Neue Aufgaben

Aufgabe 557. a, b, n seien natürliche Zahlen. Man zeige die Existenz einer absoluten Konstanten C_1 mit folgender Eigenschaft: Ist $n!\,(a!\,b!)^{-1}$ eine ganze Zahl, so ist

$$a + b < n + C_1 \log n .$$

Diese Aussage ist scharf in folgendem Sinn: Es gibt eine absolute Konstante C_2, so dass die Forderungen $a + b > n + C_2 \log n$, $n!\,(a!\,b!)^{-1}$ = ganze Zahl für unendlich viele n erfüllbar sind.

P. ERDÖS

Aufgabe 558. Es sei $\mathfrak{S}$ die symmetrische Gruppe vom Grade $n + 1$ dargestellt auf der Ziffernmenge $\{1, 2, \ldots, n + 1\}$. Jedem $S \in \mathfrak{S}$ ordnen wir ein n-Tupel $k_1(S), k_2(S), \ldots, k_n(S)$ von nichtnegativen ganzen Zahlen zu, wobei $k_i(S)$ die Anzahl der Ziffern $j \in \{i + 1, \ldots, n + 1\}$ ist, für die $j\,S < i\,S$ ist. Man zeige, dass dies eine umkehrbare Zuordnung von $\mathfrak{S}$ auf die Menge der n-Tupel $k_1, k_2, \ldots, k_n$ mit $0 \leqq k_i \leqq n + 1 - i$ ist. Man leite daraus die Polynomidentität

$$(x - 1)^n \sum_{S \in \mathfrak{S}} x^{N(S)} = \prod_{i=1}^{n} (x^{i+1} - 1)$$

ab, wobei $N(S)$ die Anzahl der Paare (i, j) mit $i < j$ und $j\,S < i\,S$ ist.

HEINZ LÜNEBURG, Mainz

Aufgabe 559. Es sei

$$\varphi\,(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i<j} x_i\,x_j\,, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Man beschreibe die Lösung des Gleichungssystems

$$\varphi\,(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n) = a_p \quad (p = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

D. VOICULESCU, Bukarest

Aufgabe 560. Von den vier Schnittpunkten zweier Kegelschnitte k_1, k_2 in einer Ebene seien zwei reell (U, V). Durch einen beliebigen Punkt P der Ebene geht ein Kegelschnitt k des Büschels $\lambda\,k_1 + \mu\,k_2$ hindurch. Die Geraden $UP = a$ und $VP = b$ schneiden k_1 in A_1, B_1 und k_2 in A_2, B_2.

Man beweise: Der Schnittpunkt T der Geraden A_1B_1 und A_2B_2 ist ein Punkt der Tangente t im Punkt P an den Kegelschnitt k. T liegt auf einem zerfallenden Kegelschnitt des Büschels $\lambda\,k_1 + \mu\,k_2$.

H. GÜNTHER, Dresden

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchwegs so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes von Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur

1. Beweise die Identität
$$\binom{n}{r}\binom{n-r}{s} = \binom{n}{s}\binom{n-s}{r}.$$

2. Zeige, dass für $n > 1$
$$N = (1 + a + a^2 + \cdots + a^n)^2 - a^n$$
nie eine Primzahl ist.

▶
$$N = \frac{(a^{n+2} - 1)\,(a^n - 1)}{(a - 1)^2}.$$

Jeder Faktor im Zähler enthält $a - 1$, und für $a = 1$ ist $N = n\,(n + 2)$.