Nun betrachten wir die Verallgemeinerungen für den n-dimensionalen Raum E^n!

Es bedeute jetzt R_i ($i = 0, 1, 2, \ldots n$) den Abstand PA_i, wo P ein beliebiger Punkt im Innern oder auf dem Rande des n-dimensionalen Simplex $A_0 A_1 A_2 \ldots A_n$ ist; r und h_i haben dieselbe Bedeutung wie in der Einleitung (Inkugelradius und Höhen); V ist der Inhalt des Simplex.

Bekannt ist die Verallgemeinerung von (3) auf E^n [4]. Jetzt beweisen wir:

Satz II. Es gilt folgende Verallgemeinerung von (2) auf den E^n:

$$R_0 + R_1 + R_2 + \ldots + R_n \geqq (n + 1)\, n\, r . \tag{2*}$$

Beweis. Die Ungleichung von PETTY und WATERMAN lautet [5]:

$$\sum_{i=0}^{n} R_i \geqq (n + 1)^{(n-1)/2n} (n\,!)^{1/n}\, V^{1/n} \sqrt{n}\,. \tag{I}$$

Andererseits findet man bei L. FEJES TÓTH auch eine Simplexungleichung [6]:

$$V \geqq \frac{(n + 1)^{(n+1)/2}}{n\,!}\, n^{n/2}\, r^n . \tag{II}$$

Wenden wir die Substitution von (II) in der Ungleichung (I) an, so ergibt sich:

$$A(R_i) = \frac{\sum_{i=0}^{n} R_i}{n + 1} \geqq n\, r .$$

Für $n = 3$ lautet die Ungleichung:

$$R_0 + R_1 + R_2 + R_3 \geqq 12\, r .$$

Bemerkungen. Die vollständige Verallgemeinerung von (1) für $n = 3$ ist noch nicht bekannt. Vielleicht geben eine Arbeit von J. STEINIG [6] und diese Arbeit gewisse Stützpunkte in dieser Richtung.

Der Verfasser dankt Herrn J. STEINIG für nützliche Bemerkungen.

J. BERKES, Szeged

LITERATURVERZEICHNIS

[1] MORDELL, L. J., *Lösung der Aufgabe 3740 von P. Erdös*, Amer. Math. Monthly *44*, 252 (1937).
[2] M. SCHREIBER, *Aufgabe 196*, Jber. dtsch. Math.-Ver. *45* (1935).
[3] F. LEUENBERGER, *Einige Dreiecksungleichungen*, El. Math. *13*, 121–126 (1958).
[4] F. LEUENBERGER, *Extremaleigenschaften der wichtigsten Ecktransversalen des n-dimensionalen Simplex*, El. Math. *15*, 81–82 (1960).
[5] PETTY und WATERMAN, *An Extremal Theorem for N-Simplexes*, Monatshefte Math. *59*, 320–322 (1955).
[6] J. STEINIG, *A Comparison of Two Inequalities for the Triangle*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. *16*, 19–22 (1965).

Aufgaben

Aufgabe 537. Ein gegebener Kreis K wird von zwei zueinander orthogonalen Kreisen K_1, K_2, die durch einen festen Punkt F seiner Ebene gehen, berührt. Welches ist der geometrische Ort der Ähnlichkeitszentren von K_1 und K_2?

