The following table shows the comparative values for all the computed arrangements. The quantity D_n, which represents the density of packing on the sphere, is given by $D_n = n\,(1 - \cos 0.5\, a_n)/2$. If the circles have unit diameter, the sphere has the radius $R_n = 1/\sqrt{2 - 2\cos a_n}$.

Arrangement	a	D	R	
3, 9, 9, 9, 3 (unstable)	34°47′	0.755	1.673	Jucovič (1959)
3, 3, (6), (9), (6), 3, 3 (stable)	35°22′	0.780	1.647	Goldberg (1963)
3, 3, (6), (9), (6), 3, 3 (unstable)	35°25′	0.782	1.644	Goldberg (1963)
3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3 (stable)	36°15′32″	0.819	1.607	Goldberg (1966)

Similar improvements were made in the packing of other sets of equal circles on the sphere. They are described in another paper [3].

Michael Goldberg, Washington, D.C., USA

BIBLIOGRAPHY

[1] M. Goldberg, *Packing of 33 Equal Circles on a Sphere*, El. Math. *18*, 99–100 (1963).

[2] E. Jucovič, *Lagerung von 17, 25 und 33 Punkten auf der Kugel* (Slovak; Russian and German Summaries), Mat.-Fyz. Časopis. Slovensk Akad. Vied. *9*, 173–176 (1959); Math. Rev. *23*, 533 (1962).

[3] M. Goldberg, *Axially Symmetric Packing of Equal Circles on a Sphere*, Ann. Univ. Sci. Budapestinensis (to appear).

Aufgaben

Aufgabe 533. Mit A, B, C seien Kreise oder Geraden und auch die Inversion (bzw. Spiegelung) an denselben bezeichnet. Welche geometrische Bedingung erfüllen drei Kreise, wenn in der Möbiusgruppe der Kreistransformationen

$$ABCABCBCABCACBACBCBACB = 1$$

gilt?

H. Guggenheimer, Minneapolis, USA

Solution: The given condition is equivalent to

$$(ABC)^2\,(BCA)^2 = (BCA)^2\,(ABC)^2\,,$$

that is, $(ABC)^2$ and $(BCA)^2$ commute. We use the fact that inversion preserves the relation of inverse points.

(1) If B and C intersect, we may invert with respect to one of the points of intersection, so that B and C become lines b and c. If the point of intersection of these lines is taken as the origin O, then the transformation bc (which is a rotation about O) may be written in the form $z' = kz$, where k has modulus 1. The circle A will become (in general) a circle a, so the inversion a may be written

$$z' - \alpha = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{\alpha}}\,.$$

We may then work out $(abc)^2$ and $(bca)^2$, and these commute in the following cases:
(i) $r^2 = \alpha\,\bar{\alpha}$, so a passes through O. Hence the circles A, B, C have a common point.
(ii) $k = 1$, so b and c coincide (a trivial case).
(iii) $\alpha = 0$, so a has centre O. Hence A cuts B and C orthogonally.
(iv) $k = -1$, so b and c cut orthogonally. Hence B and C cut orthogonally.
(If a is a line, it must pass through O, so A, B, C have a common point, as in (i).)

(2) If B and C do not intersect, we may invert with respect to one of the limiting points of the coaxal system determined by B and C, so that B and C become concentric circles b and c: we take the centre as O. Then bc may be written as $z' = kz$, where k is real and positive. We take a as before, and the only case which now arises (apart from $k = 1$) is $\alpha = 0$, so a has centre O. Hence A, B, C belong to a non-intersecting coaxal system. (If a is a line, it must pass through O, so A cuts B and C orthogonally, as in 1 (iii).)

(3) If B and C touch, we take the point of contact as the centre of inversion, and show easily that A must pass through this point, so A, B, C again have a common point.

The answer required is presumably that A, B, C have a common point (case 1 (i)). For the other cases can all be given by simpler relations, 1 (ii) by $B = C$, 1 (iii) by $ABC = BCA$, 1 (iv) by $(bc)^2 = 1$, and 2 by $(ABC)^2 = 1$.

