

Werk

Titel: Über Drehflächenumrisse in Perspektive und schiefer Axonometrie.

Autor: Tschupik, Josef P.

Jahr: 1968

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199_0023|log25

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band 23

Heft 4

Seiten 73–96

10. Juli 1968

Über Drehflächenumrisse in Perspektive und schiefer Axonometrie

Es sei ein Zentralriss (Perspektive) oder Parallelriss durch seine Bildebene Π und durch sein eigentliches oder uneigentliches Projektionszentrum O vorgegeben. Φ sei eine abzubildende Drehfläche; ihre Achse heisse a .

Der aus O an Φ gelegte Tangentialkegel bzw. -zylinder Ψ berührt Φ längs des sog. *wahren Umrisses* u von Φ – der i. allg. eine Raumkurve ist – und schneidet Π in dem von uns gesuchten sog. *scheinbaren Umriss* u^1 von Φ . Im Gegensatz zu den üblichen Konstruktionsmethoden, nach denen man zuerst die auf Φ liegende Kurve u und hierauf ihr Bild u^1 ermittelt, soll hier ein Weg gezeigt werden, bei dem man den wahren Umriss u nicht benützt.

Wir gehen davon aus, dass u^1 durch Kollineation bzw. Affinität aus jedem beliebigen (nicht durch O gehenden) ebenen Schnitt von Ψ gewonnen werden kann und benützen dann die Tatsache, dass sich insbesondere der Schnitt u^ε von Ψ mit einer beliebigen zu a normalen Ebene ε leicht konstruieren lässt. Es liegt nahe, ε als neue Bildebene und u^ε als *Hilfsumriss* von Φ in ε zu deuten¹⁾.

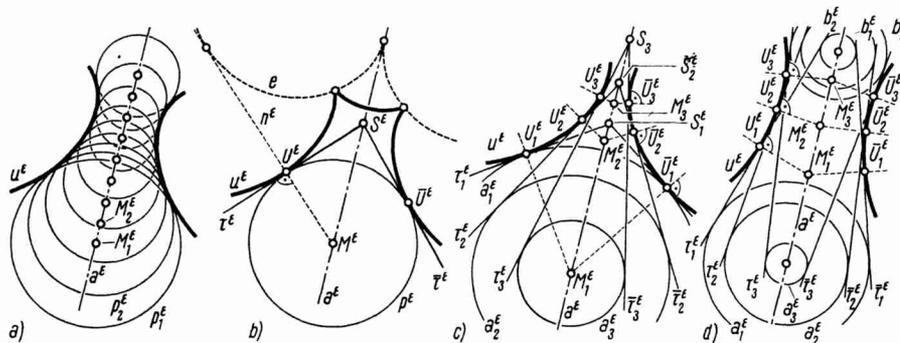
Das Verfahren ist vor allem für die Bedürfnisse der Architekturperspektive gedacht, kann jedoch auch in der schiefen Axonometrie eingesetzt werden. In der Perspektive ist es stets verwendbar, da sich immer eine geeignete zu a normale Ebene ε finden lässt, die nicht Sehebene ist. Bei einem Parallelriss kann es möglich sein, dass es keine derartige Ebene gibt. Denkt man sich den Parallelriss als schiefe Axonometrie, so wird man naheliegenderweise die Drehflächenachse in eine der Koordinatenachsen legen. Da dann aber die zu ihr normale Koordinatenebene gewiss keine Sehebene ist, ist bei solchen Anordnungen das Verfahren auch in schiefer Axonometrie stets verwendbar. Eine Verwendung bei Normalrissen – insbesondere in normaler Axonometrie – wäre möglich, doch besteht dort kein Grund, von den bewährten Verfahren abzugehen.

¹⁾ In diesem Zusammenhang sei auf den Aufsatz von F. HOHENBERG, *Ein einfacher Beweis des Satzes von Pohlke*, El. Math. 10 (1955) hingewiesen, in dem ein schiefaxonometrischer Kugelriss affin aus einem frontalaxonometrischen Hilfsumriss gewonnen wurde.

1. Bemerkungen zum Hilfssumriss u^ε in ε

1.1. Da die Parallelkreise p_i ($i = 1, 2, \dots$) von Φ parallel zu ε liegen, erscheinen sie bei Zentral- wie auch bei Parallelprojektion auf ε als Kreise p_i^ε (Figur 1a). Bilder ihrer auf a liegenden Mittelpunkte M_i sind die auf a^ε liegenden Mittelpunkte M_i^ε der p_i^ε . u^ε ist dann offenbar Hüllkurve der Kreise p_i^ε . Dies reicht bereits für eine Schnellkonstruktion von u^ε aus, wenn u^ε einfach ist, insbesondere also, wenn u^ε keine Spitzen besitzt.

