Neue Aufgaben

Aufgabe 549. Werden die Kanten eines regulären Polyeders auf eine beliebige Ebene projiziert, so ist die Summe der Quadrate der Kantenprojektionen stets gleich 2/3 der Summe aller Kantenquadrate. W. Jänichen, Berlin-Zehlendorf

Aufgabe 550. $n > 1$ sei eine gegebene natürliche Zahl. Für welche rationalen Zahlen r hat die Diophantische Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & & x_n \\ x_2 & x_3 & & x_n & r x_1 \\ \cdots & & & & \cdots \\ x_n & r x_1 & & r x_{n-2} & r x_{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

eine Lösung $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ mit rationalen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$?

E. Trost, Zürich

Aufgabe 551. Man beweise: Ist $e_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k/k$ als reduzierter Bruch dargestellt und α_n der Exponent von 2 in der Primzahlpotenzzerlegung des Zählers, so strebt α_n mit n gegen $+\infty$. Waldemar Schöbe, München

Aufgabe 552. In einem Simplex des R_n werden zwei Punkte beliebig so gewählt, dass keiner von ihnen auf einem $(n-1)$-dimensionalen Grenzraum liegt. Man zeige, dass die Fusspunkte der Ecktransversalen durch die beiden Punkte auf den Simplexkanten auf einer n-dimensionalen Quadrik liegen.

Bemerkung. Unter dem Fusspunkt P_{ij} der "Ecktransversale" durch den beliebigen Punkt P auf der Kante $A_i A_j$ versteht man den Schnittpunkt der Gerade $A_i A_j$ mit dem $(n-1)$-dimensionalen Unterraum, gebildet durch die Punkte

$$A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_{n+1}, P.$$

J. Schopp, Budapest

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchwegs so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. Willi Lüssy, Büelrainstrasse 51, Winterthur

1. Stehen in einem Sehnenviereck $ABCD$ die Diagonalen senkrecht aufeinander, so sind die Summen der Quadrate gegenüberliegender Seiten gleich.
   ▶ Von den vielen möglichen Beweisen dürfte der folgende besonders einfach sein: Spiegle das Dreieck ACD an der Mittelsenkrechten von AC, und die Beziehung ist sofort abzulesen.
2. Ein Sehnenviereck $ABCD$ hat den Umkreismittelpunkt M, seine Diagonalen stehen senkrecht aufeinander und schneiden sich in P. Die Mittelpunkte der Vierecksseiten und die Punkte M und P können stets als Parallelprojektionen der Ecken eines regulären Oktaeders aufgefasst werden.
   ▶ Benütze zum Beweis den Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABD.
3. Bestimme den Schwerpunkt S des Sehnenvierecks von Aufgabe 2.
   ▶ S teilt die Strecke MP im Verhältnis 1:2.