und für $f = R^{\beta\gamma} R$ folgt daraus $f^\beta = R^\beta R^\gamma = f^\gamma$. Da R nicht auf PQ liegt, geht f weder durch P noch durch Q, so dass $f \cap f^\beta = f \cap f^\gamma \in g, h$, also $f \cap R^\beta R^\gamma = O$ folgt. Daraus ergibt sich $R^\beta = R^\gamma O \cap P R$, und damit ist β eindeutig bestimmt.

Übrigens wurde bereits 1955 durch Ostrom (Canadian J. of Math. *8*, 563–567, Lemma 6) bewiesen (was sich auch leicht aus dem obigen Beweis ergibt), dass $\beta\gamma$ eine involutorische Kollineation mit Zentrum O und Achse PQ ist. Daraus erhält man sofort, dass β und γ auf PQ dieselbe Abbildung hervorrufen und daher einander eindeutig bestimmen.

G. Pickert, Gießen

Aufgabe 520. Es seien r_i die Anradien, r der Inradius, t_i die Winkelhalbierenden, s der halbe Umfang, F die Fläche eines Dreiecks. Man beweise

$$\sum_{i=1}^{3} r_i t_i \leqslant F \left[1 - \frac{38}{27}\left(\frac{s}{r}\right)^2 + \left(\frac{8}{27}\right)^2 \left(\frac{s}{r}\right)^4\right]^{1/2} .$$

Gleichheit gilt nur für das gleichseitige Dreieck. (s/r ist minimal für das gleichseitige Dreieck.)

H. Guggenheimer, University of Minnesota, USA

Solution; Let a_i ($i = 1, 2, 3$) denote the sides of the triangle. From the formulae

$$r_i = \sqrt{\frac{s(s - a_{i-1})(s - a_{i+1})}{s - a_i}}$$

and

$$t_i = \frac{2\sqrt{a_{i-1} a_{i+1}}}{a_{i-1} + a_{i+1}} \sqrt{s(s - a_i)}$$

(where the indices are taken mod 3) we obtain, by applying the inequality between the arithmetic and geometric means twice, the estimate

$$\sum r_i t_i \leqq s \sum_{i<j} \sqrt{(s - a_i)(s - a_j)} \leqq s^2 ;$$

equality holds if and only if $a_1 = a_2 = a_3$. It remains to prove that

$$s^2 \leqq F \left[1 - \frac{38}{27}\left(\frac{s}{r}\right)^2 + \left(\frac{8}{27}\right)^2 \left(\frac{s}{r}\right)^4\right]^{1/2} ,$$

or equivalently that $(x - 27)(64x - 27) \geqq 0$, with $x = (s/r)^2$. This follows immediately from the well-known inequality $(s/r)^2 \geqq 27$, in which equality holds if and only if the triangle is equilateral.

J. Steinig, Zürich

Diese Lösung gibt eine Verschärfung der Ungleichung der Aufgabe, die auch O. Reutter (Ochsenhausen) angegeben hat.

Weitere Lösungen sandten W. Bundschuh (Freiburg/Br.), W. Jänichen (Berlin), F. Leuenberger (Feldmeilen).

Neue Aufgaben

Aufgabe 541. Let I, O, H denote respectively the incenter, the circumcenter and the orthocenter of a triangle with sides a, b, c and the inradius r. Prove that the area K of the triangle IOH is given by

$$K = |(a - b)(b - c)(c - a)|/8r .$$

W. J. Blundon, Memorial Univ. of Newfoundland

Aufgabe 542. a) Trouver un exemple de trois nombres triangulaires distincts > 0, tels que la somme de deux quelconques d'eux est un nombre triangulaire.

b) Démontrer qu'il existe une infinité de tels triples de nombres triangulaires.

W. Sierpiński, Varsovie