Eine Bemerkung über stabile Polynome

Unter einem stabilen Polynom verstehen wir im weiteren ein Polynom

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^{n-\nu}, \quad a_0, \ldots, a_n \text{ reell und } a_0 > 0, \tag{1}$$

das nur Wurzeln mit negativem Realteil besitzt (vgl. [1][1]), S. 403).

Damit (1) stabil ist, muss notwendigerweise

$$a_1 > 0, \ldots, a_n > 0 \tag{2}$$

sein ([1], S. 403).

Wir setzen daher für das Weitere voraus, dass alle betrachteten Polynome positive Koeffizienten besitzen.

Es gilt folgender

Satz 1. Wenn $P(z)$ ein stabiles Polynom ist, so ist auch $P'(z)$ stabil.

Zum Beweis überlegen wir uns, dass definitionsmäss ein konvexes Vieleck derart in der linken komplexen Halbebene aufgespannt werden kann, dass es alle Wurzeln von $P(z)$ enthält. Nach dem Satz von GAUSS-LUCAS folgt dann, dass die Wurzeln von $P'(z)$ in demselben Vieleck liegen, und somit $P'(z)$ auch ein stabiles Polynom ist. Daraus folgt unsere Behauptung.

Nun können wir fragen, ob die obige Aussage gültig bleibt, wenn man den Prozess der Differentiation durch den der Integration ersetzt. Dieses Problem kann man auch so formulieren: Ist es möglich, eine positive reelle Zahl c derart anzugeben, dass mit $P(z)$ auch

$$Q(z, c) =_{Df} \int_0^z P(z)\, dz + c^{2)} \tag{3}$$

stabil ist?

Eine Antwort auf diese Frage gibt der folgende

Satz 2. a) Falls der Grad des Polynoms (1) gleich 1 oder 2 ist, lässt sich immer eine Konstante c mit den obigen Eigenschaften angeben.

b) Ist der Grad des Polynoms (1) grösser als 2, so gibt es Polynome, für die man keine Konstante c mit den obengenannten Eigenschaften angeben kann.

Der Beweis von a) ergibt sich sofort durch direkte Anwendung des HURWITZschen Satzes[3]) auf das integrierte Polynom.

$n = 1$: $\qquad P_1(z) = a_0 z + a_1 .$

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, S. 106.

[2]) Das Integral ist das übliche Riemannsche Integral.

[3]) (1) ist dann und nur dann stabil, wenn die n Determinanten $\delta_j = |b_{ik}|$, $b_{ik} = a_{2k-i}$ ($a_t = 0$ für $t < 0$, $1 \leqq i \leqq j$) positiv sind ([2], S. 534).

Nach unseren Voraussetzungen zu Beginn dieser Note in (2) ist $P_1(z)$ immer stabil. Integration ergibt

$$Q_1(z, c) = \frac{a_0}{2} z^2 + a_1 z + c .$$

$Q_1(z, c)$ ist genau dann stabil, wenn $c > 0$ ist. Ein solches c kann natürlich immer angegeben werden.

$n = 2$: $$P_2(z) = a_0 z^2 + a_1 z + a_2 .$$

Durch Integration erhalten wir

$$Q_2(z, c) = \frac{a_0}{3} z^3 + \frac{a_1}{2} z^2 + a_2 z + c .$$

Damit $Q_2(z, c)$ stabil ist, ist notwendig und hinreichend das Erfülltsein der Ungleichung $3a_1 a_2 > 2a_0 c > 0$.

Auch in diesem Fall kann man immer ein c finden, das diesen Bedingungen genügt.

Um jetzt b) zu beweisen, müssen wir zwei Fälle getrennt behandeln.

Fall 1: $n = 3$. $$P_3(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 .$$

Nach den Voraussetzungen in (2) und dem Satz von Hurwitz ist $P_3(z)$ genau dann stabil, wenn $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ ist. Integration von $P_3(z)$ liefert

$$Q_3(z, c) = \frac{a_0}{4} z^4 + \frac{a_1}{3} z^3 + \frac{a_2}{2} z^2 + a_3 z + c ;$$

dieses Polynom ist nach dem Satz von Hurwitz dann und nur dann stabil, wenn die Ungleichungen

$$\frac{9 a_3}{4 a_1^2} \left(\frac{2 a_1 a_2}{3} - a_0 a_3\right) > c > 0$$

erfüllt sind. Wählen wir aber $P_3(z)$ derart, dass die Ungleichungen $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ und $(2/3)\, a_1 a_2 - a_0 a_3 \leqslant 0$ befriedigt sind, so ist $Q(z, c)$ für keine Wahl von c ein stabiles Polynom.