E. J. F. PRIMROSE, University of Leicester, England

Bemerkung des Aufgabenstellers: Sind A, B, C drei Gerade durch einen gemeinsamen Punkt, so ist die Vertauschbarkeit von $(ABC)^2$ und $(BCA)^2$ eine bekannte Relation von THOMSEN (vgl. F. BACHMANN: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, Springer-Verlag, 1959, S. 13). Durch eine Inversion gehen die Geraden in Kreise und die Spiegelungen in Inversionen über, also ist die Relation für drei Kreise durch einen Punkt erfüllt.

Aufgabe 534. Let P be an interior point of a triangle ABC. Let x, y, z denote the distances from P to the vertices of ABC and let p, q, r denote the perpendiculars from P to the sides of ABC. Let α, β, γ denote the angles of ABC. Show that

$$x \sin(\alpha/2) + y \sin(\beta/2) + z \sin(\gamma/2) \geqq p + q + r ,$$

with equality only if P is the incenter of ABC. L. CARLITZ, Durham, N.C., USA

Solution: Let P be an interior point of a triangle A_1, A_2, A_3. Let x_i denote the distance of P from A_i, p_i the distance of P from the side a_i. Let α_i $(i = 1, 2, 3)$ be the angles of the triangle, and μ_i the angle PA_iA_{i+1} (indices mod 3). Then

$$p_i = x_{i+1} \sin\mu_{i+1} = x_{i+2} \sin(\alpha_{i+2} - \mu_{i+2}).$$

Hence

$$\sum p_i = (1/2) \sum x_i (\sin\mu_i + \sin(\alpha_i - \mu_i))$$

$$= \sum x_i \sin\alpha_i/2 \cos(2\mu_i - \alpha_i)/2 \leqslant \sum x_i \sin\alpha_i/2$$

with equality only if all the cosines are $= 1$, i.e. $\mu_i = \alpha_i/2$, P is the incenter.

H. GUGGENHEIMER, Minneapolis, USA

O. REUTTER (Ochsenhausen) weist darauf hin, dass die Ungleichung auch richtig bleibt, wenn der Punkt P Randpunkt des Dreiecks ist. W. JÄNICHEN (Berlin) gibt analoge Ungleichungen für Punkte ausserhalb des Dreiecks, wobei für die Ankreiszentren jeweils Gleichheit besteht. Wie J. STEINIG (Zürich) bemerkte, ergibt sich die Lösung der Aufgabe sofort aus den Ungleichungen $q + r \leqq 2x \sin\alpha/2$, etc. (L. BANKOFF, Solution of Problem E 1433, Amer. Math. Monthly *67*, 802 (1960)).

Weitere Lösungen sandten L. BERNSTEIN (Tel-Aviv), C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), P. BUNDSCHUH (Freiburg/Br.), G. GEISE (Dresden), R. R. JANIĆ (Belgrad), F. LEUENBERGER (Feldmeilen), H. MEILI (Winterthur), K. SCHULER (Rottweil), D. VOICULESCU (Bukarest), F. WIDMER (Biel), G. WULCZYN (Lewisburg, Pa., USA).

Aufgabe 535. Démontrer le théorème de Fermat d'après lequel, pour p premier, les diviseurs premiers $\neq 3$ du nombre $2^p + 1$ sont de la forme $2kp + 1$, où k est un nombre naturel. W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Solution: We will prove a more general theorem of which the above is a particular case when $a = 2$ and $b = 1$.

Theorem. If $(a, b) = 1$, then for p a prime, the prime odd divisors of $a^p + b^p$, which do not divide $a + b$ are of the form $2\,k\,p + 1$, where k is a natural number.

Proof. Let $(a, b) = 1$, q an odd prime divisor of $a^p + b^p$ and $q \nmid a + b$. Since q is a prime and $q \nmid a + b$, then either $(q, a) = 1$ or $(q, b) = 1$. If $(q, a) = 1$, then the congruence $q\,x \equiv -b \pmod a$ is solvable i.e. there exists an integer x_0 such that $a \mid q\,x_0 + b$ or $(q\,x_0 + b)/a = y_0$, where y_0 is an integer. But $q\,x_0 + b \equiv b \pmod q$ and $b^p \equiv -a^p \pmod q$ imply $(q\,x_0 + b)^p \equiv b^p \equiv -a^p \pmod q$. Hence, since $(a^p, q) = 1$,

$$(q\,x_0 + b)^p\,a^{-p} \equiv -1 \pmod q \tag{1}$$

or $(-y_0)^p \equiv 1 \pmod q$ in case if p is an odd prime.

