Kleine Mitteilungen

Bemerkungen zu einem Satz von Steinitz

Der wohlbekannte Satz von STEINITZ [1][1]) über nicht umschreibbare Polyedertypen lässt sich folgenderweise verschärfen (Ein Polyedertypus heisst nicht umschreibbar, wenn kein konvexer Repräsentant dieses Typus eine Inkugel besitzt, die alle seine Seitenflächen berührt.):

Wenn unter den n Flächen eines Polyeders (Typus) H eine Menge T mit $m > n/2$ Flächen existiert, in der keine zwei Flächen eine gemeinsame Kante haben, dann gibt es keine Kugel, die alle Flächen der Menge T berührt. Dies gilt auch für $m = n/2$, wenn es eine Kante gibt, die mit keiner Fläche aus T inzidiert.

Der Satz von STEINITZ besagt nur, dass ein solches Polyeder nicht umschreibbar ist.

Zum Beweis nehmen wir an, dass eine Inkugel alle Flächen der Menge T berührt. Dann berührt sie entweder auch alle anderen Flächen des Polyeders H, die nicht zu T gehören, oder es gibt Flächen $\alpha_1, \alpha_2 \dots$, die sie nicht berührt. Im zweiten Falle legen wir zu diesen Flächen parallele Ebenen, die die Inkugel berühren. Keine dieser Ebenen schneidet eine ganze Fläche aus T ab, auch führt diese Operation nicht dazu, dass irgendwelche zwei Flächen aus T eine gemeinsame Kante bekommen. Dagegen kann bei dieser Operation eine solche Fläche ganz weggeschnitten werden, die die Inkugel nicht berührt und also nicht zur Klasse T gehört. Wir bekommen so ein einer Kugel umbeschriebenes Polyeder H_1 mit $n_1 \leqq n$ Flächen, unter denen es eine Menge T mit $m \geqq n/2 \geqq n_1/2$ Ebenen gibt, von denen keine zwei «benachbart» sind.

Der weitere Teil des Beweises ist eine knappere Fassung des Beweises von STEINITZ [1]. Die Flächen des Polyeders H_1, die nicht zu T gehören, bilden die Menge T'. K sei die Menge derjenigen Kanten des Polyeders H_1, die mit Flächen aus T inzidieren. Jede Kante aus K inzidiert also mit einer Fläche aus T und mit einer Fläche aus T'; aber eine Fläche aus T' kann auch mit einer Kante inzidieren, die nicht zu K gehört.

Jede Fläche von H_1 zerlegen wir in Dreiecke, indem wir den Berührungspunkt der Inkugel mit den Eckpunkten verbinden. Jede Kante kommt bei zwei kongruenten Dreiecken vor, deshalb sind die diesen Kanten gegenüber liegenden Winkel gleich. Die Summe der den Kanten aus K gegenüber liegenden Winkel in den Flächen von T ist $2\pi m$. Gleich gross sollte auch die Summe der entsprechenden Winkel in den Flächen aus T' sein. Das ist aber nicht möglich, wenn $m > n_1/2$ ist, oder wenn $m = n_1/2$ ist und H_1 eine Kante enthält, die nicht zu K gehört. Dieser Widerspruch beendet den Beweis des Satzes.

ERNEST JUCOVIČ, Prešov, ČSSR

LITERATURVERZEICHNIS

[1] STEINITZ, E., *Über isoperimetrische Probleme bei konvexen Polyedern II*, J. reine angew. Math. *159*, 133–143 (1928).

Aufgaben

Aufgabe 521. Die drei Ecken P_1, P_2, P_3 eines beliebigen Dreiecks sollen durch eine räumliche Inversion in die drei Punkte P_1^*, P_2^*, P_3^* so abgebildet werden, dass

$$P_1^* P_2^* = P_2 P_3, \quad P_2^* P_3^* = P_3 P_1, \quad P_3^* P_1^* = P_1 P_2.$$

Welches ist der geometrische Ort für das Inversionszentrum?

W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf die Literatur, S. 39.