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung des Aufgabenstellers: Durch eine Inversion mit Zentrum F, die K in sich überführt, gehen K_1 und K_2 in zwei zueinander senkrechte Tangenten K_1', K_2' über. Dem äusseren Ähnlichkeitszentrum A in der ursprünglichen Figur Φ entspricht in der transformierten Φ' der zweite Schnittpunkt A' zweier durch F gehender und die Geraden K_1', K_2' berührender Kreise. Diese Geraden zerlegen die Ebene in zwei Paare von Scheitelwinkelfelder. Gehört (*Fall a*) F dem Felderpaar an, in dem K liegt (gleichzeitige Berührung von K_1 und K_2 mit K), so ist (mit O als Zentrum von K) $\overline{OA'} = \overline{OF}$. Der Ort von A' ist also ein zu K konzentrischer Kreis durch F, dem in der Figur Φ eine *Gerade* l entspricht (l ist die Potenzlinie von K und dem als Nullkreis aufgefassten Punkt F). Dem inneren Ähnlichkeitspunkt J von K_1, K_2 entspricht der zu A' symmetrische Punkt J' inbezug auf den Schnittpunkt Q' von K_1', K_2', da die 4 Punkte F, Q, A, J harmonisch auf dem Kreis über dem Durchmesser $\overline{AJ}$ liegen. J' liegt damit auch symmetrisch zu F inbezug auf eine Tangente des Kreises um O durch Q'. Der Ort von J' ist ähnlich zur Fusspunktskurve dieses Kreises für den Pol F. Die Gleichung in Polarkoordinaten mit F als Pol ergibt sich unmittelbar, wenn man beachtet, dass jene Fusspunktskurve Konchoide des Kreises über dem Durchmesser $\overline{OF}$ mit F als Pol und $r\sqrt{2}$ ($= \overline{OQ'}$) als Einschaltstrecke ist. Mit $d = \overline{OF}$ wird $\varrho = 2\,(d\cos\varphi - r\sqrt{2})$ und folglich liegt J auf dem *Kegelschnitt*

$$\varrho = \frac{d^2 - r^2}{2\,r\sqrt{2}\,\left(d(r\sqrt{2})^{-1} - 1\right)}$$

mit Brennpunkt F und numerischer Exzentrizität $d/r\sqrt{2}$. Als zugehörige Leitlinie erkennt man leicht jene Gerade l, welche die äusseren Ähnlichkeitspunkte enthält. Liegt (*Fall b*) F in einem der anderen Winkelfelder von K_1', K_2' (ungleichartige Berührung von K_1, K_2 mit K) so kehren sich die Verhältnisse einfach um: der äussere Ähnlichkeitspunkt liegt auf dem Kegelschnitt, der innere auf l. Geht bei kontinuierlicher Veränderung ein Kreis K_1 von äusserer zu innerer Berührung mit K über (oder umgekehrt), wobei der Radius unendlich wird, so gehen gleichzeitig A und J wechselseitig stetig ineinander über.

Eine weitere Lösung sandte J. Basile (Brüssel).

Aufgabe 538. Trouver toutes les solutions de l'équation

$$x^2 + (x+1)^2 = y^4$$

en nombres naturels x et y. W. Sierpiński, Varsovie

Solution: W. Ljunggren (Avh. det Norske Videnskaps-Akad., Oslo, Mat.-Nat. Kl. 1942, No. 5) a démontré, que l'équation $z^2 + 1 = 2\,y^4$ n'a, en nombres naturels y et z, que deux solutions $y = z = 1$ et $y = 13$, $z = 239$. Il en résulte que l'équation $(2\,x+1)^2 + 1 = 2\,y^4$ n'a, en nombres naturels x et y, qu'une seule solution: $x = 119$, $y = 13$. Or cette dernière équation est évidemment équivalente à l'équation $x^2 + (x+1)^2 = y^4$ qui admet ainsi une seule solution en nombres naturels x et y, notamment $x = 119$, $y = 13$.

Or, M. A. Makowski a remarqué que L. E. Dickson dans le vol. II de son *History of the Theory of Numbers* à la page 627 écrit que A. Cunningham en 1908 regardait comme solutions uniques de l'équation $x^2 - 2\,y^4 = -1$ en nombres naturels $x = y = 1$ et $x = 239$, $y = 13$, et que à la page 670–671 du livre cité Dickson écrit, que E. Lionnet en 1880 cherchait les nombres naturels N qui, en même temps que leur bicarrés, sont sommes de deux carrés de nombres naturels consécutifs et que E. Lionnait écrivait que la solution unique est $N = 13 = 2^2 + 3^2$ où $N^4 = 13^4 = 119^2 + 120^2$. Or, à la page 622 de son livre Dickson écrit (dans la note [53])) que E. Fauquembergue (dans l'Intermédiaire des math. *5*, 1898, p. 94) affirmait que $x = 1$ et $x = 13$ sont les nombres naturels uniques pour lesquels le nombre $2\,x^4 - 1$ est un carré. A. Schinzel, Varsovie

Dieselbe Lösung sandte L. Carlitz (Duke University, USA).

