liegt (genau dann besitzt M in $M^{-1} := A^{-1} - \varepsilon A^{-1} B A^{-1}$ eine eindeutig bestimmte Rechts- und Links-Inverse). – Schreibt man das Produkt $M N$ zweier dualer Matrizen $M = A + \varepsilon B$ und $N = C + \varepsilon D$ einmal aus, dann erkennt man nach der «Methode des scharfen Hinguckens», dass die Zuordnung

$$\begin{pmatrix} a_0 + \varepsilon b_0 & a_1 + \varepsilon b_1 \\ a_2 + \varepsilon b_2 & a_3 + \varepsilon b_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & b_0 & b_1 \\ a_2 & a_3 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

wegen $|A| \neq 0$ die gewünschte isomorphe Abbildung angibt. G. GEISE, Dresden

Neue Aufgaben

Aufgabe 553. k étant un nombre naturel donné, appelons P_k le problème suivant: Existe-t-il des nombres triangulaires > 0 qui sont sommes de k nombres triangulaires consécutifs > 0?

Examiner pour quels entiers k, tels que $2 \leqq k \leqq 10$, le problème P_k n'a pas de solutions, pour quels k il admet un nombre fini > 0 de solutions, et pour quels k il a une infinité de solutions. W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Aufgabe 554. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres naturels k pour lesquels le problème P_k (voir n° 553) n'a pas de solutions, et une infinité de nombres k pour lesquels P_k a une infinité de solutions. W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Aufgabe 555. Aus neun Punkten $A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ eines Kegelschnitts werden die Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ und das Dreieck gebildet, das aus den Geraden A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 als Seiten besteht. Ist Dreieck ABC zu zweien der anderen Dreiecke perspektiv, so auch zu dem dritten. W. SCHÖBE, München

Aufgabe 556. Es sei $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$, a_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ eine komplexe p-te Einheitswurzel und p eine Primzahl. Man zeige, dass jede p-te Einheitswurzel gleich oft als Summand in der obigen Summe vorkommt. H. LÜNEBURG, Mainz

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchwegs so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes von Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur

1. Ein reguläres Dreieck ABC mit der Seite s liegt in der Projektionsebene und ist Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze D. Für die Neigungswinkel der Seitenflächen gilt:

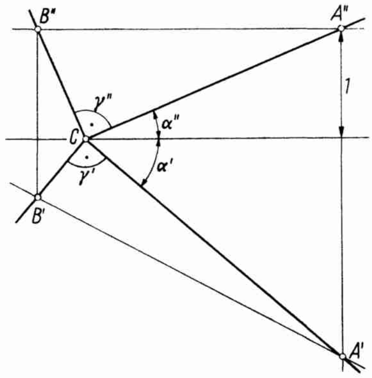
$$\operatorname{tg} \varphi_a = \operatorname{tg} \varphi_b = 2, \quad \operatorname{tg} \varphi_c = 1 .$$

Konstruiere den Riss des Tetraeders und zeige: D' halbiert die Dreieckshöhe h; D hat die Kote $s\sqrt{3}/4$.

2. Eine Ebene E ist durch die Punkte $A(5; 6; 1)$, $B(10; 5; 8)$ und $C(13; -3; 5)$ bestimmt. Lege durch B die Gerade g in E, deren beide Risse senkrecht aufeinanderstehen.
▶ Der Schnittpunkt von g' und g'' liegt auf der Schnittgerade von E mit der Koinzidenzebene. Bei der angegebenen Disposition hat die Aufgabe zwei Lösungen.

3. Ein schwerer Stab AB der Länge a is folgendermassen aufgehängt: A gleitet ohne Reibung an einer Gerade g, die gegenüber der Waagrechten um den Winkel α nach unten geneigt ist; B ist durch einen masselosen Faden der Länge a mit einem festen Punkt G von g verbunden. Für welchen Winkel $x = \sphericalangle AGB$ herrscht Gleichgewicht?
▶ $\operatorname{ctg} x = 3 \operatorname{tg} \alpha$.

4. **Descartes** (*La Géométrie*, 1637) gibt im letzten Abschnitt des zweiten Buches einen Ausblick auf die analytische Geometrie des Raumes und braucht dort implizit den offensichtlich falschen Satz: «Sind Grund- und Aufriss eines Winkels rechte, so ist der Winkel selbst ein rechter.» Zwischen welchen Grenzen muss ein Winkel liegen, damit er die genannte Bedingung erfüllen kann?
▶ Schneide die Schenkel des Winkels γ mit einer ersten Höhenlinie der Kote 1. Man findet:



$$\overline{AC}^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha'' + \operatorname{tg}^2\alpha' \operatorname{ctg}^2\alpha''$$

$$\overline{BC}^2 = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha'' + \operatorname{ctg}^2\alpha' \operatorname{tg}^2\alpha''$$

$$\overline{AB}^2 = \operatorname{tg}^2\alpha'' + \operatorname{ctg}^2\alpha'' + \operatorname{tg}^2\alpha' \operatorname{ctg}^2\alpha'' + \operatorname{ctg}^2\alpha' \operatorname{tg}^2\alpha''.$$

$$\cos\gamma = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{2\,\overline{AC}\;\overline{BC}} = \frac{1}{\overline{AC}\;\overline{BC}},$$

woraus

$$\sec^2\gamma = 3 + (\operatorname{tg}^2\alpha' + \operatorname{ctg}^2\alpha') + (\operatorname{tg}^2\alpha'' + \operatorname{ctg}^2\alpha'') + (\operatorname{tg}^2\alpha' \operatorname{ctg}^2\alpha'' + \operatorname{ctg}^2\alpha' \operatorname{tg}^2\alpha'').$$

Jeder Klammerausdruck ist als Summe positiver reziproker Zahlen $\geqq 2$, demnach gilt

$$\sec^2\gamma \geqq 9 \quad \text{oder} \quad |\cos\gamma| \leqq 1/3.$$

Soll $\gamma' = \gamma'' = \gamma''' = 90°$ sein, so gilt nur noch $\cos\gamma = \pm 1/3$. Das ist der Fall bei den Körperdiagonalen eines Würfels in einfachster Lage.

5. Bei gleichen Bezeichnungen wie in Aufgabe 4 sollen die Grösse des Winkels γ und sein Grundriss (also α') gegeben sein. Gesucht ist der Aufriss.
▶ Es ergibt sich eine quadratische Gleichung für $\operatorname{tg}^2\alpha''$. Die Annahme $\gamma = 105°$ und $\alpha' = 30°$ ergibt für α'' die Werte $\pm 54°36'$ und $\pm 22°18'$. Eine elegante Konstruktion habe ich nicht gefunden, vielleicht gelingt es einem Leser.