# Aufgaben

**Aufgabe 549.** Werden die Kanten eines regulären Polyeders auf eine beliebige Ebene projiziert, so ist die Summe der Quadrate der Kantenprojektionen stets gleich 2/3 der Summe aller Kantenquadrate. W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

*Lösung:* Es sei $Q$ die Summe der Kantenquadrate und $Q'_\varepsilon$ bzw. $Q'_n$ die Summe der Quadrate der Kantenprojektionen auf die Ebene $\varepsilon$ bzw. auf eine Normale $n$ zu $\varepsilon$. Dann ist $Q = Q'_\varepsilon + Q'_n$. Man hat nun nur zu zeigen, dass $Q'_n$ von der Lage von $n$ im Raum unabhängig ist (Aussage $U$). Dann gilt nämlich für ein rechtwinkliges $xyz$-System

$$Q'_n = Q'_x = Q'_y = Q'_z = (Q'_x + Q'_y + Q'_z)/3 = Q/3$$

und somit $Q'_\varepsilon = 2\,Q/3$.

*1. Würfel:* Bildet die Gerade $n$ die Winkel $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ mit drei zueinander senkrechten Kanten eines Einheitswürfels, so ist

$$Q'_n = 4\,(\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3) = 4.$$

*2. Tetraeder:* Die Kanten können hier durch drei paarweise orthogonale Einheitsvektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ in der Form $\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} \pm \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c} \pm \boldsymbol{a}$ dargestellt werden. Ist $\boldsymbol{n}$ der Einheitsvektor der Geraden $n$, so gilt

$$Q'_n = (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{n} + \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{n})^2 + (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{n} - \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{n})^2 + \dots = 4\,\{(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{n})^2 + (\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{n})^2 + (\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{n})^2\} = 4 \text{ (Würfel!)}.$$

*3. Oktaeder:* Die Kanten sind parallel zu den 12 Kanten der beiden umbeschriebenen Tetraeder. Deshalb gilt die Aussage $U$ auch hier.

*4. Dodekaeder:* Die Kanten sind parallel zu den Kanten der 5 einbeschriebenen Würfel. (Die 60 Würfelkanten sind die 60 Flächendiagonalen des Dodekaeders, und diese sind parallel zu den Seiten der Fünfecke.)

*5. Ikosaeder:* Je 5 Kanten bilden ein reguläres Fünfeck, dessen Ecken die Endpunkte der von einer Körperecke ausgehenden Kanten sind. Die Ebenen der Fünfecke sind parallel zu denen eines regulären Dodekaeders. Die Aussage $U$ gilt also auch hier.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

O. REUTTER (Ochsenhausen) weist darauf hin, dass die Aussage der Aufgabe richtig bleibt, wenn man «Kanten» durch «Flächen» und 2/3 durch 1/3 ersetzt. Er bemerkt ferner, dass beide Aussagen auch für semireguläre (abgeeckte reguläre) Polyeder gelten. Zum Beweis sei $\{\boldsymbol{a}_i\,(x_i, y_i, z_i)\}$ eine Menge von endlich vielen Vektoren, die die Bedingungen $\Sigma x_i^2 = \Sigma y_i^2 = \Sigma z_i^2 =$ konst. (1) und $\Sigma x_i\, y_i = \Sigma y_i\, z_i = \Sigma z_i\, x_i = 0$ (2) erfüllen. Dann gilt, wie man leicht nachrechnet, für einen beliebigen Einheitsvektor $\boldsymbol{n}$

$$Q'_n = \Sigma|\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}_i|^2 = (1/3)\,\Sigma|\boldsymbol{a}_i|^2,\quad Q'_\varepsilon = \Sigma|\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{a}_i|^2 = (2/3)\,\Sigma|\boldsymbol{a}_i|^2.$$

Ein semireguläres Polyeder $P$ kann nun als Durchschnitt zweier dualer regulärer Polyeder $P_1$ und $P_2$ dargestellt werden. Man kann also die Flächenvektoren von $P$ derart in zwei Untermengen $F_1$ und $F_2$ einteilen, dass jedem zu $F_1$ bzw. $F_2$ gehörenden Flächenvektor genau ein proportionaler Flächenvektor von $P_1$ bzw. $P_2$ zugeordnet ist. Innerhalb jeder der beiden Untermengen sind dann die Proportionalitätsfaktoren identisch. (1) und (2) sind für die Vektormengen $F_1$ und $F_2$ richtig, da sie für reguläre Polygone gelten. Also gelten (1) und (2) auch für die Vereinigungsmenge. Analog gibt es für die Kantenvektoren eine Einteilung in drei Untermengen $K_1$, $K_2$, $K_3$.

