Aufgaben

Aufgabe 517. n, k, a, d seien natürliche Zahlen und es sei $(a, d) = 1$. Wieviele der n Zahlen $a + k\,d$, $0 \leqq k \leqq n - 1$ sind zu n teilerfremd? W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

Lösung; Es sei P das Produkt aller in n enthaltenen grössten Primzahlpotenzen p^e, für die $p \mid d$. Dann ist die fragliche Anzahl gleich $P\,\varphi(n/P) = P\,\varphi(n)/\varphi(P)$.

Beweis; Sei $n = P\,N$ und $a_k = a + k\,d$, dann ist $(d, N) = 1$, also gilt

$$k \equiv l \pmod N \iff (k - l)\,d \equiv 0 \pmod N \iff a_k \equiv a_l \pmod N\,.$$

Folglich bilden je N aufeinanderfolgende Zahlen aus der Folge $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ein voll ständiges Restsystem mod N. Jedes von ihnen enthält $\varphi(N)$ zu N teilerfremde Zahlen, so dass die Folge also $P\,\varphi(N)$ zu N teilerfremde Zahlen enthält. Wir weisen nun nach, dass das gerade diejenigen Zahlen der Folge sind, die auch zu n teilerfremd sind.

1. $(a_k, n) = 1 \Rightarrow (a_k, N) = 1$. 2. Sei $(a_k, N) = 1$. Gäbe es dann eine Primzahl p mit $p \mid (a_k, n)$, so wäre $p \mid (a_k, P\,N) \Rightarrow p \mid (a_k, P) \Rightarrow p \mid d$, also $p \mid a$, was wegen $(a, d) = 1$ unmöglich ist. Somit ist $(a_k, n) = 1$, und der Beweis ist erbracht.

E. TEUFFEL, Korntal/Stuttgart

Das Resultat kann auch in der Form $\varphi(n\,d)/\varphi(d)$ geschrieben werden.

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), L. CARLITZ (Duke Univ., USA), H. HARBORTH (Braunschweig), J. SPILKER (Freiburg/Br.).

Aufgabe 518. Prove that the expression

$$\frac{2\,(2\,x)\,!}{x\,!\,(x + 3)\,!}$$

is an integer if $x = 6\,k + 2$ (k a positive integer) and $k \not\equiv 0 \pmod 5$.

C. KARANICOLOFF, Sofia

$$\frac{2\,(2\,x)\,!}{x\,!\,(x+3)\,!} = 2\prod_{r=1}^{s} p_r^{i_r} \quad \text{mit} \quad i_r = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\left[\frac{2\,x}{p_r^j}\right] - \left[\frac{x}{p_r^j}\right] - \left[\frac{x+3}{p_r^j}\right]\right) = \sum_{j=1}^{\infty} n_j$$

ist sicher ganz, wenn alle $n_j \geqslant 0$. Mit

$$d_1 = \frac{2\,x}{p^j} - \left[\frac{2\,x}{p^j}\right],\quad d_2 = \frac{x}{p^j} - \left[\frac{x}{p^j}\right],\quad d_3 = \frac{x+3}{p^j} - \left[\frac{x+3}{p^j}\right]$$

wird

$$n_j = d_2 + d_3 - d_1 - 3/p^j\,,\quad 0 \leqslant d_m \leqslant 1 - 1/p^j\,,\quad m = 1, 2, 3\,.$$

Für $p^j \geqslant 7$ ist entweder $d_2 \leqslant 3/p^j$ und $d_3 \geqslant 3/p^j$ oder $d_2 \geqslant 3/p^j$ und $d_3 \geqslant 0$; in beiden Fällen gilt $n_j > -1$ und, da n_j ganz sein muss, also $n_j \geqslant 0$. Betrachtet man noch für $p^j = 2, 3, 4, 5$ die Restklassen mod p^j, die für $x = 6\,k + 2$, $k \not\equiv 0 \pmod 5$, möglich sind (und beachtet dabei den Faktor 2), so folgt auch hier $n_j \geqslant 0$ und damit die Behauptung.

H. HARBORTH, Braunschweig

J. SPILKER (Freiburg/Br.) beweist die Ganzzahligkeit des Ausdrucks der Aufgabe für $x \equiv 2 \pmod 3$, $x \not\equiv 2 \pmod 5$, $x + 3 \neq 2^e$.

Weitere Lösungen sandten P. HOHLER (Olten), W. JÄNICHEN (Berlin).

Aufgabe 519. Man beweise: Ist E eine projektive Ebene (wir verlangen nur, dass durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade geht, zwei verschiedene Geraden stets einen Schnittpunkt haben und dass es vier Punkte in allgemeiner Lage gibt), sind P, Q zwei verschiedene Punkte und g, h zwei verschiedene Geraden von E mit $P \in h$, $P \notin g$ und $Q \in g$, $Q \notin h$, ist schliesslich β eine involutorische Streckung mit dem Zentrum P und der Achse g und γ eine involutorische Streckung mit dem Zentrum Q und der Achse h, so ist β die einzige involutorische Streckung mit dem Zentrum P und der Achse g.

H. LÜNEBURG, Mainz

Lösung; Sei O der Schnittpunkt $g \cap h$ der Geraden g, h und R ein nicht auf g, h oder $P\,Q$ liegender Punkt sowie R^β, R^γ seine Bildpunkte bei β, γ. Dann ist

$$R^{\beta\gamma} = R^\gamma\,P \cap R^\beta\,Q = R^{\gamma\beta} \neq R\,,$$