that LJ_j is the isodynamic join of $\Delta\, A_{j_1}A_{j_2}A_{j_3}$ or, somewhat more sophisticated, that LJ_j is parallel to this isodynamic join. To establish this fact we observe that J_j is the orthocenter of $\Delta\, J_kJ_lJ_m$, $jklm$ being a permutation of the indices 0, 1, 2, 3, whereas $\Delta\, A_1A_2A_3$ is the pedal triangle of J_j with respect to $\Delta\, J_kJ_lJ_m$. Moreover the triangles $J_kJ_lJ_m$ and $A_{j_1}A_{j_2}A_{j_3}$ are homothetic. Their isodynamic joins are therefore parallel. Denoting by O_j the circumcenter of $\Delta\, J_kJ_lJ_m$ we see by the above theorem that O_jH is the isodynamic join of $\Delta\, J_kJ_lJ_m$. As O_j is the reflection of J_j with respect to O, we have $LJ_j \parallel O_jH$, which proves the assertion.

G. R. VELDKAMP, Technological University Eindhoven, Netherlands

REFERENCES

[1] COXETER, H. S. M., *Introduction to Geometry*, p. 13–16. New York–London 1961.
[2] Amer. Math. Monthly, vol. *71*, 176 (1964).
[3] Mathesis, p. 88, 1890.

Aufgaben

Aufgabe 493. Es seien $f(t)$, $g(t)$ zwei stetige periodische Funktionen mit der Periode $2\,\pi$, deren erste Fourier-Koeffizienten verschwinden:

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,dt = \int_0^{2\pi} g(t)\cos t\,dt = \int_0^{2\pi} g(t)\sin t\,dt = 0\,.$$

Ausserdem sei $g(t) > 0$. Dann hat $f(t)/g(t)$ wenigstens vier Extrema in $0 \leqq t < 2\,\pi$.

Dieser Satz enthält alle bekannten Sätze aus der Verwandtschaft des Vierscheitelsatzes. Man beweise ihn und finde neue Anwendungen.

H. GUGGENHEIMER, Minneapolis (USA)

Lösung des Aufgabenstellers: 1. Eine stetige Funktion ist dann und nur dann der Krümmungsradius eines C^2-Ovals als Funktion des Stützwinkels t (Winkel zwischen x-Achse und orientierter Tangente), wenn sie die Bedingungen für $g(t)$ erfüllt. In diesem Fall ist nämlich, wenn s die Bogenlänge und $\boldsymbol{x}(s)$ die Vektorgleichung bedeutet,

$$\boldsymbol{x}(2\,\pi) - \boldsymbol{x}(0) = \oint d\boldsymbol{x} = \oint \boldsymbol{x}'\,ds \equiv \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} g(t)\,dt = 0\,.$$

Die Kurve $\boldsymbol{x}(s)$ ist lokal konvex, sternförmig und geschlossen, also einfach geschlossen und (z.B. nach Satz 1, p. 115 in STRUBECKER, *Differentialgeometrie I*, 3. Aufl. Sammlung Göschen 1113/1113a) konvex.

2. Der behauptete Satz folgt nun nach dem HERGLOTZschen (indirekten) Beweis des Vierscheitelsatzes (l.c. p. 119). Wir nehmen an, dass $d(f/g)$ nur zwei Nullstellen besitze, die den Punkten A, B auf $\boldsymbol{x}(s)$ entsprechen. $h(x, y) \equiv a\,x + b\,y + c = 0$ sei die Verbindungsgerade von A und B. $h(x, y)\; d(f/g)$ hat dann in allen von A und B verschiedenen Punkten dasselbe Vorzeichen. Andererseits ist

$$\int_0^{2\pi} d(f/g) = 0 \text{ und} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{x}\; d(f/g) = -\int_0^{2\pi} f\,g^{-1}\,\boldsymbol{x}'\,ds = -\int_0^{2\pi} f(t)\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} dt = 0\,.$$

