Insgesamt haben wir also bewiesen, dass für alle $\lambda \in \Lambda$ stets $2\,\nu$ $(\nu \neq 0)$ im Nenner ein unkürzbares nichttriviales Quadrat enthält. Also gibt es auf jeder Geraden $\lambda = t/\tau =$ const. eine dichte Punktmenge, für die (16) irreduzibel ist. Da Λ in $\boldsymbol{Q}$ dicht liegt, haben wir eine dichte Menge rationaler λ, ν und damit auch eine in D' dichte Menge rationaler (p, q) gefunden, für die (16) über den rationalen Zahlen irreduzibel ist. Für diese Koeffizienten hat (16) keine konstruierbaren Nullstellen.

Die Punkte $(p, q) \in D'$ mit rationalen Komponenten, aus denen sich die zugehörigen Winkel α, β nicht konstruieren lassen, liegen also in D' dicht, erst recht sämtliche Punkte $(p, q) \in D'$, aus denen sich die zugehörigen Winkelpaare $(\alpha, \beta) = A^{-1}(p, q)$ nicht konstruieren lassen.

Insgesamt wissen wir also bisher, dass die Punkte $(p, q) \in D'$, aus denen sich die $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ konstruieren, wie nicht konstruieren lassen, in D' dicht liegen. Weiter liegen die Tripel (p, q, R) mit aus p und q konstruierbarem Umkreisradius R in $D' \times \boldsymbol{R}$ dicht, da die (schlechthin) konstruierbaren Radien R in den reellen Zahlen $\boldsymbol{R}$ dicht liegen. Diese Voraussetzung ist etwa für alle p, q und R mit festem und konstruierbaren $|\,\mathfrak{h} - \mathfrak{m}\,|$ erfüllt. Also liegen die Tripel (p, q, R) derjenigen Dreiecke, die sich aus p, q, R konstruieren, wie nicht konstruieren lassen, in $D' \times \boldsymbol{R}$ dicht. Bei festem $|\,\mathfrak{h} - \mathfrak{m}\,|$ gilt das entsprechend für die Schnittpunkte $\mathfrak{w} \in D''$, q.e.d.

K. KOPFERMANN, Hannover

LITERATUR

[1] BIEBERBACH, LUDWIG, *Theorie der geometrischen Konstruktionen*, Basel 1952.
[2] KOOISTRA, *Dreiecksungleichungen*, El. Math. *15*, 79–80 (1960).
[3] STEINIG, J., *Inequalities concerning the Inradius and Circumradius of a Triangle*, El. Math. *18*, 127–131 (1963).
[4] VELDKAMP, G. R., *Note on a Paper by* J. STEINIG, El. Math. *19*, 87–88 (1964).

Kleine Mitteilungen

Area of the Union of Disks

At the Conference on Geometry in Eger in 1953, SZELE set forth a problem, which was written to him by KNESER. The problem, which has become well known since then, is the following. A set of n circular disks is given on the plane. Change the position of the disks in such a way that their distances from each other decrease. (The term 'it decreases' will always be used in the weak sense, i.e. it means that 'it does not increase'.) Is it true that the area covered by the disks decreases? The obvious conjecture is *yes*, but this has not been proved yet, and the answer seems to be rather difficult.

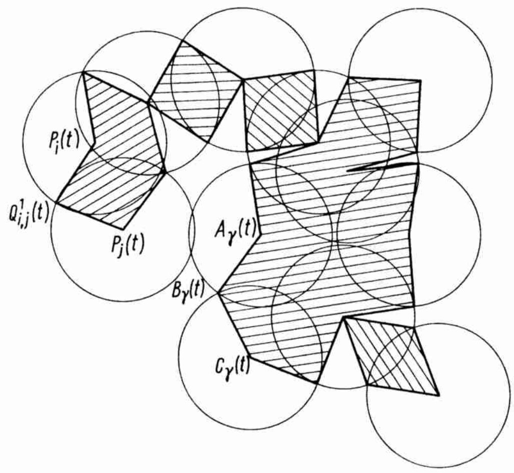
In this note a partial solution of this problem will be presented. Namely it will be proved (theorem 2) that if the disks are congruent and they can be moved *continuously* in such a way that the distance of any two centres decreases continuously, then the area covered by the disks also decreases. The proof is based on a similar statement about the perimeter length of the union of disks.

Let $P_i(t)$ be points on the plane for $i = 1, 2, \ldots, n$ and $0 \leqslant t \leqslant 1$. Suppose $P_i(t)$ is a continuous function of t and $S(P_i(t), P_j(t))$ is a decreasing function of t for every pair i, j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Denote by $U(t)$ the union of unit disks with centres $P_1(t), P_2(t), \ldots, P_n(t)$.