Aufgabe 539. Show that the quotient

$$\frac{(a^n-1)\,(a^n-a)\dots(a^n-a^{n-1})}{n!} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

is integral for arbitrary integers a. L. Carlitz, Duke University, Durham, N.C., USA

Lösung: Der Zähler des gegebenen Bruches ist

$$Z(a, n) = \prod_{k=0}^{n-1} (a^n - a^k) = a^{n(n-1)/2} \prod_{k=0}^{n-1} (a^{n-k} - 1).$$

Man hat bekanntlich folgende Primfaktorzerlegung von n!

$$n! = \prod_{p \leqq n} p^{\alpha(p)}, \quad \alpha(p) = \sum_{k=1}^{\infty} [n/p^k].$$

Für die Exponenten $\alpha(p)$ gelten offensichtlich die Abschätzungen

$$\alpha(p) \leqq \left[\sum_{k=1}^{\infty} n/p^k\right] \leqq \left[\frac{n}{p-1}\right], \tag{1}$$

$$\alpha(p) \leqq \alpha(2) < \sum_{k=1}^{\infty} n/2^k = n, \quad \alpha(p) \leqq n - 1. \tag{2}$$

p sei nun eine Primzahl $\leqq n$. Im Fall $p \mid a$ folgt aus (2) $\alpha(p) \leqq n - 1 \leqq n\,(n-1)/2$, weil $n \geqq p \geqq 2$. Somit gilt $p^{\alpha(p)} \mid Z(a, n)$. Wenn $p \nmid a$, so ist $p \mid a^{n-k} - 1$ dann und nur dann richtig, wenn $p - 1 \mid n - k$. Unter den Faktoren $a^{n-k} - 1$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ sind daher genau $[n/(p-1)]$ durch p teilbar und (1) zeigt, dass auch in diesem Fall $p^{\alpha(p)} \mid Z(a, n)$.

A. BAGER, Hjørring, Dänemark

Weitere Lösungen sandten W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf), E. TEUFFEL (Korntal/Stuttgart).

Aufgabe 540. Sei $a_{-1}\, a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 \ldots = 1\ 0\ 1\ 1\ 2\ 3\ 5 \ldots$ die Fibonaccifolge. Für $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$ und $k = 0, 1, 2, \ldots$ zeige man

$$\sum_{\nu=-1}^{n} \binom{n+k-\nu}{k} a_\nu + \sum_{\nu=0}^{k} \binom{n+1+k-\nu}{1+n} a_{2\nu} = a_{n+2k+2}.$$

I. PAASCHE, München

Lösung (nach E. WIDMER, Biel): Es sei $A(n, k)$ die zu beweisende Aussage. Es gilt die Implikation

$$A(n, k) \quad \text{und} \quad A\,(n+1, k-1) \Rightarrow A\,(n+1, k). \tag{*}$$

Beweis: Aus den Grundeigenschaften der Binomialkoeffizienten und der Formel $a_i + a_{i+1} = a_{i+2}$ folgt

$$\sum_{\nu=-1}^{n+1} \binom{n+1+k-\nu}{k} a_\nu + \sum_{\nu=0}^{k} \binom{n+2+k-\nu}{2+n} a_{2\nu}$$

$$= \sum_{\nu=-1}^{n+1} \binom{n+k-\nu}{k-1} a_\nu + \sum_{\nu=-1}^{n+1} \binom{n+k-\nu}{k} a_\nu + \sum_{\nu=0}^{k} \binom{n+1+k-\nu}{1+n} a_{2\nu}$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{k} \binom{n+1+k-\nu}{2+n} a_{2\nu}$$

$$= a_{n+2k+2} + \sum_{\nu=-1}^{n+1} \binom{n+1+k-1-\nu}{k-1} a_\nu + \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{n+2+k-1-\nu}{2+n} a_{2\nu}$$

$$= a_{n+2k+2} + a_{n+1+2(k-1)+2} = a_{(n+1)+2k+2}.$$

Ordnet man die $A(n, k)$ in der Form einer unendlichen Matrix an, so bedeutet (*), dass ein «Element richtig ist», wenn dies sowohl für den oberen als auch für den linken Nachbarn gilt. Man muss also zeigen, dass die Elemente $A(n, 0)$ $(n = -1, 0, 1, 2, \ldots)$ der ersten Spalte und die Elemente $A(-1, k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ der ersten Zeile richtig sind.