Über eine Vertauschbarkeit von Addition und Multiplikation

Sei N die Menge der natürlichen Zahlen 1, 2, ... versehen mit der üblichen Addition und Multiplikation. Es bezeichne α die Additionsabbildung

$$\alpha\colon N \times N \to N\colon (a, b) \to a + b$$

und μ die Multiplikationsabbildung

$$\mu\colon N \times N \to N\colon (a, b) \to a\, b\,.$$

Eine bijektive Abbildung $\pi\colon N \times N \to N$ heisst Peano-Abbildung. Mit diesen Bezeichnungen lautet ein Problem von ULAM ([3], Seite 32): Gibt es eine Peano-Abbildung π, so dass $\mu\,\pi^{-1}\,\alpha = \alpha\,\pi^{-1}\,\mu$ auf $N \times N$ gilt? Diese Frage ist von GAO [1] und KOPFERMANN [2] negativ beantwortet worden. Es stellt sich deshalb das folgende Problem: Existieren zwei Peano-Abbildungen π und ϱ mit der Eigenschaft $\mu\,\pi^{-1}\,\alpha = \alpha\,\varrho^{-1}\,\mu$? Allgemeiner kann man fragen, in welchem Sinne Addition und Multiplikation vertauschbar oder nicht vertauschbar sind. Ein Resultat in dieser Richtung enthält der

Satz: 1. *Es gibt keine Peano-Abbildungen π, ϱ, σ, τ mit $\sigma^{-1}\,\mu\,\pi^{-1}\,\alpha = \tau^{-1}\,\alpha\,\varrho^{-1}\,\mu$ auf $N \times N$.*

2. *Es gibt Peano-Abbildungen π, ϱ, σ, τ mit $\mu\,\pi^{-1}\,\alpha\,\sigma^{-1} = \alpha\,\varrho^{-1}\,\mu\,\tau^{-1}$ auf N.*

Um den ersten Teil des Satzes zu beweisen, nehme man an, es gäbe Peano-Abbildungen π, ϱ, σ, τ, für die das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "\pi^{-1}"] & N \times N \arrow[r, "\mu"] & N \arrow[dr, "\sigma^{-1}"] & \\
N \times N \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\mu"'] & & & & N \times N \\
 & N \arrow[r, "\varrho^{-1}"'] & N \times N \arrow[r, "\alpha"'] & N \arrow[ur, "\tau^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Offenbar ist $\alpha^{-1}(n)$ nur für $n = 1$ leer, was $\pi\,\mu^{-1}\,\sigma\,\tau^{-1}(1) = \{1\}$ zur Folge hat, und $\mu^{-1}(n)$ nur für $n = 1$ einelementig, weshalb $\sigma\,\tau^{-1}(1) = \{1\}$ gilt. Ferner enthält $\pi\,\mu^{-1}\,\sigma\,\tau^{-1}(2)$ zwei verschiedene Elemente $a > 1$, $b > 1$. Weil $\varrho\,\alpha^{-1}(2)$ einelementig ist, folgt $\mu\,(1, a - 1) = \mu\,(1, b - 1)$ und daraus der Widerspruch $a = b$.

Im nachfolgenden zweiten Teil des Beweises werden induktiv Peano-Abbildungen π, ϱ sowie eine Bijektion φ von $N \times N$ auf sich konstruiert, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
N \times N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dd, "\varphi"'] & N \arrow[r, "\pi^{-1}"] & N \times N \arrow[dr, "\mu"] & \\
 & & & N \\
N \times N \arrow[r, "\mu"'] & N \arrow[r, "\varrho^{-1}"'] & N \times N \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ machen. Weil am rechten Ende des Diagramms jede natürliche Zahl $n > 1$ auftreten kann, definiere man $\pi(1, 1) := 1$ und weiter

$$\pi(1, 2) := 2,\ \pi(2, 1) := 3,$$

$$\varrho(1, 1) := 4,$$

$$\varphi(1, 1) := (1, 4),\ \varphi(1, 2) := (2, 2),\ \varphi(2, 1) := (4,1)\,.$$