1.2. Für höhere Ansprüche konstruieren wir u^ε punkt- und tangentialweise mit Hilfe der bekannten Kegelmethode²⁾ (Figur 1b). Wir bedenken dazu, dass die Tangentialebenen an Φ längs eines fixen Parallelkreises p einen Drehkegel (-zylinder) κ mit auf a liegender Spitze S umhüllen. $p^\varepsilon, S^\varepsilon$ seien die Bilder von p, S in ε .



Figur 1

Ist U ein auf p liegender Punkt des wahren Umrisses u , so berührt die in U an Φ gelegte Tangentialebene τ die Kurven u, p sowie die Flächen Ψ, κ in U und geht durch O und S . τ erscheint daher in ε als Tangente τ^ε aus S^ε an p^ε . Der Berührungspunkt U^ε von τ^ε mit p^ε ist nach dem Gesagten auch Berührungspunkt von τ^ε mit u^ε . Somit ist $\tau^\varepsilon, U^\varepsilon$ ein Linienelement von u^ε . Die zweite Tangente aus S^ε an p^ε liefert ein weiteres Linienelement $\bar{\tau}^\varepsilon, \bar{U}^\varepsilon$.

Verbindet man U^ε mit dem Mittelpunkt M^ε von p^ε , so erhält man die Kurvennormale n^ε von u^ε in U^ε . Man kann demnach mühelos die Evolute e von u^ε als Hüllkurve der Geraden n^ε zeichnen und gewinnt z.B. Spitzen oder Spitzpunkte von u^ε aus der bekannten Tatsache, dass sie auf e liegen müssen.

1.3. Da $\tau^\varepsilon, \bar{\tau}^\varepsilon$ den scheinbaren Umriss von κ in ε bilden, benötigt man für ihre Konstruktion nicht p^ε , sondern nur das Bild irgendeines Parallelkreises von κ . Man kommt so zu folgender modifizierter Konstruktion von u^ε (Figur 1c):

Für eine Serie von Parallelkreisen p_i ($i = 1, 2, \dots$) seien M_i die Mitten, κ_i die zugehörigen Tangentialkegel, S_i deren Spitzen und a_i die Schnittkreise der κ_i mit einer Normalebene α zu a . Liegen dann die Bilder $a_i^\varepsilon, S_i^\varepsilon, M_i^\varepsilon$ vor, so findet man die Umriss-erzeugenden $\tau_i^\varepsilon, \bar{\tau}_i^\varepsilon$ von κ_i als Tangenten aus S_i^ε an a_i^ε und die Umrisspunkte $U_i^\varepsilon, \bar{U}_i^\varepsilon$ auf ihnen als Fußpunkte der aus M_i^ε gefällten Normalen.

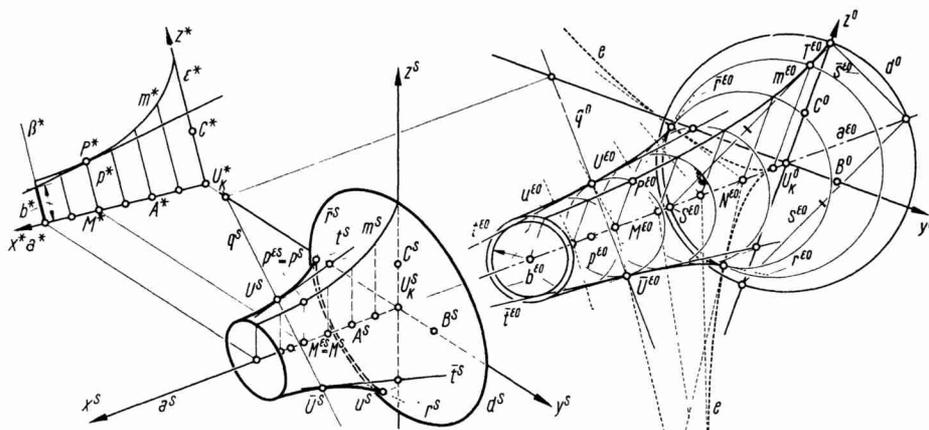
²⁾ Vgl. etwa E. MÜLLER und E. KRUPPA, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, 5. Aufl. (Springer, Wien 1948), S. 183.

1.4. Werden in der Anordnung 1.3. die S_i^e unzugänglich, so schneidet man die κ_i ausser mit α noch mit einer zweiten Normalebene β zu a nach Kreisen b_i . $\tau_i^e, \bar{\tau}_i^e$ sind dann gemeinsame Tangenten an \dot{a}_i und b_i (Figur 1d).

