Dann kommutiert die Figur für alle Urbilder von $n = 2$, nämlich für (1, 1), (1, 2), (2, 1). Für ein $n > 2$ seien Injektionen π von $\mu^{-1}\{1, 2, \ldots, n-1\}$ in N und ϱ von $\alpha^{-1}\{1, 2, \ldots, n-1\}$ in N sowie eine Bijektion φ von $\alpha^{-1}\pi\mu^{-1}\{1, \ldots, n-1\}$ auf $\mu^{-1}\varrho\alpha^{-1}\{1, \ldots, n-1\}$ so definiert, dass das Diagramm kommutativ ist. Hat dann n die Primfaktorzerlegung $n = \prod_\nu p_\nu^{q_\nu}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_ν, so existieren genau $m_n := \prod (q_\nu + 1)$ formal verschiedene Zerlegungen $n = a_\nu b_\nu$ in natürliche Zahlen a_ν, b_ν $(1 \leqslant \nu \leqslant m_n)$. Wenn $N - \varrho\alpha^{-1}\{1, \ldots, n-1\} =: \{c_1, c_2, \ldots\}$ mit $c_1 < c_2 < \ldots$ ist, dann definiere man $\varrho(1, n-1) := c_1$, $\varrho(2, n-2) := c_2, \ldots,$ $\varrho(n-2, 2) := c_{n-2}$.

Ferner setze man $\pi(a_1, b_1) := d_1, \ldots, \pi(a_{m_n-1}, b_{m_n-1}) := d_{m_n-1}$, sofern $N - \pi\mu^{-1}\{1, \ldots, n-1\} =: \{d_1, d_2, \ldots\}$ mit $d_1 < d_2 < \ldots$ gilt. Sodann wähle man $\pi(a_{m_n}, b_{m_n})$ aus $N - (\pi\mu^{-1}\{1, \ldots, n-1\} \cup \{d_1, \ldots, d_{m_n-1}\})$ so gross, dass

$$\pi(a_1, b_1) + \cdots + \pi(a_{m_n}, b_{m_n}) - m_n \geqslant m_{\varrho(1, n-1)} + \cdots + m_{\varrho(n-2, 2)} + 2$$

gilt. Da es beliebig grosse natürliche Zahlen l gibt, für die m_l einen vorgegebenen Wert $\geqslant 2$ hat, kann man eine Zahl $\varrho(n-1, 1)$ aus $N - (\varrho\alpha^{-1}\{1, \ldots, n-1\} \cup \{c_1, \ldots, c_{n-2}\})$ mit der Eigenschaft

$$\pi(a_1, b_1) + \cdots + \pi(a_{m_n}, b_{m_n}) - m_n = m_{\varrho(1, n-1)} + \cdots + m_{\varrho(n-2, 2)} + m_{\varrho(n-1, 1)}$$

bestimmen. Dann haben die Mengen $\alpha^{-1}\pi\mu^{-1}(n)$ und $\mu^{-1}\varrho\alpha^{-1}(n)$ gleiche Elementezahl, und φ lässt sich fortsetzen zu einer Bijektion von $\alpha^{-1}\pi\mu^{-1}\{1, \ldots, n\}$ auf $\mu^{-1}\varrho\alpha^{-1}\{1, \ldots, n\}$. Auf diese Weise sind rekursiv Peano-Abbildungen π, ϱ und eine Bijektion φ von $N \times N$ auf sich mit der Eigenschaft $\mu\pi^{-1}\alpha = \alpha\varrho^{-1}\mu\varphi$ konstruiert. Nimmt man für τ schliesslich eine beliebige Peano-Abbildung und setzt $\sigma := \tau\varphi$, dann gilt $\mu\pi^{-1}\alpha\sigma^{-1} = \alpha\varrho^{-1}\mu\tau^{-1}$, womit auch der zweite Teil des Satzes bewiesen ist.

J. SPILKER, Freiburg i. Br.

LITERATUR

[1] H. GAO, *Solution to a Problem of S. Ulam*, Sci. Sinica *13*, 1005–1006 (1964).
[2] K. KOPFERMANN, *Lösung eines Problems über Peano-Abbildungen*, Math.-Phys. Semesterber. *10*, 273–275 (1964).
[3] S. ULAM, *A Collection of Mathematical Problems*, Interscience, New York 1960.