Fall 2: $n > 3$[4]. Wir verwenden jetzt nicht das für grössere n sehr unbequeme algebraische Kriterium von Hurwitz, sondern das geometrische Lücken- und Lagekriterium, zu dessen Anwendung einige Vorbereitungen notwendig sind. Setzt man $z = i\omega$, ω reell, so erhält man aus (1) nach Aufteilung in Real- und Imaginärteil

$$P(i\omega) = U(\omega^2) + i\omega V(\omega^2) . \tag{4}$$

Dasselbe machen wir mit dem Polynom $Q(z, c)$. In dem Fall, dass der Grad n von $P(z)$ eine gerade Zahl ist, ergibt sich

$$Q(z, c) = \int_0^z \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^{n-\nu} dz + c = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{n - \nu + 1} z^{n-\nu+1} + c$$

und

$$Q(i\omega, c) = \sum_{\lambda=0}^{n/2-1} \frac{a_{2\lambda+1}}{n - 2\lambda} (-1)^{n/2-\lambda} (\omega^2)^{n/2-\lambda} + c + i\omega \sum_{\mu=0}^{n/2} \frac{a_{2\mu}}{n - 2\mu + 1} (-1)^{n/2-\mu} (\omega^2)^{n/2-\mu} .$$

Beachtet man noch, dass

$$P(i\,\omega) \equiv U(\omega^2) + i\,\omega\,V(\omega^2) = \sum_{\mu=0}^{n/2} a_{2\mu}(-1)^{n/2-\mu}(\omega^2)^{n/2-\mu}$$

$$+\,i\,\omega \sum_{\lambda=0}^{n/2-1} a_{2\lambda+1}(-1)^{n/2-\lambda-1}(\omega^2)^{n/2-\lambda-1}$$

ist, so erhält man

$$Q(i\,\omega, c) = \left[-\int_0^\omega \omega\,V(\omega^2)\,d\omega + c\right] + i\left[\int_0^\omega U(\omega^2)\,d\omega\right]. \tag{5}$$

Wenn der Grad n von $P(z)$ eine ungerade Zahl ist, ergibt eine analoge Rechnung dasselbe Resultat wie in (5).

Dabei wollen wir festhalten, dass der Grad von $U(\omega^2)$ bzw. $V(\omega^2)$ bezüglich ω^2 gleich $n/2$ bzw. $(n-2)/2$ ist, wenn (1) von geradem Grad ist und gleich $(n-1)/2$ in beiden Fällen, wenn (1) ungeraden Grad besitzt.

Nun formulieren wir das sogenannte Lücken- und Lagekriterium[5]): Das Polynom (1) ist genau dann stabil, wenn die Polynome $U(\omega^2)$ und $\omega\,V(\omega^2)$ aus (4) lauter reelle, einfache Nullstellen besitzen, die sich gegenseitig trennen.

Um unsere Behauptung zu beweisen, genügt es, zu jedem $n > 3$ ein stabiles Polynom $P(z)$ vom Grade n derart zu konstruieren, dass das Polynom

$$\int_0^\omega U(\omega^2)\,d\omega \tag{6}$$

mindestens zwei komplexe Nullstellen besitzt, wobei $U(\omega^2)$, wie in (4), der Realteil von $P(i\,\omega)$ ist. Dann kann nämlich nach dem Lücken- und Lagekriterium das Polynom $Q(z, c)$ für keine Wahl von c stabil sein, obwohl $P(z)$ stabil ist; denn (6) ist gerade der Imaginärteil von $Q(i\,\omega, c)$, und dieser darf, wenn $Q(z, c)$ stabil wäre, nur reelle Nullstellen besitzen.

Es sei jetzt $n > 3$ eine natürliche Zahl. Weiter

1. $m = \begin{cases} n & \text{wenn } n \text{ gerade ist} \\ n-1 & \text{wenn } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$

2. $U^*(\omega^2) = \begin{cases} (\omega^2-1)^2 \ldots (\omega^2 - m/4)^2 - \varepsilon, & \text{wenn } m/2 \text{ gerade ist} \\ \omega^2(\omega^2-1)^2 \ldots (\omega^2 - (m-2)/4)^2 - \varepsilon, & \text{wenn } m/2 \text{ ungerade ist} \end{cases}$

3. $\varepsilon > 0$ werde so klein gewählt, dass $U^*(\omega^2)$ lauter einfache, reelle Nullstellen besitzt und $\int_0^\omega U^*(\omega^2)\,d\omega$ höchstens zwei reelle Nullstellen.

4. $k = \begin{cases} n-2 & \text{wenn } n \text{ gerade ist} \\ n-1 & \text{wenn } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$

5. $V^*(\omega^2)$ sei ein Polynom vom Grad $k/2$ bezüglich ω^2, wobei $\omega\,V^*(\omega^2)$ lauter einfache reelle Wurzeln besitzen soll, die die Wurzeln von $U^*(\omega^2)$ trennen.

---

[4]) Der Grundgedanke zu diesem Beweis entstammt einer Diskussion mit Herrn W. HAHN.

[5]) Das Lücken- und Lagekriterium, als ein spezielles geometrisches Stabilitätskriterium wird in [3], S. 192–195 behandelt. Es ist eine Folge des Ortskurvenkriteriums, vgl. [4], S. 95–97.