

Werk

Titel: Über Netze aus regulären Polygonen in der hyperbolischen Geometrie.

Autor: Zeitler, H.

Jahr: 1967

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199_0022|log24

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Über Netze aus regulären Polygonen in der hyperbolischen Geometrie

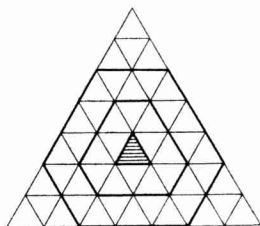
I. Ziel der Arbeit. Wir untersuchen reguläre N -Ecke mit den Winkeln $2\pi/m$ an den Ecken (dabei ist m eine natürliche Zahl).

Weil in der euklidischen Geometrie die Winkelsumme im N -Eck gleich $(N - 2)\pi$ ist, muss gelten:

$$N \frac{2\pi}{m} = (N - 2)\pi \quad \text{oder} \quad Nm - 2N - 2m = 0. \quad (1)$$

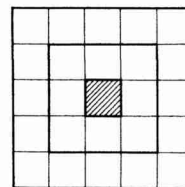
Diese Gleichung ist erfüllt für $N = 3, m = 6$; $N = 4, m = 4$; $N = 6, m = 3$. Von einem dieser drei regulären Polygone ausgehend, lässt sich durch Anlegen kongruenter Polygone, wie die Figuren 1, 2 und 3 zeigen, die ganze euklidische Ebene netzartig ausfüllen. Das Ausgangspolygon wird dabei von konzentrischen Gürteln umgeben. Bezeichnen wir die Fläche dieser Gürtel mit F_i ($i \geq 1$), so gilt in den drei Fällen:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F_{i+1}}{F_i} = 1, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F_i}{F_1 + F_2 + \dots + F_i} = 0. \quad (2a, b)$$



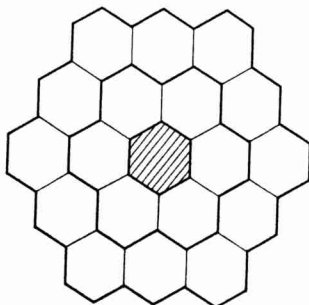
Figur 1

Dreiecksgitter in der euklidischen Ebene.



Figur 2

Vierecksgitter in der euklidischen Ebene.



Figur 3

Sechsecksgitter in der euklidischen Ebene.

F. KARTESZI [1]¹⁾ hat einen der Grenzwerte (2) für Gitter aus kongruenten Dreiecken im Bereich der hyperbolischen Geometrie untersucht. In der vorliegenden Arbeit betrachten wir Gitter der hyperbolischen Ebene, die durch fortgesetztes Anlagern kongruenter N -Ecke entstehen. Dabei soll zunächst $N > 3$ sein. Weil die Winkelsumme im hyperbolischen N -Eck kleiner als $(N - 2)\pi$ ist, müssen wir jetzt voraussetzen:

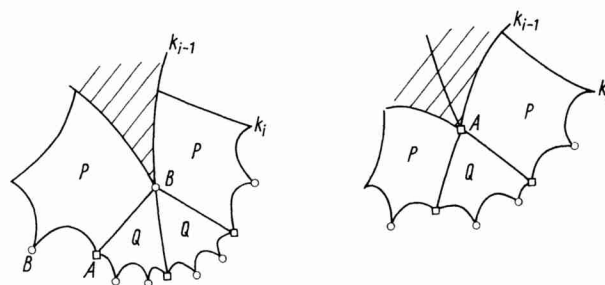
$$N \frac{2\pi}{m} < (N - 2)\pi \quad \text{oder} \quad Nm - 2N - 2m > 0. \quad (3)$$

In jedem solchen Gitter ist das Ausgangspolygon von konzentrischen Gürteln umgeben. Wir ermitteln für die Gürtelflächen F_i wieder die Grenzwerte (2). Daneben ergeben sich noch ähnliche Grenzwerte für die Gesamtflächen innerhalb gewisser Begrenzungspolygone. Schliesslich betrachten wir noch entartete, asymptotische Gitter in der hyperbolischen Ebene.

II. Aufstellung einer Differenzgleichung. 1. Die konzentrischen Gürtel.

Wir bezeichnen das Ausgangspolygon mit k_0 und allgemein die Begrenzungspolygone des i -ten Gürtels mit k_{i-1} und k_i . Der i -te Gürtel besteht aus allen zu k_0 kongruenten Fundamentalpolygone, die mit k_{i-1} entweder eine ganze Seite oder aber wenigstens einen Eckpunkt gemeinsam haben. Alle Seiten dieser Fundamentalpolygone, die mit k_{i-1} in keinem einzigen Punkt übereinstimmen, bilden das Begrenzungspolygon k_i . Damit ist der Begriff des Gürtels definiert.

