

Werk

Titel: Eine Kennzeichnung des Kreises.

Autor: Tóth, L. Fejes

Jahr: 1967

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199_0022|log14

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band XXII

Heft 2

Seiten 25–48

10. März 1967

Eine Kennzeichnung des Kreises

In gewissen Untersuchungen [1, 2, 3] spielt der Begriff der Kreuzung von konvexen Gebieten eine Rolle. Folgende Definition bezieht sich auf allgemeinere Punktmenge. Wir sagen, dass zwei zusammenhängende Punktmenge a und b einander *kreuzen*, wenn keine der Punktmenge $a - ab$, $b - ab$, die aus a oder b durch Heraushebung ihres Durchschnittes ab entstehen, zusammenhängend ist. Dabei sei eine Punktmenge *zusammenhängend* genannt, wenn sich je zwei ihrer Punkte durch einen zu der Menge gehörigen Jordanschen Bogen verbinden lassen.

Es gilt folgender Satz:

In der Euklidischen Ebene sei eine zusammenhängende, abgeschlossene Punktmenge s vorgegeben. Besitzt die Menge s die Eigenschaft, dass sie keines der zu ihr kongruenten Exemplare kreuzt, so ist s entweder ein Punkt, oder eine abgeschlossene Kreisscheibe, oder eine abgeschlossene Halbebene, oder das Komplement einer offenen Kreisscheibe, oder die ganze Ebene.

Statt der Euklidischen Ebene wollen wir unseren Betrachtungen die Sphäre zugrunde legen, wo sich der entsprechende Satz und sein Beweis kürzer formulieren lassen:

Besitzt auf der Sphäre eine zusammenhängende, abgeschlossene Punktmenge s die Eigenschaft, dass sie keine zu ihr kongruente Punktmenge kreuzt, so ist s ein Kreis.

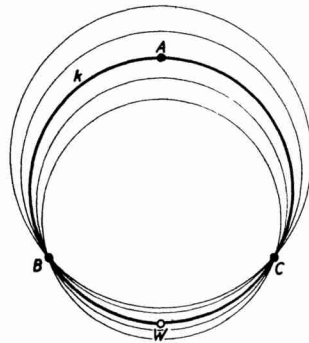
Hier wird unter einem *Kreis* die Menge aller Punkte verstanden, deren Abstand von einem festen Punkt eine vorgegebene Grösse nicht übertrifft. Diese Definition umfasst neben den Kreisscheiben (Kugelkappen) auch die leere Menge, einen Punkt und die ganze Sphäre.

Die Tatsache, dass zwei Kreise einander nie kreuzen, leuchtet ein. Deshalb setzen wir voraus, dass s kein Kreis ist. Wir zeigen, dass sich die Punktmenge s durch eine Drehung mit ihrer ursprünglichen Lage in Kreuzung bringen lässt.

Wir nennen die Punkte von s schwarz und die übrigen Punkte der Sphäre weiss. Wir behaupten: Es gibt eine Kreislinie, die je ein einander trennendes schwarzes und weisses Punktepaar enthält.

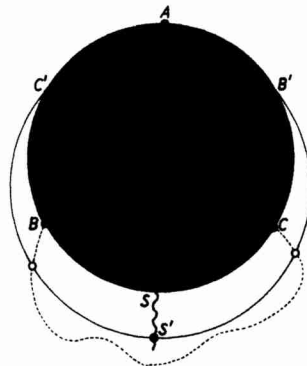
Um dies einzusehen, können wir voraussetzen, dass auch die Menge der weissen Punkte zusammenhängend ist. Sonst hätte nämlich eine Kreislinie, die zwei nicht zusammenhängende weisse Komponenten verbindet, die behauptete Eigenschaft.

Wir betrachten drei Randpunkte A, B, C von s . Da s abgeschlossen ist, sind A, B und C schwarz. Es sei k die durch A, B und C hindurchgehende Kreislinie. Die Punkte A, B, C zerlegen k in drei Bögen. Wir setzen zunächst voraus, dass k , etwa auf dem Bogen BC , einen weissen Punkt W enthält (Figur 1). Dann ist natürlich auch eine ganze Umgebung von W weiss. Da ferner A ein Grenzpunkt von s ist, gibt es in jeder Umgebung von A weisse Punkte. Deshalb gibt es unter den durch B und C hindurchgehenden Kreislinien eine, die auf beiden Bögen BC und CB je einen weissen Punkt enthält.



Figur 1

Wir haben noch den Fall zu betrachten, dass die ganze Kreislinie k schwarz ist. Da nach Voraussetzung die Menge der weissen Punkte zusammenhängend ist, ist eine Seite von k ganz schwarz. Wäre die andere Seite vollständig weiss, so wäre s ein durch k begrenzter Kreis, was unserer Voraussetzung widerspricht. Deshalb enthält k , etwa auf dem Bogen BC , einen Punkt S , der in jeder Umgebung einen nicht zur schwarzen Seite von k gehörigen schwarzen Punkt S' enthält (Figur 2). Da B und C Randpunkte sind, sind sie durch einen weissen Kurvenbogen verbunden. Wir wählen den Punkt S' so, dass er zwischen diesen Bogen und den Bogen BC von k fällt. Ferner wählen wir auf den Bögen AB und CA von k je einen Punkt C' und B' , und betrachten die Kreislinie $k' = C'S'B'$. Offensichtlich enthalten beide Bögen $C'S'$ und $S'B'$ von k' je einen weissen Punkt. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.



Figur 2