Je nach Gestalt des Umrisses u^e wird man eine der in 1.1. bis 1.4. angeführten Konstruktionen verwenden.

2. Umrisskonstruktion in schiefer Axonometrie

U_K^s, x^s, y^s, z^s seien die schiefaxonometrischen Bilder des Ursprungs und der Achsen und A^s, B^s, C^s die der Achseneinheitspunkte eines rechtwinkligen cartesischen Achsenkreuzes (Figur 2). Die Achse a der Drehfläche Φ liege in der x -Achse. Φ sei dadurch bestimmt, dass wir den in der xz -Ebene liegenden Meridian m von Φ im xz -Einschneideriss³⁾ \mathfrak{C}^* als m^* vorgeben. Als Hilfsebene ε wählen wir die yz -Ebene. ε erscheint im yz -Einschneideriss \mathfrak{C}^0 bis auf den Maßstab unverzerrt als ε^0 . u^{ε^0} wird sich daher leicht konstruieren lassen.



Figur 2

Aus den bekannten Eigenschaften des Einschneideverfahrens folgt, dass ε^0 aus dem axonometrischen Bild ε^s vermöge einer perspektiven Affinität \mathfrak{A} hervorgeht. \mathfrak{A} ist durch die entsprechenden Dreiecke $U_K^s B^s C^s, U_K^0 B^0 C^0$ festgelegt und besitzt die Einschneidestrahlen ($\parallel x^s$) als Affinitätsstrahlen. Konstruieren wir u^{ε^0} und führen u^{ε^0} vermöge \mathfrak{A}^{-1} in u^{ε^s} über, so ist u^{ε^s} bereits der gesuchte Umriss u^s von Φ . Da nämlich u, u^e, u^s auf demselben Sehstrahlenzylinder Ψ liegen, muss $u^{\varepsilon^s} \equiv u^s$ sein.

Wir betrachten nun die Konstruktion der von einem Parallelkreis p rührenden Umrisspunkte U^s, \bar{U}^s . p sei durch seinen Mittelpunkt M und seinen Schnittpunkt P mit m festgelegt und durch sein Bild p^* in \mathfrak{C}^* vorgegeben. Wir gehen zuerst von der zu z^* parallelen Strecke $M^* P^*$ mit Hilfe des Einschneideverfahrens zu $M^s P^s = M^{\varepsilon^s} P^{\varepsilon^s} (\parallel z^s)$ und hierauf vermöge \mathfrak{A} zu $M^{\varepsilon^0} P^{\varepsilon^0}$ in \mathfrak{C}^0 über. Der Bildkreis p^{ε^0} ist dann durch Mitte M^{ε^0} und Peripheriepunkt P^{ε^0} bestimmt. (Läuft P auf m , so beschreiben P^s, P^{ε^0} die Kurven m^s, m^{ε^0} .) Da in Figur 2 die Spitze des Φ längs p berührend-

³⁾ Hinsichtlich des Einschneideverfahrens vgl. etwa F. HOHENBERG, *Konstruktive Geometrie in der Technik*, 3. Aufl. (Springer, Wien-New York 1966), S. 81f.

den Kegels κ unzugänglich ist, wird κ mit der zu ε parallelen Ebene β nach dem Kreis b geschnitten. Der scheinbare Umriss von κ in ε^0 wird dann von einem Paar gemeinsamer Tangenten $t^{\varepsilon^0}, \bar{t}^{\varepsilon^0}$ an p^{ε^0} und b^{ε^0} gebildet. Die aus M^{ε^0} auf $t^{\varepsilon^0}, \bar{t}^{\varepsilon^0}$ gefälltten Normalen bedeuten gemäss 1. Tangenten der Evolute e von u^{ε^0} . Die auf $t^{\varepsilon^0}, \bar{t}^{\varepsilon^0}$ liegenden Normalenfußpunkte sind die Umrisspunkte $U^{\varepsilon^0}, \bar{U}^{\varepsilon^0}$ auf p^{ε^0} . Sie werden in Figur 2 mit Hilfe der Geraden q^0 der Affinität \mathfrak{A}^{-1} unterworfen und liefern so U^s, \bar{U}^s .