Die Fundamentalpolygone des i -ten Gürtels können nur zwei verschiedene Lagen besitzen. Die P -Polygone haben mit k_{i-1} eine Seite, die Q -Polygone aber nur einen Eckpunkt gemeinsam (Figur 4).



Figur 4

Gitter in der hyperbolischen Ebene ($N = 5, m = 5$).

2. A-Punkte und B-Punkte.

Es gibt auf den Begrenzungspolygonen nur zwei Arten von Eckpunkten. Von den A -Punkten geht genau eine Seite eines Fundamentalpolygons durch einen Gürtel hindurch zum Begrenzungspolygon mit dem nächst niedrigeren Index. Bei B -Punkten jedoch gibt es eine solche Verbindungsstrecke nicht. B -Punkte existieren nur für $N > 3$. In den A -Punkten bildet das dazugehörige Begrenzungspolygon den Winkel $2(2\pi/m)$, in den B -Punkten dagegen den Winkel $2\pi/m$ (Figur 4).

¹⁾ Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf die Literatur, S. 62.

Wir bezeichnen die Anzahl der A -Punkte auf k_i mit x_i , die der B -Punkte mit y_i und die Anzahl der Fundamentalpolygone im i -ten Gürtel mit z_i . Damit ergibt sich für den i -ten Gürtel: Anzahl der P -Polygone = Anzahl der Seiten auf k_{i-1} . Also:

$$p_i = x_{i-1} + y_{i-1}.$$

Anzahl der Q -Polygone = $\frac{1}{N-2}$ [Anzahl der Seiten von $k_i - (N-3)$ mal Anzahl der P -Polygone].

Also:

$$q_i = \frac{x_i + y_i - (N-3)p_i}{N-2}.$$

Gesamtzahl der Fundamentalpolygone im i -ten Gürtel:

$$z_i = p_i + q_i = \frac{x_i + y_i + x_{i-1} + y_{i-1}}{N-2}. \quad (4)$$

Wir stellen weiter fest:

Zu jeder Seite auf k_{i-1} gehören $(N-4)$ B -Punkte auf k_i . Zu jedem A -Punkt auf k_{i-1} gehören $(N-3)(m-4)$ B -Punkte und $(m-3)$ A -Punkte auf k_i . Zu jedem B -Punkt auf k_{i-1} gehören $(N-3)(m-3)$ B -Punkte und $(m-2)$ A -Punkte auf k_i . Daher:

$$x_i = (m-3)x_{i-1} + (m-2)y_{i-1}, \quad (5)$$

$$y_i = x_{i-1}[N-4 + (N-3)(m-4)] + y_{i-1}[N-4 + (N-3)(m-3)] =$$

$$x_{i-1}[Nm - 3N - 3m + 8] + y_{i-1}[Nm - 2N - 3m + 5]. \quad (6)$$

3. Die Differenzgleichung.

Wir lösen die Gleichungen (5) und (6) zunächst nach x_{i-1} und y_{i-1} auf.

$$x_{i-1} = -y_i(m-2) + x_i(Nm - 2N - 3m + 5),$$

$$y_{i-1} = y_i(m-3) - x_i(Nm - 3N - 3m + 8).$$

Durch Einsetzen in (4) ergibt sich dann:

$$z_i = x_i. \quad (7)$$

Wir suchen jetzt nach einer Differenzgleichung der Form: $z_i = \alpha z_{i-1} + \beta z_{i-2}$.

Durch zweimaliges Anwenden von (5) und (6) auf (4) wird zuerst die linke Seite und dann durch Anwenden von (7), (5) und (6) die rechte Seite dieser Gleichung als Funktion von x_{i-2} und y_{i-2} dargestellt. Koeffizientenvergleich liefert schliesslich:

$$\alpha = Nm - 2N - 2m + 2, \quad \beta = -1$$

Damit erhalten wir eine Differenzgleichung 2. Ordnung. Wir schreiben:

$$\boxed{z_{i+2} = (Nm - 2N - 2m + 2)z_{i+1} - z_i} \quad (i \geq 1) \quad (8)$$

Der Beweisgang dieses Abschnitts ist nur durchführbar unter der Voraussetzung $N > 3$. Setzt man jedoch in (8) $N = 3$, so ergibt sich überraschend die bei KARTESZI bewiesene Gleichung. Für die weiteren Untersuchungen der Differenzgleichung (8) können wir also annehmen $N \geq 3$.

III. Auswertung der Differenzgleichung. Wir untersuchen zunächst die zu (8) gehörende charakteristische Gleichung.

$$\alpha^2 = (N m - 2 N - 2 m + 2) \alpha - 1 .$$

Wir schreiben kürzer $\alpha^2 = p \alpha - 1$.