Zur Zerlegung von Permutationen in elementfremde Zyklen

1. Definitionen und Bezeichnungen

Ausgehend von der Tatsache, dass jede Permutation φ abgesehen von der Reihenfolge auf genau eine Weise in elementfremde Zyklen zerfällt[1]), ordnen wir φ ihre *Zyklenzahl* $z(\varphi)$ zu; hierbei sind die eingliedrigen Zyklen mitzuzählen. Eine Permutation φ von n Elementen mit $z(\varphi) = k$ nennen wir fortan eine (n, k)-*Permutation*, und es bezeichne $p(n, k)$ deren Anzahl. Die $(n, 1)$-Permutationen werden auch «zyklisch» genannt, und im Falle $n \geqslant 2$ heissen die $(n, n-1)$-Permutationen *Transpositionen*.

Es sollen in dieser Note die Zahlen $p(n, k)$ bestimmt und eine durch sie auf natürliche Weise induzierte Klassifikation der Permutationen betrachtet werden. Dabei beschränken wir uns auf die Behandlung des nichtentarteten Falles $1 \leqslant k \leqslant n$.

---

[1]) Vergleiche zum Beispiel [1], p. 10 oder [3], p. 28.

2. Rekursion

Unsere Anzahlfunktion p genügt der Anfangsbedingung

$$p(n, 1) = (n-1)!\,; \; p(n, n) = 1 \quad [n \geqslant 1] \tag{1}$$

und der Rekursionsbeziehung

$$p\,(n+1, k+1) = p(n, k) + n\,p\,(n, k+1) \quad [n \geqslant 2;\, n-1 \geqslant k \geqslant 1]. \tag{2}$$

In der Tat: (1) ist trivial, und (2) gewinnt man wie folgt: Sind $a_1, \ldots, a_{n+1}$ die zu permutierenden Elemente, so gibt es $p(n, k)$ $(n+1, k+1)$-Permutationen, welche den eingliedrigen Zyklus (a_{n+1}) aufweisen. Um die Anzahl der übrigen $(n+1, k+1)$-Permutationen zu ermitteln, gehen wir aus von der Menge aller $(n, k+1)$-Permutationen. Das neuhinzutretende Element a_{n+1} kann in jeder solchen Permutation an n Stellen eingefügt werden, nämlich als Nachfolger jedes schon vorhandenen Elementes; dabei soll a_{n+1} in den Zyklus seines Vorgängers aufgenommen werden. Bei zwei verschiedenen derartigen Einfügungsprozessen entstehen stets zwei verschiedene $(n+1, k+1)$-Permutationen; andererseits erhält man auf diese Weise alle $(n+1, k+1)$-Permutationen, welche den Zyklus (a_{n+1}) nicht aufweisen. Damit ist (2) begründet. Durch eine heuristische Betrachtung der Funktionswerte $p(n, 2)$ und $p(n, 3)$ gelangt man unmittelbar zur Vermutung des folgenden Sachverhaltes:

Satz 1. *Bezeichnet* $c(n-1, l)$ *für* $1 \leqslant l \leqslant n-1$ *die* l*-te elementarsymmetrische Funktion der Zahlen* $1, \ldots, n-1$, *das heisst:*

$$c\,(n-1, 1) = 1 + \cdots + (n-1), \tag{3_1}$$

$$c\,(n-1, 2) = 1 \cdot 2 + \cdots + (n-2)\,(n-1), \tag{3_2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots$$

$$c\,(n-1, n-1) = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) = (n-1)! \tag{3_{n-1}}$$

mit der definitorischen Ergänzung

$$c\,(n-1, 0) = 1 \quad [n \geqslant 1], \tag{4}$$

so gilt

$$p(n, k) = c\,(n-1, n-k) \quad [1 \leqslant k \leqslant n]\,. \tag{5}$$

Beweis (doppelte Induktion): Definiert man die Hilfsmengen $A_j = \{(j+k, k) \mid k$ nat. Zahl$\}$ für $j \geqslant 0$ ganz; $A = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$; $S = \{(n, k) \in A \mid p(n, k) = c\,(n-1, n-k)\}$, so gilt es zu zeigen: $A = S$. – Nach (1) und (4) gilt $p(n, n) = 1 = c\,(n-1, 0)$ für alle $n \geqslant 1$; somit ist (a) $A_0 \subset S$. – Es sei nun (b) $A_j \subset S$ für ein gewisses $j \geqslant 0$. Nach (1) und (3_{n-1}) ist $p\,(j+2, 1) = (j+1)! = c\,(j+1, j+1)$, also (c) $(j+2, 1) \in S$. Für eine gewisse natürliche Zahl k sei (d) $(j+1+k, k) \in S$. Nach (2), der Erklärung von S und (b) ergibt sich