Vergleicht man den Verlauf von u^{ε^0} und e , so kann man ziemlich genau die Lage der Spitzen von u^{ε^0} abschätzen und durch geeignete Wahl des Parallelkreises graphisch ermitteln. In Figur 2 liefert der Parallelkreis mit dem Mittelpunkt N die Spitzen von u^{ε^0} mit den Spitzentangenten $r^{\varepsilon^0}, \bar{r}^{\varepsilon^0}$. Vermöge \mathfrak{A}^{-1} erhält man aus ihnen Spitzen und Spitzentangenten von u^s .

Kommt p^{ε^0} in eine Lage, in der seine beiden Berührungspunkte $U^{\varepsilon^0}, \bar{U}^{\varepsilon^0}$ mit u^{ε^0} in einem Punkt S^{ε^0} auf a^{ε^0} zusammenfallen, dann ist offenbar wegen der vierpunktigen Berührung von p^{ε^0} und u^{ε^0} der Punkt S^{ε^0} ein Scheitel von u^{ε^0} und p^{ε^0} der zugehörige Scheitelkrümmungskreis. Sein Mittelpunkt ist eine Spitze von e . Diese Situation tritt genau dann ein, wenn das Bild S^{ε^0} der Spitze S des Φ längs p berührenden Kegels auf p^{ε^0} zu liegen kommt. Da ein solcher Kegel einen Sehstrahl als Erzeugende besitzt, sind alle derartigen Kegel zueinander kongruent. Wir legen einen solchen Kegel durch den in ε liegenden Parallelkreis d von Φ . In \mathfrak{E}^0 bedeuten dann die Geraden $s^{\varepsilon^0}, \bar{s}^{\varepsilon^0}$ die Bilder seiner in der xz -Ebene liegenden Erzeugenden. Besitzt also m^{ε^0} Tangenten der Richtungen $s^{\varepsilon^0}, \bar{s}^{\varepsilon^0}$ so schneiden diese a^{ε^0} in Scheiteln von u^{ε^0} . In Figur 2 existiert eine Tangente der Richtung s^{ε^0} in T^{ε^0} und liefert den Scheitel S^{ε^0} .

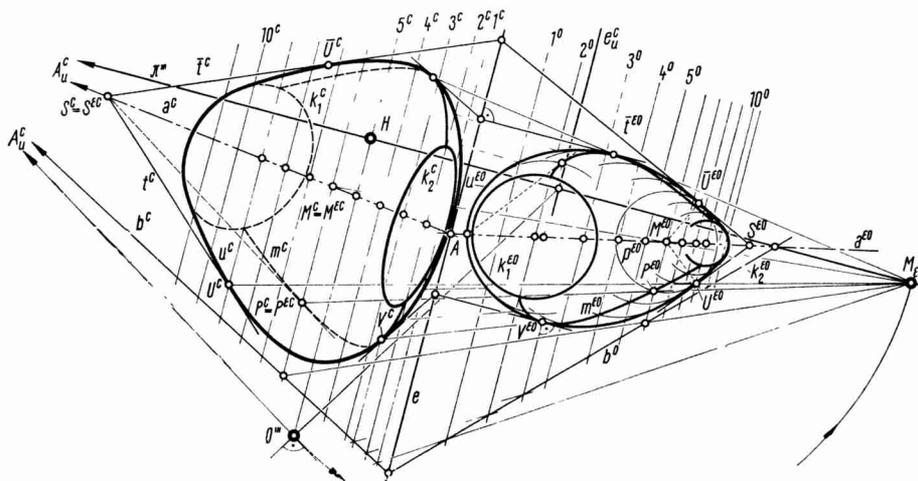
3. Umrisskonstruktion in Perspektive

Wir behandeln diese Konstruktion für den allgemeinsten Fall, dass die Achse a der Drehfläche Φ beliebig gegen die Bildebene Π geneigt ist. Die Perspektive sei durch Hauptpunkt H und Bildweite $d = H O''$ in Figur 3 festgelegt. a^c sei perspektives Bild, A_u^c Fluchtpunkt und A Bildspurpunkt von a . e und e_u^c seien Bildspur und Fluchtpunkt einer zu a normalen Ebene ε , wobei wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit e durch A legen⁴⁾. Φ sei durch das Bild m^c jenes Meridians m vorgegeben, dessen Ebene ebenfalls die Bildspur e hat. M_ε sei Drehsehnenfluchtpunkt (Messpunkt) für eine der beiden möglichen Drehungen von ε nach Π . Das unverzerrte Punktfeld der mit Π vereinigten Drehlage von ε bezeichnen wir mit ε^0 . Bekanntlich besteht zwischen den Punktfeldern ε^c und ε^0 eine perspektive Kollineation \mathfrak{R} mit Achse e , Gegenachse e_u^c und Zentrum M_ε . In der Drehlage ε^0 werden wir nun den Hilfssumriss u^ε von Φ als u^{ε^0} darstellen. Vermöge \mathfrak{R}^{-1} erhalten wir dann aus ihm den gesuchten Umriss u^c von Φ als $u^c = u^{\varepsilon^c}$.