Diese Gleichung hat zwei verschiedene irrationale Lösungen:

$$\alpha_1 = \frac{p}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4} , \quad \alpha_2 = \frac{p}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4} . \quad (9)$$

Beide Lösungen sind positiv, keine ist Eins, und es gilt $\alpha_1 > \alpha_2$. Nach einem bekannten Satz [2] über lineare, homogene Differenzgleichungen hat die allgemeine Lösung von (8) das Aussehen:

$$z_i = C_1 \alpha_1^i + C_2 \alpha_2^i$$

Im vorliegenden Fall kann keine der beiden Konstanten C_1, C_2 verschwinden.

Damit erhalten wir:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{z_{i+1}}{z_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{C_1 \alpha_1^{i+1} + C_2 \alpha_2^{i+1}}{C_1 \alpha_1^i + C_2 \alpha_2^i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{C_1 \alpha_1 + C_2 \alpha_2 (\alpha_2/\alpha_1)^i}{C_1 + C_2 (\alpha_2/\alpha_1)^i} .$$

Dieser Grenzwert nimmt, wegen $0 < \alpha_2/\alpha_1 < 1$, den Wert α_1 an. Also gilt unabhängig von irgendwelchen Anfangsbedingungen für unsere Gürtelflächen:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{F_{i+1}}{F_i} \right) = \alpha_1 .$$

Weiter ergibt sich:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{z_i}{z_1 + z_2 + \dots + z_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{C_1 \alpha_1^i + C_2 \alpha_2^i}{C_1 (\alpha_1 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_1^i) + C_2 (\alpha_2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_2^i)} .$$

Mit $\alpha_1 \neq 1, \alpha_2 \neq 1$ erhalten wir durch Summation im Nenner:

$$\begin{aligned} & \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(1 - \alpha_1) (1 - \alpha_2) (C_1 \alpha_1^i + C_2 \alpha_2^i)}{C_1 (\alpha_1 - \alpha_1^{i+1}) (1 - \alpha_2) + C_2 (1 - \alpha_1) (\alpha_2 - \alpha_2^{i+1})} \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(1 - \alpha_1) (1 - \alpha_2) (C_1 + C_2 (\alpha_2/\alpha_1)^i)}{C_1 (1 - \alpha_2) (\alpha_1^{1-i} - \alpha_1) + C_2 (1 - \alpha_1) (\alpha_2 \alpha_1^{-i} - \alpha_2 (\alpha_2/\alpha_1)^i)} . \end{aligned}$$

Dieser Grenzwert nimmt, wieder wegen $0 < \alpha_2/\alpha_1 < 1$, den Wert $(\alpha_1 - 1)/\alpha_1$ an. Also gilt, unabhängig von irgendwelchen Anfangsbedingungen, für unsere Gürtelflächen:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F_i}{F_1 + F_2 + \dots + F_i} = \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1} .$$

Bezeichnen wir weiter die Anzahl der Fundamentalpolygone innerhalb des Begrenzungs-polygons k_{i-1} mit w_{i-1} , so gilt:

$$z_i = w_i - w_{i-1} \quad \text{für} \quad i \geq 1 \quad \text{und} \quad w_0 = 1 .$$

Durch Einsetzen in (8) erhalten wir eine Differenzgleichung 3. Ordnung:

$$\boxed{w_{i+2} = (1 + \rho) w_{i+1} - (1 + \rho) w_i + w_{i-1}} \quad (i \geq 1)$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung hat neben (9) noch die Lösung 1. Weil die drei Wurzeln voneinander verschieden sind, gilt nach dem bereits verwendeten Satz [2] über homogene, lineare Differenzgleichungen, für die allgemeine Lösung:

$$w_{i-1} = C_1 \alpha_1^{i-1} + C_2 \alpha_2^{i-1} + C_3.$$

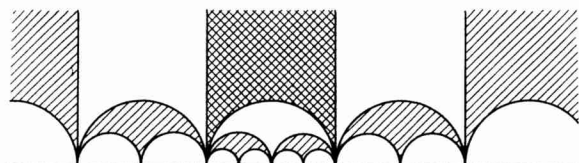
α_1 ist die grösste der drei Wurzeln, also folgt für das allgemeine Integral der Differenzgleichung:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{w_i}{w_{i-1}} = \alpha_1; \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{w_i}{w_0 + w_1 + \dots + w_i} = \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}.$$

Bezeichnen wir die Fläche innerhalb des Begrenzungspolygons k_{i-1} mit \mathcal{G}_{i-1} , so gilt speziell:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{G}_i}{\mathcal{G}_{i-1}} = \alpha_1, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{G}_i}{\mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_1 + \dots + \mathcal{G}_i} = \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}. \quad (10 \text{ a, b})$$

IV. Asymptotische Gitter in der hyperbolischen Ebene. Ein hyperbolisches N -Eck heisst asymptotisch, wenn seine Ecken unendlich fern sind. Alle N -Ecke dieser Art sind regulär und zueinander kongruent. Die Winkel an den Ecken verschwinden ($m \rightarrow \infty$). Auch jetzt lässt sich die Ebene, von einem N -Eck ausgehend, gitterförmig ausfüllen. Figur 5 erläutert diesen Vorgang für $N = 3$ im speziellen Poincaré-Modell (das Ausgangspolygon und der zweite Gürtel wurden schraffiert). Für die Anzahl der Polygone im i -ten Gürtel erhalten wir sofort $z_i = N(N-1)^{i-1}$.