Therefore the $\operatorname{ord}_q(-y_0) = 1$ or p. But $-(q\,x_0 + b)/a \equiv 1 \pmod q$ contradicts the assumption that $q \nmid a + b$. It follows that $\operatorname{ord}_q(-y_0) = p$ and since $(-y_0, q) = 1$, $\operatorname{ord}_q(-y_0) \mid \varphi(q)$. Therefore $p \mid \varphi(q) = q - 1$ and since q is odd $2 \mid q - 1$, hence $q = 2\,k\,p + 1$.

In case $p = 2$ we obtain from (1) $y_0^2 \equiv -1 \pmod q$ which implies $y_0^4 \equiv 1 \pmod q$. Therefore the $\operatorname{ord}_q(y_0) = 1$, 2 or 4. But the assumptions that the $\operatorname{ord}_q(y_0) = 1$ or 2 contradict the hypotheses that $(q, a) = 1$ or that q is an odd prime respectively. Hence the $\operatorname{ord}_q(y_0) = 4$ and since $(y_0, q) = 1$ it follows that $4 \mid q - 1$ or that $q = 4\,k + 1 = 2\,p\,k_1 + 1$. Since the case $(q, b) = 1$ is handled similarly this completes the proof of the theorem.

STANISLAW LEJA, Western Michigan University, Mich.

Weitere Lösungen sandten P. BUNDSCHUH (Freiburg/Br.), E. WIDMER (Biel).

Aufgabe 536. Die Gleichung

$$r\,x^4 + s\,x^3 + t\,x^2 + s\,x + r = 0$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten sei im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel. Welcher notwendigen und hinreichenden Bedingung müssen r, s, t genügen, wenn sich die Gleichungswurzeln rational durch die Quadratwurzeln aus zwei rationalen Zahlen darstellen lassen sollen?

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

1st Solution: If the roots are x_1, x_2, x_3, x_4 we may put

$$x_1 = a + b\sqrt{A} + c\sqrt{B} + d\sqrt{AB}, \quad x_2 = a - b\sqrt{A} + c\sqrt{B} - d\sqrt{AB}$$

$$x_3 = a + b\sqrt{A} - c\sqrt{B} - d\sqrt{AB}, \quad x_4 = a - b\sqrt{A} - c\sqrt{B} + d\sqrt{AB}$$

where a, b, c, d, A, B are rational and A, B, AB are not rational squares. Moreover we may suppose that $x_1\,x_4 = x_2\,x_3 = 1$ (the equation is reciprocal).
Now

$$x_1\,x_2 = (a + c\sqrt{B})^2 - A\,(b + d\sqrt{B})^2, \quad x_3\,x_4 = (a - c\sqrt{B})^2 - A\,(b - d\sqrt{B})^2,$$

so that

$$y_1 = x_1\,x_2 + x_3\,x_4 = 2\,(a^2 - b^2\,A + c^2\,B - d^2\,AB),$$

which is rational. Similarly

$$y_2 = x_1\,x_3 + x_2\,x_4 = 2\,(a^2 + b^2\,A - c^2\,B - d^2\,AB).$$

On the other hand

$$(x_1\,x_2 + x_3\,x_4) + (x_1\,x_3 + x_2\,x_4) = (t/r) - 2 = (t - 2\,r)/r,$$

$$(x_1\,x_2 + x_3\,x_4)\,(x_1\,x_3 + x_2\,x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (s/r)^2 - 2\,(t/r) = (s^2 - 2\,r\,t)/r^2.$$

Therefore

$$((t - 2\,r)/r)^2 - 4\,(s^2 - 2\,r\,t)/r^2 = (1/r^2)\,\{(t + 2\,r)^2 - 4\,s^2\}$$

is a rational square. Thus a *necessary* condition is that

$$(*) \qquad (t + 2\,r)^2 - 4\,s^2 = u^2,$$

where u is rational.

