Dazu benutzt man folgende Formeln, die sich unmittelbar aus der Rekursionsformel für die Fibonaccizahlen ergeben:

$$\sum_{\nu=-1}^{n} a_\nu = a_{n+2}, \quad \sum_{\nu=0}^{k} a_{2\nu} = a_{2k+1} - 1.$$

Die Aufgabe ist ein Spezialfall der Aufgabe 523 (El. Math. *22*, 41 (1967)).

Weitere Lösungen sandten A. AMMANN (Yverdon), L. CARLITZ (Duke University, Durham, USA).

Neue Aufgaben

Aufgabe 561. $N_1 = 1 < N_2 < N_3 < \ldots$ seien die der Grösse nach geordneten natürlichen Zahlen N, die durch den Quotienten

$$(x^2 - 6\,x\,y + y^2) : (x^2 - 10\,x\,y + y^2)$$

mit ganzen, nicht gleichzeitig verschwindenden x, y dargestellt werden (vgl. Aufgabe 513, El. Math. *21*, 136–137 (1966)). Man zeige, dass jedes N_i durch die eigentlich primitive quadratische Form

$$(14,\ 20,\ 7) = 14\,x^2 + 20\,x\,y + 7\,y^2$$

darstellbar ist, wobei $x^2 = 2\,N_{i-1} - 1$ und $y^2 = 3\,N_{i-1} - 2$.

W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

Aufgabe 562. Show that

$$\sum_{r,\,s=0}^{m} (-1)^{r+s} \binom{m}{r} \binom{m}{s} \binom{r+s}{r}^2 = \sum_{j+k \leqq m} \left(\frac{m!}{j!\,k!\,(m-j-k)!}\right)^2.$$

L. CARLITZ, Duke University, Durham, N.C., USA

Aufgabe 563. Man zeige, dass für alle ganzen Zahlen $n \geqq 3$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k/2}{n-1} = 0.$$

G. BACH, Braunschweig

Aufgabe 564. Ein Glücksspiel wird nach folgender Regel gespielt: In einer Urne befinden sich n Kugeln, die die Nummern 1, 2, ..., n tragen. Ein Spieler darf nach Entrichtung eines Einsatzes diese Kugeln einzeln nacheinander aus der Urne ziehen, und wenn darunter r Kugeln sind, die beim $s$ten Zug die Nummer s trugen, erhält er den $r$fachen Betrag seines Einsatzes zurück.

Man beurteile die Gewinnchance des Spielers unter der Voraussetzung, dass alle möglichen Ausfälle gleichwahrscheinlich sind.

O. REUTTER, Ochsenhausen

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchwegs so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes von Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur

1. Auf der inneren Winkelhalbierenden w_α des Dreiecks ABC trägt man von A aus nach beiden Seiten die Strecken $AP = AQ = \sqrt{bc}$ ab. Zeige, dass die Punkte B, C, P und Q auf einem Kreis liegen.

2. In einer Ebene sind gegeben ein Kreis k mit dem Zentrum M und dem Radius r, sowie zwei Geraden p und q, die sich in S schneiden und von M denselben Abstand d haben. Konstruiere alle Tangenten an k, für die der Berührungspunkt Mitte des Abschnitts zwischen p und q ist.

▶ Die Aufgabe hat stets zwei triviale Lösungen. Die Tangente einer der nicht-trivialen Lösungen schneide p in P, q in Q. Der Umkreis des Dreiecks PQS geht durch M. Das Dreieck MPQ hat folglich bekannte Basiswinkel; es lässt sich konstruieren und durch eine Rotation in die richtige Lage bringen. Die nicht-trivialen Lösungen existieren für $d^2 < r\,\overline{MS}$; für $d^2 = r\,\overline{MS}$ fallen sie mit einer der trivialen zusammen.

3. Man betrachtet die Evolvente eines Kreises mit dem Radius r vom Anfangspunkt A bis zu einem Punkt P, der zum Zentriwinkel $t = T$ des abgewickelten Bogens gehört. Von dieser ersten Evolvente wird mit demselben Anfangspunkt die zweite Evolvente gezeichnet, von dieser die dritte, und so weiter. Berechne die Bogenlänge der $n$ten Evolvente.

▶ Die Kenntnis des Momentanzentrums bei jeder Abwicklung liefert:

$$ds_1 = r\,t\,dt, \qquad s_1 = r\,\frac{T^2}{2},$$

$$ds_2 = r\,\frac{t^2}{2}\,dt, \qquad s_2 = r\,\frac{T^3}{3!},$$

folglich

$$s_n = r\,\frac{T^{n+1}}{(n+1)!}.$$

4. An einen Kreis mit dem Zentrum M und dem Radius r wird eine Tangente gelegt. Vom Berührungspunkt B wird darauf die Strecke $BA = u$ abgetragen. Eine Sekante durch A bildet mit der Tangente den Winkel x und schneidet den Kreis in C und D. Für welches x ist die Fläche des Dreiecks BCD ein Maximum?

▶ Setzt man $u = r \operatorname{ctg} \alpha$, so ist das Maximum der Funktion

$$f(x) = \sin x \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 (x - \alpha)}$$

zu suchen.

$$\operatorname{tg} x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 3 \operatorname{tg}^2 2\alpha}}{\operatorname{tg} 2\alpha}$$

Es gilt eines der beiden Vorzeichen der Wurzel.

5. Die Oberfläche eines modernen Fussballs setzt sich aus schwarzen Fünfecken und weissen Sechsecken zusammen. An die Seiten jedes Fünfecks grenzen lauter Sechsecke, an die Seiten jedes Sechsecks abwechselnd Fünf- und Sechsecke. Berechne die Anzahl der Fünfecke (x) und der Sechsecke (y). O. Reutter, Ochsenhausen.