Eine weitere Lösung (mit Verallgemeinerungen) sandte I. PAASCHE (München).

**Aufgabe 550.** $n > 1$ sei eine gegebene natürliche Zahl. Für welche rationalen Zahlen $r$ hat die Diophantische Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_2 & x_3 & x_n & rx_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & rx_1 & rx_{n-2} & rx_{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

eine Lösung $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ mit rationalen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$?

E. TROST, Zürich

*Lösung des Aufgabenstellers:* Es sei $R$ der Körper der rationalen Zahlen, $R[X]$ der Polynomring über $R$, $\varphi(X) = X^n - r$ ($r \in R$) und $\bar{R}$ der Restklassenring $R[X]/(\varphi(X))$. Wir betrachten in $\bar{R}$ die Elemente

$$a = x_n + x_{n-1} X + \ldots + x_1 X^{n-1}, \; b = y_1 + y_2 X + \ldots + y_n X^{n-1}.$$

Die Gleichung $a\,b = 0$ in $\bar{R}$ ist äquivalent mit dem linearen Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = 0 \\ x_2 y_1 + x_3 y_2 + \ldots + r x_1 y_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n y_1 + r x_1 y_2 + \ldots + r x_{n-1} y_n = 0 \end{array} \right|, \tag{1}$$

in welchem $y_1, y_2, \ldots y_n$ als Unbekannte betrachtet werden sollen. Die Determinante $D$ von (1) stimmt dann mit der Determinante der Aufgabe überein. Ist $D \neq 0$, so hat (1) nur die Lösung $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$. Für $D = 0$, $a \neq 0$ gibt es nichttriviale Lösungen von (1) und $\bar{R}$ enthält also Nullteiler. Hieraus folgt, dass $\varphi(X)$ in $R$ reduzibel ist, denn für ein irreduzibles Polynom ist $\bar{R}$ ein Körper und enthält keine Nullteiler. Nach einem Satz von CAPELLI (vgl. etwa N. Tschebotareff, Grundzüge der Galoischen Theorie, p. 294) ist $\varphi(X)$ genau in den folgenden Fällen reduzibel: 1. $r = s^d$, $d \mid n$, $d > 1$, $s \in R$. 2. $4 \mid n$, $r = -4t^4$, $t \in R$. In diesen Fällen hat also auch die Diophantische Gleichung $D = 0$ eine nichttriviale rationale Lösung. Bemerkung: Man kann $R$ durch einen beliebigen Zahlkörper ersetzen.

L. CARLITZ erhält durch Umformen von $D$ in eine Zirkulante als notwendige und hinreichende Bedingung für $D = 0$ die Gleichung

$$s^{n-1} x_1 + s^{n-2} x_2 + \ldots + x_n = 0, \tag{2}$$

wo $s$ irgendeine (komplexe) Zahl mit $s^n = r$ ist. Wir betrachten das Beispiel $n = 4$. Setzt man $r = t^2$, $t \in R$, $s^2 = \pm t$, so ergibt sich aus (2) zur Bestimmung der $x_i$ das System

$$\left| \begin{array}{l} \pm t x_1 + x_3 = 0 \\ \pm t x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right|.$$

Für $r = -4t^4$ erhält man das System

$$\left| \begin{array}{l} 2t^2 x_1 + 2t x_2 + x_3 = 0 \\ -2t^3 x_1 + t x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right|.$$

