

Werk

Titel: Un théorème sur les nombres triangulaires.

Autor: Sierpinski, W.

Jahr: 1968

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199_0023|log13

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Un théorème sur les nombres triangulaires

Les nombres triangulaires sont des nombres $t_n = n(n+1)/2$, où $n = 1, 2, \dots$. Le but de cette note est de démontrer d'une façon élémentaire le théorème suivant:

Théorème. *Il existe une infinité de nombres triangulaires qui sont à la fois sommes, différences et produits de deux nombres triangulaires > 1 .*

Démonstration. Les nombres $x = y = 1$ satisfont à l'équation

$$x(x+1) - 2y(y+1) + 2 = 0 \quad (1)$$

Or, vu l'identité

$$(3x+4y+3)(3x+4y+4) - 2(2x+3y+2)(2x+3y+3) = x(x+1) - 2y(y+1)$$

on voit que si les nombres naturels x et y satisfont à l'équation (1), les nombres naturels $3x+4y+3$ et $2x+3y+2$ qui sont plus grands que x et y satisfont aussi à l'équation (1). Cette dernière a donc une infinité de solutions en nombres naturels x et y plus grands que 1. Par exemple de la solution $x = y = 1$ on obtient la nouvelle solution $x = 10, y = 7$ qui donne ensuite la solution $x = 61, y = 43$, et ainsi de suite.

Soit $x > 1$ et $y > 1$ une solution de l'équation (1) en nombres naturels. D'après (1) on aura

$$t_x + 1 = 2t_y,$$

d'où

$$t_{t_x} = \frac{t_x(t_x+1)}{2} = t_x t_y. \quad (2)$$

Or, comme on le vérifie sans peine, on a, pour $n = 2, 3, \dots$

$$n = t_n - t_{n-1} \quad \text{et} \quad t_n = t_{t_{n-1}} + t_n.$$

D'après (2) on a donc

$$t_{t_x} = t_{t_{x-1}} + t_x = t_{t_{t_x}} - t_{t_{t_x}-1} = t_x t_y.$$

Par exemple, pour $x = 10, y = 7$, on trouve

$$t_{55} = t_{54} + t_{10} = t_{1540} - t_{1530} = t_{10} t_7.$$

Or, on a aussi

$$t_8 = t_5 + t_8 = t_{13} - t_{10} = t_3 t_3, \quad t_{20} = t_{14} + t_{14} = t_{21} - t_8 = t_8 t_4.$$

Il est à remarquer que s'il s'agissait seulement de démontrer qu'il existe une infinité de nombres naturels qui sont à la fois sommes, différences et produits de deux nombres triangulaires > 1 , on pourrait le faire d'une façon élémentaire en deux lignes, puisque ça résulte tout de suite de l'identité (qu'on vérifie sans peine):

$$t_{t_n-1} + t_{t_n} = t_{t_n}^2 - t_{t_n-1}^2 = t_n t_n \quad \text{pour} \quad n = 2, 3, \dots$$