$$\begin{aligned} p\,(j+1+k+1, k+1) &= p\,(j+1+k, k) + (j+1+k) \cdot p\,(j+1+k, k+1) \\ &= c\,(j+k, j+1) + (j+k+1) \cdot c\,(j+k, j) = c\,(j+k+1, j+1), \end{aligned}$$

das heisst (e) $(j+1+k+1, k+1) \in S$. Aus (c) und [(d) $\Rightarrow$ (e)] folgt (f) $A_{j+1} \subset S$, und aus (a) und [(b) $\Rightarrow$ (f)] folgt $A_j \subset S$ für alle $j \geqslant 0$ ganz. Somit ist $A \subseteq S$ und nach der Definition von S sodann $A = S$, q.e.d.

Auf Grund von (5) besteht der folgende Zusammenhang der $p(n, k)$ mit den STIRLINGschen Zahlen $s(n, k)$ erster Art[2]):

$$p(n, k) = |s(n, k)| \; [1 \leq k \leq n] . \tag{6}$$

3. Wertetabelle für $p(n, k)$

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$ ...
$n=1$	1							
$n=2$	1	1						
$n=3$	2	3	1					
$n=4$	6	11	6	1				
$n=5$	24	50	35	10	1			
$n=6$	120	274	225	85	15	1		
$n=7$	720	1764	1624	735	175	21	1	
$n=8$	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1
.....	....	....	....	....	....	....	....	....

4. Eine Klassifikation der Permutationen

Setzt man in der bekannten Identität

$$x\,(x+1) \cdot \cdots \cdot (x+n-1) = \sum_{k=1}^{n} c\,(n-1, n-k)\, x^k = \sum_{k=1}^{n} p(n, k)\, x^k \quad [n \geqslant 1] \tag{7}$$

$x = 1$ bzw. $x = -1$, so ergibt sich

$$n! = \sum_{k=1}^{n} p(n, k) \qquad [n \geqslant 1] \tag{8}$$

bzw.

$$0 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k p(n, k) \qquad [n \geqslant 2] . \tag{9}$$

(8) ist in trivialer Weise deutbar, und (9) führt zu einer Aufteilung aller Permutationen von n Elementen $[n \geqslant 2]$ in zwei gleichmächtige Klassen, wenn die in (9) mit positiven Posten gezählten Permutationen zu der einen, die übrigen zur anderen Klasse gehören sollen. Dass diese Klassifikation mit der wohl wichtigsten Klassifikation der Permutationen übereinstimmt, sagt

Satz 2. *Eine (n, k)-Permutation $[n \geqslant 2]$ ist genau dann gerade, wenn gilt:*

$$k \equiv n \pmod 2 .$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass für eine beliebige Permutation φ und eine beliebige Transposition τ die Beziehung

$$z\,(\tau\,\varphi) \not\equiv z(\varphi) \pmod 2 \tag{10}$$

besteht. Ist nämlich $(a_i\, a_j)$ der einzige zweigliedrige Zyklus von τ, so ist die Wirkung von τ auf φ bei der Bildung von $\tau\,\varphi$ die folgende: a) Die zu $(a_i\, a_j)$ disjunkten Zyklen von φ treten in $\tau\,\varphi$ unverändert auf. b) Gehören a_i, a_j in φ zum gleichen Zyklus, so wird dieser beim Übergang von φ zu $\tau\,\varphi$ in zwei Zyklen zerlegt. c) Gehören a_i, a_j zu verschiedenen Zyklen von φ, so werden diese beim Übergang von φ zu $\tau\,\varphi$ zu einem einzigen Zyklus vereinigt. Damit ist (10) sichergestellt. JÜRG RÄTZ, Bern

[2]) Eine ausführliche Darstellung der Theorie dieser Zahlen findet sich etwa in [2], p. 142ff.