «Kreise» k_{ij} ausser in P_i in den Punkten Q_i ($i = 1, \dots, 4$) eines «Kreises» \bar{k} (Figur 3).*



Figur 3

Wenn ein Punkt von \mathfrak{T} Fernpunkt wird, ergibt sich im allgemeinen Fall nichts Neues, da das Netzbild eines Fernpunktes i. allg. ein endlicher Punkt von π ist. Von Interesse sind hier nur die Fälle, wo zu π parallele Kanten auftreten, d.h. der Fernpunkt von \mathfrak{T} auf u liegt. Dabei ist es möglich, dass keine oder nur eine Seite des im Endlichen liegenden Tetraederdreiecks parallel π ist; dass mindestens zwei Seiten dieses Dreiecks parallel π sind, kann nicht eintreten, da \mathfrak{T} in diesem Fall in eine zu π parallele Ebene ausarten würde. Im ersten möglichen Fall besteht \mathfrak{T}' aus drei «Kreisen», drei Geraden und 8 Punkten. Die entstehende Figur ist die gleiche wie in Satz 8, nur sind hier die Bedeutungen der Punkte als Bilder von Punkten bzw. Ebenen des Tetraeders vertauscht. Der zweite mögliche Fall ist ein Sonderfall des ersten, da ein weiterer «Kreis» in eine Gerade ausartet. Das entstehende Bild \mathfrak{T}' lässt sich in Form des elementargeometrisch sehr leicht zu beweisenden Satzes aussprechen:

Satz 10. Legt man durch die Schnittpunkte zweier «Kreise» je eine Gerade und schneidet diese mit den beiden «Kreisen», dann ist die Verbindungsgerade der entstehenden Schnittpunkte auf dem einen «Kreis» zu der der entsprechenden Punkte auf dem anderen «Kreis» parallel (Figur 4).

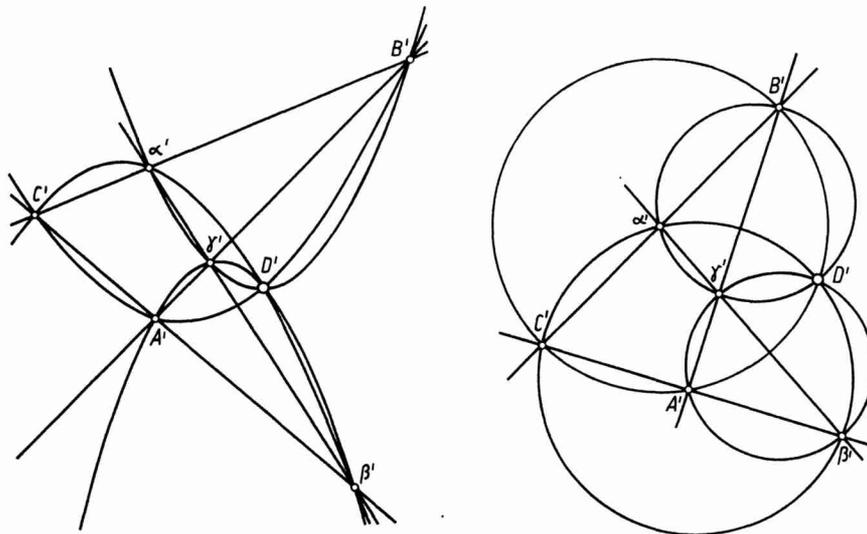


Figur 4

6. Bei gewisser Lage des Tetraeders \mathfrak{T} im Raum gilt für sein Netzbild \mathfrak{T}' der

Satz 11. *Liegen die Bildpunkte der 4 Eckpunkte von \mathfrak{T} auf einem «Kreis», dann auch die Bildpunkte der 4 Ebenen von \mathfrak{T} und umgekehrt. Es ergibt sich somit für \mathfrak{T}' eine Konfiguration von 8 Punkten und 8 «Kreisen», wobei mit jedem «Kreis» 4 Punkte und mit jedem Punkt 4 «Kreise» inzidieren.*

Beweis (vgl. auch [9]): Wenn die 4 Bildpunkte der Eckpunkte von \mathfrak{T} auf einem «Kreis» liegen, dann haben die sie abbildenden Netzgeraden hyperboloidische Lage, d. h. sie gehören der gleichen Regelschar an. Nach einem auf M. CHASLES zurückgehenden, in [5] und [6] bewiesenen Satz gilt, dass mit den Verbindungsgeraden ent-



Figur 5

sprechender Punkte zweier Tetraeder stets auch die Schnittgeraden entsprechender Ebenen dieser Tetraeder *hyperboloidische Lage* haben. Da die Verbindungsgeraden der Eckpunkte zweier Tetraeder mit dem gleichen Bild \mathfrak{T}' aber die diese Eckpunkte abbildenden Netzgeraden sind, gilt bei hyperboloidischer Lage dieser Netzgeraden, dass dann auch die die Ebenen abbildenden Netzgeraden hyperboloidische Lage haben, d. h. deren Spurpunkte liegen auf einem «Kreis». – Die Umkehrung des Satzes folgt analog.

Als Sonderfall dieses Satzes ergibt sich aus Satz 8: Wenn die Punkte α' , β' und γ' auf einer Geraden liegen (der vierte Punkt δ' ist dann uneigentlicher Punkt), dann liegen die Punkte A' , B' , C' und D' auf einem «Kreis». D. h. es gilt der

Satz 12. *Die vier Um-«Kreise» der möglichen Teildreiecke eines vollständigen Vierseits schneiden sich in einem Punkt (Figur 5).*

W.-D. KLIX, Dresden