Lösung des Aufgabenstellers (vereinfacht von C. BINDSCHEDLER): Es sei J ein Inversionszentrum von der veriangten Art und $\varrho_i = \overline{JP_i}$. Nun gilt allgemein für den Abstand der Bilder A', B' zweier Punkte A, B die Beziehung

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}\,(r^2/\overline{JA}\cdot\overline{JB}) \tag{1}$$

mit r^2 als Inversionspotenz (siehe z.B. HADAMARD: Leçons de Géométrie élémentaire I., 9. Aufl., S. 213). Nach den Bedingungen der Aufgabe gelten also die Gleichungen

$$\overline{P_1^*P_2^*} = c(r^2/\varrho_1\,\varrho_2) = a, \quad \overline{P_2^*P_3^*} = a(r^2/\varrho_2\,\varrho_3) = b, \quad \overline{P_3^*P_1^*} = b(r^2/\varrho_3\,\varrho_1) = c, \tag{2}$$

wenn $\overline{P_1P_2} = c$, $\overline{P_2P_3} = a$, $\overline{P_3P_1} = b$ gesetzt wird. Daraus folgt

$$\varrho_1/\varrho_2 = b^2/a\,c, \quad \varrho_2/\varrho_3 = c^2/a\,b, \quad \varrho_3/\varrho_1 = a^2/b\,c, \quad r^3 = \varrho_1\,\varrho_2\,\varrho_3. \tag{3}$$

J liegt also auf drei «Apollonischen Kugeln» bezüglich der Punktepaare P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 und da jede der Gleichungen (3) eine Folge der beiden andern ist, schneiden sich die drei Kugeln in einem Kreis (oder überhaupt nicht), der die Ebene $P_1P_2P_3$ unter einem rechten Winkel schneidet.

Nun gehört der eine der beiden Brocardschen Punkte (er sei Q) dem gesuchten geometrischen Ort an. Die zugehörigen Punkte P_1^*, P_2^*, P_3^* liegen dann mit P_1, P_2, P_3 auf dem gleichen Kreis (siehe auch EMMERICH: Die Brocardschen Gebilde, Berlin 1891, S. 29). Für den zu Q inversen Punkt Q' bezüglich dieses Kreises gelten dieselben Abstandsverhältnisse $\varrho_1:\varrho_2:\varrho_3$ wie für Q, was man aus (1) unmittelbar abliest (es ist $\overline{P_iQ'} = \overline{P_iQ}\,(r^2/r\cdot\overline{OQ})$, wobei O und r jetzt Mittelpunkt und Radius des Umkreises von $P_1P_2P_3$ bedeuten). Der gesuchte Ort ist also der Kreis, der die Ebene $P_1P_2P_3$ in Q und Q' orthogonal durchsetzt. Zu jedem Punkt J dieses Kreises gehört eine Inversionskugel, deren Radius durch (3) gegeben ist.

Aufgabe 522. 1. Gibt es eine auf $I = \{x \text{ rational}, 0 < x < 1\}$ definierte reellwertige Funktion, die in jedem Punkt von I ein starkes lokales Extremum hat?

2. Gibt es eine auf $J = \{x \text{ reell}, 0 < x < 1\}$ definierte reellwertige Funktion, die in jedem Punkt von J ein starkes lokales Extremum hat?

W. SCHWARZ und J. SPILKER, Freiburg i. Br.

Lösung von 1.: Ja! $x_1, x_2, \ldots$ sei eine Abzählung der rationalen Zahlen aus I, $\varphi(n)$ eine für $n = 1, 2, \ldots$ definierte, streng monotone Funktion. Für $x = x_n \in I$ setzen wir $f(x) = \varphi(n)$. Dann hat die Funktion $f(x)$ an jeder Stelle $x \in I$ ein starkes lokales Maximum bzw. Minimum, je nachdem die Funktion $\varphi(n)$ ab- oder zunimmt, denn für alle hinreichend nahe bei x_n liegenden x_ν ist $\nu > n$.

E. TEUFFEL, Korntal b. Stuttgart

Lösung der Aufgabensteller von 2. Nein! Sei f eine solche Funktion und $x \in J$ ein starkes lokales Maximum (kurz: Maximum) von f. Man kann x ein Intervall $K(x)$ mit folgenden Eigenschaften zuordnen: a) $x \in K(x) \subset J$; b) $K(x)$ hat rationale Endpunkte; c) für alle $y \in K(x)$ mit $y \neq x$ gilt $f(y) < f(x)$. Die Abbildung $x \rightarrow K(x)$ ist eineindeutig, denn aus $K(x) = K(y)$, $x \neq y$, folgt der Unsinn $f(y) < f(x) < f(y)$. Weil die Menge der Intervalle $K(x)$ mit rationalen Endpunkten abzählbar ist, ist die Menge M der Maxima von f höchstens abzählbar. Ebenfalls ist die Menge N der Maxima von $-f$ höchstens abzählbar. Da N auch die Menge aller starken lokalen Minima von f ist, gilt $M \cup N = J$. Nun folgt ein Widerspruch, denn M und N sind höchstens abzählbar, J aber nicht. Also gibt es keine solche Funktion f.