Theorem 1. *If $p(t)$ denotes the perimeter length of $U(t)$, then $p(t)$ is decreasing in* $[0, 1]$.

Denote by $Q^1_{i,j}(t)$ and $Q^2_{i,j}(t)$ the common points of the circles with centres $P_i(t)$ and $P_j(t)$, provided they exist. Let $B_\gamma(t)$ ($\gamma \in \Gamma(t)$, a set of indices) denote the points $Q^k_{i,j}(t)$ on the boundary of $U(t)$, and if $B_\gamma(t) \equiv Q^k_{i,j}(t)$ then let $A_\gamma(t) = P_i(t)$ and $C_\gamma(t) = P_j(t)$. The union of the segments $A_\gamma(t)\,B_\gamma(t)$, $B_\gamma(t)\,C_\gamma(t)$ forms some polygons, which are completely covered by $U(t)$ (see the figure). Denote the sum of the angles of these polygons by $\sigma(t)$. Then the perimeter length of $U(t)$ is the following:

$$p(t) = 2\,n\,\pi - \left((\sigma(t) - \sum_{\gamma\in\Gamma(t)} \sphericalangle\, A_\gamma(t)\,B_\gamma(t)\,C_\gamma(t)\right) = (2\,n\,\pi - \sigma(t)) + \sum_{\gamma\in\Gamma(t)} \sphericalangle\, A_\gamma(t)\,B_\gamma(t)\,C_\gamma(t)\,.$$



Suppose $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1$, and the polygons, belonging to t_1 and t_2, are formed by the segments $Q^k_{i,j}(t)\,P_i(t)$ with the same indices and they are in the same cyclic order. Then $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$, and as $S(P_i(t), P_j(t))$ decreases, the angle $P_i(t)\,Q^k_{i,j}(t)\,P_j(t)$ also decreases, consequently

$$\sum_{\gamma\in\Gamma(t_1)} \sphericalangle\, A_\gamma(t_1)\,B_\gamma(t_1)\,C_\gamma(t_1) \geqslant \sum_{\gamma\in\Gamma(t_2)} \sphericalangle\, A_\gamma(t_2)\,B_\gamma(t_2)\,C_\gamma(t_2)\,,$$

from which it follows that $p(t_1) \geqslant p(t_2)$.

But as there are only finitely many $Q^k_{i,j}(t)\,P_i(t)$ segments, only finitely many different sets of polygons exist. Using the continuity of $p(t)$, it is easily seen that this implies the statement of the theorem.

Theorem 2. *If $a(t)$ denotes the area of $U(t)$, then $a(t)$ is decreasing.*

Suppose $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1$. Denote by $p(r, t)$ and $a(r, t)$ the perimeter length and the area, respectively, of the union of the disks of radii r with centres $P_1(t), P_2(t), \ldots, P_n(t)$. It is easily seen that $a(r, t)$, as a function of r, is differentiable and $(\partial a(r, t)/\partial r) = p(r, t)$. On the other hand $a(0, t) = 0$ for all t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, and, according to theorem 1, $p(r, t_1) \geqslant p(r, t_2)$ for all r, $0 \leqslant r \leqslant 1$. Consequently $a(1, t_1) \geqslant a(1, t_2)$, i.e. $a(t_1) \geqslant a(t_2)$, the function $a(t)$ decreases in $[0, 1]$.

BÉLA BOLLOBÁS, Math. Research Institute, Budapest

Überall maximale Funktionen

In Aufgabe 522 (El. Math. *21*, 42 (1966)) wurde die Frage aufgeworfen: Existiert auf den rationalen bzw. reellen Zahlen eine Funktion, welche überall ein lokales strenges Extremum besitzt? Im ersten Falle ist die Antwort «ja», im zweiten «nein»; hier wird in einem allgemeineren Rahmen eine Antwort gegeben.

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, $(Y, <)$ eine irreflexiv totalgeordnete Menge und f eine Abbildung von X nach Y. Man nennt einen Punkt $x \in X$ lokales Maximum von f, wenn eine offene Umgebung $U(x)$ von x existiert, so dass jedes $y \in U(x)$ mit $y \neq x$ die Eigenschaft $f(y) < f(x)$ hat; f heisse Maximalfunktion, wenn f in jedem Punkt von X ein lokales Maximum hat. In dieser Note wird die Frage behandelt, wann ein topologischer Raum eine Maximalfunktion zulässt.

Definition. $(X, \mathfrak{T})$ heisst *M-Raum*, wenn eine Abbildung $V: X \to \mathfrak{T}$ existiert mit

(1) $x \in V(x)$;

(2) für kein n-Tupel ($n \geqslant 2$) paarweise verschiedener Punkte $x_1, \ldots, x_n$ aus X gilt $x_i \in V(x_{i+1})$, $1 \leqslant i < n$ und $x_n \in V(x_1)$.