Figur 5

Asymptotisches Dreiecksgitter in der hyperbolischen Ebene.

Damit ergibt sich weiter:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F_{i+1}}{F_i} = N - 1, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F_i}{F_1 + F_2 + \dots + F_i} = \frac{N - 2}{N - 1}.$$

Die Differenzgleichung lautet jetzt:

$$\boxed{z_{i+1} = (N - 1) z_i} \quad (i \geq 1)$$

Setzen wir wie im letzten Abschnitt wieder $z_i = w_i - w_{i-1}$, so erhalten wir:

$$\boxed{w_{i+1} = N w_i - (N - 1) w_{i-1}} \quad (i \geq 1)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet $w_{i-1} = C_1 + C_2 (N-1)^{i-1}$.
Als Partikulärintegral für unseren Spezialfall ergibt sich:

$$w_{i-1} = \frac{N(N-1)^{i-1} - 2}{N-2}.$$

Daraus folgt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{G}_i}{\mathcal{G}_{i-1}} = N-1; \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{G}_i}{\mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_1 + \dots + \mathcal{G}_i} = \frac{N-2}{N-1}.$$

V. Der euklidische Fall. Die Untersuchung bei KARTESZI ($N=3$) und diejenige des Abschnitts II ($N > 3$) gelten auch in der euklidischen Geometrie. Es muss allerdings die Bedingung (1) erfüllt sein. Damit vereinfacht sich (8) zu:

$$z_{i+2} = 2z_{i+1} - z_i \quad (i \geq 1)$$

Die Diskriminante der zugehörigen charakteristischen Gleichung verschwindet, es ergibt sich $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Die allgemeine Lösung der Differenzgleichung hat, nach einem Satz über homogene, lineare Differenzgleichungen [2] die Form $z_i = C_1 + C_2 i$. Für das Drei-, Vier- und Sechsecksgitter erhalten wir die Partikulärintegrale: $z_i = 12i$, $z_i = 8i$, $z_i = 6i$. Damit erkennen wir sofort die Richtigkeit von (2). Mit $z_i = w_i - w_{i-1}$ ergibt sich weiter:

$$w_{i+2} = 3w_{i+1} - 3w_i + w_{i-1} \quad (i \geq 1)$$

Die Wurzeln der zugehörigen charakteristischen Gleichung fallen wieder zusammen und haben den Wert 1. Das allgemeine Integral der Differenzgleichung lautet nach [2]:

$$w_{i-1} = C_1 + C_2(i-1) + C_3(i-1)^2.$$

Für das Drei-, Vier- und Sechsecksgitter ergeben sich die Partikulärintegrale:

$$w_{i-1} = 1 + 6(i-1) + 6(i-1)^2; \quad w_{i-1} = 1 + 4(i-1) + 4(i-1)^2;$$

$$w_{i-1} = 1 + 3(i-1) + 3(i-1)^2.$$

Daraus folgt:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{G}_i}{\mathcal{G}_{i-1}} = 1; \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{G}_i}{\mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_1 + \dots + \mathcal{G}_i} = 0.$$

VI. Zusammenfassung und Ausblick. In der vorliegenden Arbeit ging es zunächst um die Untersuchung von Gittern aus nicht entarteten, regulären N -Ecken in der hyperbolischen Ebene. Dann wurden asymptotische N -Ecke und schliesslich der euklidische Grenzfall behandelt. Dabei stellten wir gewisse Differenzgleichungen auf. Unter Verwendung der Wurzeln der entsprechenden charakteristischen Gleichungen konnten für die einzelnen Fälle die Grenzwerte (2a, b) und (10a, b) berechnet werden. Hat der Ausdruck (2a) für eine Folge positiver Zahlen F_i einen Grenzwert $\alpha \geq 1$, so lässt sich ganz allgemein zeigen, dass dann auch (10a) diesen Wert besitzt und weiter, dass (2b) und (10b) den Wert $(\alpha-1)/\alpha$ haben müssen.

Es wäre nun interessant, die ganze Problematik in drei- und mehrdimensionale Räume zu übertragen.