K. ZACHARIAS (Berlin) und die Aufgabensteller geben für 1. das Beispiel $f(p/q) = 1/q$, $(p, q) = 1$. Für 2. weist K. ZACHARIAS auf einen Satz aus H. HAHN: Reelle Funktionen, Leipzig 1932, S. 181, Absatz 24.4.1 hin, aus dem die Abzählbarkeit von J sofort folgen würde.

Aufgabe 523. Man zeige, dass das Polynom in z

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+k-i}{k} z^i + \sum_{i=0}^{k} \binom{n+k-i}{n} z^{1+2i} - z^{2+n+2k} \quad (n, k = 0, 1, 2, \ldots)$$

den Faktor $1 + z - z^2$ enthält. I. PAASCHE, München

Lösung: Es sei $f(n, k)$ das vorgelegte Polynom und $g(z) = 1 + z - z^2$. Man findet leicht

$$f(n, 0) = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} g(z), \tag{1}$$

$$f(0, k) = \frac{(z^2)^{k+1} - 1}{z^2 - 1} g(z). \tag{2}$$

Ferner besteht die Identität

$$f(n+1, k-1) + f(n, k) - f(n+1, k) = -z^{n+2k+1} g(z)$$

oder

$$f(n+1, k) \equiv f(n+1, k-1) + f(n, k) \pmod{g(z)}. \tag{3}$$

Wendet man diese Rekursionsformel auf die Polynome der rechten Seite von (3) wiederholt an, wobei mit jedem Schritt die Summe der beiden Argumente um 1 abnimmt, so stellt sich schliesslich diese rechte Seite (mod $g(z)$) als Summe von lauter Polynomen vom Typus (1) oder (2) dar, ist also tatsächlich durch $g(z)$ teilbar. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Weitere Lösungen sandten B. BUNDSCHUH (Freiburg i. Br.), L. CARLITZ (Duke Univ., Durham USA), W. MEILI (Winterthur).

Aufgabe 524. $a_1 < a_2 < \cdots$ sei eine unendliche Folge natürlicher, paarweise teilerfremder Zahlen, von denen keine eine Primzahl ist. Man beweise

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} < \infty.$$

P. ERDÖS, Budapest

Lösung: Selbstverständlich genügt es, den Fall $a_1 > 1$ zu betrachten. Bezeichnet s_n den kleinsten Primteiler von a_n, so folgt aus $(a_m, a_n) = 1$, dass $s_m \neq s_n$ für $m \neq n$ gilt. Da a_n keine Primzahl ist, ergibt sich weiter $a_n = s_n r_n$ mit $r_n \geq s_n$, also $a_n \geq s_n^2$ für alle natürlichen Zahlen n. Mit $q(n) := \max\{s_1, \ldots, s_n\}$ gilt für alle natürlichen n:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s_k^2} \leq \sum_{k=1}^{q(n)} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6}.$$

Mit Rücksicht auf das monotone Wachsen der Partialsummen der zu untersuchenden Reihe folgt die Behauptung.

J. RÄTZ, Bern

O. REUTTER (Ochsenhausen) erhält mit dem Resultat der Aufgabe 490 (El. Math. *20* (1965), 137) und $a_n \geqq p_n^2$ ($p_n = n$-te Primzahl) die Abschätzung $\sum_{i=1}^{\infty} 1/a_i < \pi^2/6e$.

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), H. BITTNER (Berlin), P. BUNDSCHUH (Freiburg i. Br.), H. HARBORTH (Braunschweig), H. MEILI (Winterthur), H. MÜLLER (Berlin), J. SPILKER (Freiburg i. Br.), J. STEINIG (Zürich), E. TEUFFEL (Korntal b. Stuttgart), D. VOICULESCU (Bukarest), W. v. WAHL (Göttingen).