Legt man durch einen Punkt P^c von m^c eine Parallele zu e (Bild einer Hauptgeraden von ε), so schneidet diese a^c im Bild M^c des Mittelpunktes des durch P gehenden Parallelkreises p von Φ . Bezeichnen wir die aus O auf ε projizierten Punkte mit dem Index $^\varepsilon$, so gilt $P^c = P^{\varepsilon^c}$ und $M^c = M^{\varepsilon^c}$. Vermöge \mathfrak{R} gehen $M^{\varepsilon^c}, P^{\varepsilon^c}$ in $M^{\varepsilon^0}, P^{\varepsilon^0}$ über und es ist der Bildkreis p^{ε^0} von p durch Mitte M^{ε^0} und Peripheriepunkt

⁴⁾ Verschiebt man ε parallel, so erhält man ähnliche Schnitte des aus O an Φ gelegten Tangentialkegels ψ . Durch die Wahl von e kann man daher die Grösse des Hilfssumrisses beeinflussen.

P^{ϵ^0} bestimmt. In gleicher Weise transformieren wir den Punkt S^{ϵ^c} nach S^{ϵ^0} , wobei S den Schnittpunkt der Tangente von m in P mit a – also die Spitze des Φ längs p berührenden Kegels κ – bedeute. Gemäss 1. liefern dann die aus S^{ϵ^0} an p^{ϵ^0} gelegten Tangenten zwei Linienelemente $U^{\epsilon^0}, t^{\epsilon^0}$ und $\bar{U}^{\epsilon^0}, \bar{t}^{\epsilon^0}$ des Hilfssumrisses u^{ϵ^0} . Vermöge \mathfrak{R}^{-1} erhält man aus ihnen die Linienelemente U^c, t^c und \bar{U}^c, \bar{t}^c von u^c .



Figur 3

Figur 3 zeigt die Schnellkonstruktion von u^c . u^{ϵ^0} wird zuerst als Hüllkurve der Kreise p^{ϵ^0} gewonnen. Hierauf werden die Schnittpunkte von u^{ϵ^0} mit einem System zu e paralleler Geraden $1^{\circ}, 2^{\circ}, 3^{\circ}, \dots$ der Kollineation \mathfrak{R}^{-1} unterworfen⁵⁾. (Da a^{ϵ^0} und a^c von den Kollineationsstrahlen sehr schleifend geschnitten werden, werden $1^{\circ}, 2^{\circ}, \dots$ nicht vermöge ihrer Schnittpunkte mit a^{ϵ^0} , sondern vermöge jener mit einer günstigen Hilfsgeraden b^0 transformiert). Den Scheitel von u^{ϵ^0} gewinnt man durch die bereits in 2. beschriebene Überlegung.

Im selben Arbeitsgang mit der Umrisskonstruktion können auch Parallelkreise und Meridiane von Φ dargestellt werden. Dass die Parallelkreisbilder k_1^c, k_2^c (Ellipsen) in Figur 3 vermöge \mathfrak{R}^{-1} aus den Kreisen $k_1^{\epsilon^0}, k_2^{\epsilon^0}$ hervorgehen, ist einleuchtend. Für die Meridiantdarstellung ist nur zu bedenken, dass eine fixe Meridianebene die Parallelkreisebenen nach parallelen Durchmesser der Parallelkreise schneidet. Man müsste also nur eine solche Schar paralleler Durchmesser in ϵ^0 abbilden, mit den Parallelkreisbildern schneiden und das durch diese Schnittpunkte bestimmte Meridianbild vermöge \mathfrak{R}^{-1} transformieren.

Berührt ein Meridianbild m^{ϵ^0} ein Parallelkreisbild p^{ϵ^0} , so ist offenbar die von den Tangenten an m und p im Schnittpunkt V von m und p aufgespannte Tangentialebene an Φ eine Sehebene, also V ein Punkt des wahren Umrisses u . Berührungspunkte von m^{ϵ^0} mit Parallelkreisbildern liefern demnach vermöge \mathfrak{R}^{-1} die Umrisspunkte von m^c ,

⁵⁾ Wenn e_u^c von u^c geschnitten wird, hat u^{ϵ^0} Fernpunkte. In einem solchen Fall wird man von der in 1.4. angegebenen Konstruktion ausgehen und u^c evtl. tangentialweise ermitteln.