Man erhält also den Widerspruch

$$\int_0^{2\pi} (a\,x + b\,y + c)\; d(f/g) = 0\,.$$

Anwendungen: 1. Es sei $R(\vartheta)$ der Krümmungsradius eines Ovals als Funktion des Stützwinkels, φ ein fester Winkel. $R(\vartheta + \varphi)/R(\vartheta)$ hat wenigstens 4 Extrema. 2. Es sei $r(\vartheta)$ der Radiusvektor eines anderen Ovals, gemessen vom Schwerpunkt aus, als Funktion des *Polar*winkels. $R(\vartheta) r(\vartheta)^{-3}$ hat wenigstens 4 Extrema. 3. Es sei r^* der Radiusvektor eines anderen Ovals, gemessen vom Schwerpunkt aus, als Funktion des Polarwinkels. r/r^* hat wenigstens 4 Extrema. Insbesondere gilt dies für $r(\vartheta)/r(\vartheta+\varphi)$. 4. Es sei $p(\vartheta)$ die Stützfunktion eines Ovals als Funktion des Stützwinkels, gemessen vom Krümmungsschwerpunkt aus. Beispiele von 4-Extrem-Funktionen sind $p(\vartheta)/p(\vartheta+\varphi)$, $p(\vartheta)/r^3(\vartheta+\varphi)$, $p(\vartheta)/R(\vartheta+\varphi)$, $p(\vartheta)/p^*(\vartheta)$, wobei sich die verschiedenen Funktionen auf verschiedene Ovale beziehen können. 5. Es sei O ein beliebiger Punkt im Innern des Ovals, h die Stützfunktion gemessen von O aus. Dann ist O auch der Schwerpunkt einer Massenverteilung auf der Eilinie, die in jedem Punkt die Dichte $(R\,h^2)^{-1}$ hat. Auf Polarkoordinaten umgerechnet bedeutet dies, dass die Funktion $r^3 R^{-1} h^{-3}$ wenigstens 4 Extrema hat. Für eine mehr geometrische Deutung bemerkt man, dass $r\,h^{-1}$ gleich dem cosecans des Winkels zwischen Radiusvektor und Tangente ist. Ausserdem ist $(R\,h^3)^{-1}$ die unimodular centro-affine Krümmung zum Zentrum O. Die Krümmung hat im allg. keinen Vierscheitelsatz (z.B. exzentrische Ellipse). Aus der Aufgabe folgt aber: *Die unimodular centro-affine Krümmung eines Ovals relativ zum Schwerpunkt genügt einem Vierscheitelsatz.*

Aufgabe 494. Gegeben sei ein C^2-Oval und ein innerer Punkt O. Man berechne die Änderung der Stützfunktion (gemessen von O aus) relativ zu sich entsprechenden Punkten in einer Affinität, für die O Fixpunkt ist. H. GUGGENHEIMER, Minneapolis (USA)

1. Lösung: Das Oval ist (bis auf Bewegungen) durch die Stützfunktion $h(\varphi)$ mit der Periode 2π gegeben. Die Koordinaten des Berührungspunktes der Stützgeraden sind bekanntlich

$$x_1 = h(\varphi)\cos\varphi - h'(\varphi)\sin\varphi, \quad x_2 = h(\varphi)\sin\varphi + h'(\varphi)\cos\varphi. \tag{1}$$

Die Affinität mit dem Fixpunkt $O = (0, 0)$ werde durch

$$X_i = a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2, \qquad (i = 1, 2) \tag{2}$$

vermittelt. Die Determinante $\Delta = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12} \neq 0$ ist gleich dem Affinitätsverhältnis. Durch Einsetzen von (1) in (2) erhält man die Parameterdarstellung des Bildovals. Die Tangente im Punkt (X_1, X_2) hat die Gleichung $(\xi_1 - X_1)\,X_2' - (\xi_2 - X_2)\,X_1' = 0$, wobei der Strich Ableitung nach φ bedeutet. Die Stützfunktion $H(\varphi)$ im Bildpunkt ergibt sich aus der Hesseschen Normalform der Tangente zu

$$H(\varphi) = \frac{X_1' X_2 - X_1 X_2'}{(X_1'^2 + X_2'^2)^{1/2}} = \frac{1}{(X_1'^2 + X_2'^2)^{1/2}} \left| \begin{pmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \right| .$$

Bezeichnet man mit $\boldsymbol{e} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$ den auf der Stützgeraden liegenden Einheitsvektor und mit $\|\,\boldsymbol{e}^*\,\|$ die Länge seines Bildes $\boldsymbol{e}^*$, so ergibt sich nach leichter Rechnung (und Kürzen mit $h + h''$)

$$H(\varphi) : h(\varphi) = \Delta : \|\,\boldsymbol{e}^*\,\| .$$

K. ZACHARIAS, Berlin

2. Lösung (des Aufgabenstellers): Es seien P, P^* ein Paar affiner Punkte mit den Tangenten t, t^* und ϱ, ϱ^* die zugehörigen Krümmungsradien. n sei das Affinitätsverhältnis und λ das Verhältnis zweier entsprechender Strecken auf t und t^*. Dann gilt die Beziehung[1])

$$\varrho^* : \varrho = \lambda^3 : n . \tag{1}$$

Die (zentrale) Affinität ist das Produkt einer unimodularen Affinität und einer Homothetie mit dem Streckungsverhältnis $\sqrt{n}$. $\varrho\,h^3(\varphi)$ ist invariant bei der unimodularen Affinität, und geht bei der Homothetie in $n^2\,\varrho\,h^3(\varphi) = \varrho^*\,H^3(\varphi)$ über. Mittels (1) folgt sofort

$$H(\varphi) : h(\varphi) = n : \lambda .$$

1) Vgl. E. TROST: Über das Verhalten des Krümmungsradius bei Affinität, El. Math. 3, 81–82 (1948).