Since

$$y_1 + y_2 = (t - 2r)/r, \quad y_1 y_2 = (s^2 - 2rt)/r^2$$

it follows from (*) that

$$y_1 = (t - 2r + u)/2r, \quad y_2 = (t - 2r - u)/2r.$$

Next since

$$(x_1 + x_3)(x_2 + x_4) = y_1 + 2 = (t + 2r + u)/2r,$$

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = y_2 + 2 = (t + 2r - u)/2r,$$

we get

$$x_1 + x_2 = (-s + \sqrt{s^2 - 2r(t + 2r - u)})/2r,$$

$$x_1 + x_3 = (-s + \sqrt{s^2 - 2r(t + 2r + u)})/2r.$$

Also since

$$(x_1 + x_4)(x_2 + x_3) = (t/r) - 2$$

we find that

$$x_1 + x_4 = (-s + \sqrt{s^2 - 4r(t - 2r)})/2r.$$

Put

$$A = s^2 - 2r(t + 2r - u), \quad B = s^2 - 2r(t + 2r + u).$$

Then, making use of (*),

$$AB = [s^2 - 2r(t + 2r)]^2 - 4r^2u^2 = s^2(s^2 - 4rt + 8r^2).$$

Finally therefore we have the following necessary and sufficient conditions:
Case 1 ($s \neq 0$). $(t + 2r)^2 - 4s^2$ is a rational square but none of A, B, AB is a square.
Case 2 ($s = 0$). None of $-r(t - 2r)$, $-r(t + 2r)$, $t^2 - 4r^2$ is a rational square.
Indeed in Case 2 the solutions of the quartic are given by

$$(1/2r)\left\{\pm\sqrt{-r(t - 2r)} \pm \sqrt{-r(t + 2r)}\right\}.$$

L. CARLITZ, Duke University, Durham, North Carolina, USA

2. Lösung (Aufgabensteller): Sind w_1 und w_2 die beiden Quadratwurzeln, so ist die Gruppe der Gleichung gegeben durch die Substitutionen

$$(w_1, w_2) \to (w_1, w_2); \quad (w_1, w_2) \to (w_1, -w_2); \quad (w_1, w_2) \to (-w_1, w_2);$$
$$(w_1, w_2) \to (-w_1, -w_2)$$

oder, als Permutationsgruppe der Gleichungswurzeln, durch die Identität und die drei Doppelvertauschungen (12) (34), (13) (24), (14) (23). Es müssen daher die 3 Zahlen

$$x_1 x_2 + x_3 x_4, \quad x_1 x_3 + x_2 x_4, \quad x_1 x_4 + x_2 x_3, \tag{1}$$

welche diese Vertauschungen gestatten, rational sein. Von diesen Zahlen ist wegen der Reziprozität der Gleichung eine gleich 2 die andern seien y_1 und y_2. Summe und Produkt der 3 Zahlen (1) können als symmetrische Funktionen leicht berechnet werden. Man findet

$$y_1 + y_2 + 2 = t/r, \quad 2 y_1 y_2 = (2s^2 - 4rt)/r^2.$$

Aus $y_1 + y_2$ und $y_1 y_2$ ergibt sich die Diskriminante der quadratischen Gleichung, der y_1 und y_2 genügen:

$$D = (y_1 + y_2)^2 - 4 y_1 y_2 = (t^2 + 4rt + 4r^2 - 4s^2)/r^2.$$

Es muss also $(t + 2r)^2 - (2s)^2$ Quadrat einer natürlichen Zahl sein.

Diese Bedingung ist aber auch hinreichend. Denn mit (1) sind auch $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$, $(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)$, $(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$ rational. Wegen $\Sigma x_i = -s/r$ genügen daher $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$, $x_1 + x_4$ je einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten. Somit lässt sich x_1 und damit auch x_2, x_3, x_4 als lineare Funktion von 3 Quadratwurzeln w_1, w_2, w_3 darstellen. Wegen der vorausgesetzten Irreduzibilität der gegebenen Gleichung müssen zwei von diesen Wurzeln von einander unabhängig sein; die dritte ist dann im Körper $R(w_1, w_2)$ enthalten. (Sie ist, abgesehen von einem rationalen Faktor, gleich $w_1 w_2$.)

Weitere Lösungen sandten W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf), I. PAASCHE (München).