Aus dieser Definition folgt sofort, dass die Mächtigkeit eines M-Raumes X nicht grösser ist als die Mächtigkeit jeder beliebigen Basis von X, da die Funktion V insbesondere injektiv ist. Ein M-Raum ist immer ein T_0-Raum. Andererseits zeigt das Beispiel der reellen Zahlen, dass selbst ein normaler Raum nicht notwendig ein M-Raum ist. Jedoch ist ein endlicher T_0-Raum immer ein M-Raum; man setze nur $V(x) = \bigcap_{x \in U \in \mathfrak{T}} U$, dann folgt aus $x_i \in V(x_{i+1})$ für $1 \leqslant i < n$, dass $x_1 \in V(x_n)$ und wegen der T_0-Eigenschaft $x_n \notin V(x_1)$ gilt.

Für abzählbare Räume lässt sich obige Definition noch vereinfachen, denn es gilt:

Satz 1. *Ein höchstens abzählbarer Raum X ist genau dann M-Raum, wenn eine Funktion $V: X \to \mathfrak{T}$ existiert mit*

(1) $x \in V(x)$;

(3) *für kein Paar verschiedener Punkte x, y aus X gilt $x \in V(y)$ und $y \in V(x)$.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein Abschnitt A der natürlichen Zahlen mit $X = \{x_i \mid i \in A\}$ und eine Funktion V mit (1) und (3). Die durch

$$V^*(x_0) = V(x_0), \quad V^*(x_{i+1}) = V(x_{i+1}) \cap \bigcap_{\substack{k \leqslant i \\ x_{i+1} \in V^*(x_k)}} V^*(x_k)$$

definierte Funktion V^* erfüllt dann (1) und (2). Denn wäre (2) für ein n-Tupel ($n > 2$) verletzt, so auch für ein $(n-1)$-Tupel, da sich das Element mit grösstem Index nach Konstruktion von V^* eliminieren lässt; folglich auch für ein 2-Tupel im Widerspruch zu (3).

Einen Zusammenhang zwischen Maximalfunktionen und M-Räumen beschreibt der

Satz 2. *Zu einem topologischen Raum X existiert genau dann eine irreflexive Totalordnung $(Y, <)$ und eine Maximalfunktion $f: X \to Y$, wenn X ein M-Raum ist.*

Beweis. Die Notwendigkeit des Kriteriums ist klar. Sei nun X ein M-Raum. Dann ist die folgende Relation eine irreflexive Halbordnung auf X: $x \sqsubset y$ für $x, y \in X$ genau dann, wenn ein n-Tupel ($n \geqslant 2$) von Punkten $x_1, \ldots, x_n$ aus X existiert mit $x_1 = x$, $x_n = y$, $x_i \neq x_{i+1}$ und $x_i \in V(x_{i+1})$ für $1 \leqslant i < n$.

Eine solche Halbordnung lässt sich bekanntlich zu einer irreflexiven Totalordnung auf ganz X ausdehnen[1]). Der Vollständigkeit halber wird hier ein Beweis gegeben.

Sei

$S = \{(X', <) \mid X' \subseteq X$, $<$ «$<$» Totalordnung und eine Fortsetzung der $\sqsubset$-Ordnung$\}$ und sei S halbgeordnet durch: $(X'_1, <_1) \prec (X'_2, <_2)$ genau dann, wenn $X'_1 \subseteq X'_2$ und $<_2 \mid X'_1 = <_1$. Dann erfüllt $(S, \prec)$ die Voraussetzung des Zornschen Lemmas, denn S ist nicht leer und jede Kette besitzt eine obere Schranke, nämlich ihre Vereinigung, daher enthält S ein maximales Element $(X_0, <)$. Es muss $X_0 = X$ sein, denn falls ein $x \in X - X_0$ existierte, liesse sich die Ordnung von X_0 auf $X_0 \cup \{x\}$ in naheliegender Weise fortsetzen, was der Maximalität von $(X_0, <)$ widerspricht. Es sei nun $(Y, <) = (X, <)$ und f die Identität, offensichtlich ist f eine Maximalfunktion.

Die so konstruierte Funktion f ist im allgemeinen nicht die günstigste, d.h. es gibt i.allg. noch Maximalfunktionen mit echt grösserem Kern. (Wenn z.B. X ein diskreter Raum ist, genügt es, Y einelementig zu wählen.) Die Vermutung jedoch, dass ein Wertebereich existiert, welcher sich in die Wertebereiche aller Maximalfunktionen von X isomorph einbetten lässt, wird durch folgendes Beispiel widerlegt: Sei N die Menge der

[1]) E. Szpilrajn, *Sur l'extension de l'ordre partiel*, Fund. Math. *16*, 386–389 (1930).