L. BERNSTEIN weist auf seine Arbeit «The Generalized Pellian Equation» (Trans. Amer. Math. Soc. *127*, 76–89 (1967)) hin, in der er gezeigt hat, dass die Norm im Körper $R(2^{1/n})$ als Determinante $D$ geschrieben werden kann. Damit erhält er explizite Lösungen der Gleichung $D = 0$, z.B. für $n = p =$ Primzahl

$$x_{i+1} = (-1)^i \binom{p-1}{i} t^i, \; t \in R, \; t^p = r, \; i = 0, 1, \ldots, p-1.$$

**Aufgabe 551.** Man beweise: Ist $e_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k/k$ als reduzierter Bruch dargestellt und $\alpha_n$ der Exponent von 2 in der Primzahlpotenzzerlegung des Zählers, so strebt $\alpha_n$ mit $n$ gegen $+\infty$.
WALDEMAR SCHÖBE, München

*1. Lösung:* Es ist

$$e_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^2 x^{k-1}\,dx = \int_0^2 \left(\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}\right) dx = \int_0^2 f(x)\,dx$$

mit $f(x) = (x^n - 1)/(x - 1)$ für $x \neq 1$, $f(1) = n$, also

$$e_n = \int_{-1}^{1} f(1+t)\,dt = \int_{-1}^{1} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} t^{k-1}\right) dt = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1-(-1)^k}{k}$$

$$= 2 \sum_{k \gtrless 1} \binom{n}{2k-1} \frac{1}{2k-1}\,.$$

Nun sei $a \geqq 3$ eine beliebig grosse natürliche Zahl, $N = \varphi(2^a) - 1 = 2^{a-1} - 1$. Dann ist nach dem kleinen Fermatschen Satz für jede ungerade natürliche Zahl $u$ die Kongruenz $u^N \equiv 1/u \pmod{2^a}$ erfüllt. Weiter gilt wegen $2^{a-1} - 1 \geqq a$ für $a \geqq 3$ für jede gerade Zahl $g$ die Kongruenz $g^N \equiv 0 \pmod{2^a}$. Mod $2^a$ hat man somit

$$\sum_{k \gtrless 1} \binom{n}{2k-1} \frac{1}{2k-1} \equiv \sum_{k \gtrless 1} \binom{n}{2k-1} (2k-1)^N - \sum_{k \gtrless 0} \binom{n}{2k} (2k)^N$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^N\,.$$

Die letzte Summe verschwindet aber für $n > N$, weil die Zahlen $0^N, 1^N, 2^N, \ldots$ eine arithmetische Folge $N$-ter Ordnung bilden (vgl. die Lösung der Aufgabe 438, El. Math. *18*, 115 (1963)). Also ist $e_n \equiv 0 \pmod{2^{a+1}}$ für $n > N$, d.h. $\alpha_n > a$ für alle $n > N$, w.z.b.w.
E. TEUFFEL, Korntal/Stuttgart

*2nd solution:* In the 2-adic domain $\Omega(2)$ the series $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} x^k/k$ converges provided $2 \mid x$, $x \in \Omega(2)$. In particular $\log(-1) = -\sum_{k=1}^{\infty} 2^k/k$. Moreover, since $\log(1+x)^2 = 2\log(1+x)$, we get $0 = \log 1 = 2\log(-1)$, so that $\log(-1) = 0$. This is equivalent to the statement

$$e_n \equiv 0 \pmod{2^{\alpha_n}},\ \alpha_n \to \infty.$$

L. CARLITZ, Duke Univ. USA

**Aufgabe 537.** Ein gegebener Kreis $K$ wird von zwei zueinander orthogonalen Kreisen $K_1$, $K_2$, die durch einen festen Punkt $F$ seiner Ebene gehen, berührt. Welches ist der geometrische Ort der Ähnlichkeitszentren von $K_1$ und $K_2$? C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

*2. Lösung (und Verallgemeinerung):* Bezeichnen $M$, $M_i$ die Mittelpunkte und $r$, $r_i$ die Radien der Kreise $K$, $K_i$ $(i = 1, 2)$, so gilt $|M M_i \pm M_i F| = r$. Die Punkte $M_i$ liegen also auf einem Kegelschnitt $Q$ mit den Brennpunkten $M$, $F$, der eine Ellipse oder eine Hyperbel ist, je nachdem $F$ innerhalb oder ausserhalb von $K$ liegt. $F$ auf $K$ ergibt triviale Ausartun-