IV. Beispiel

Nach [6] ist im Ring G_2 der ganzzahligen quadratischen Matrizen der Ordnung 2

$$\alpha^* = \begin{pmatrix} 0 & 2rt \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^* = \begin{pmatrix} 0 & r^2 - t^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^* = \begin{pmatrix} 0 & r^2 + t^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit ganzzahligem r und t ein nichttriviales Lösungstripel für den Exponenten $n = 4$. Nach den obigen Überlegungen ist dann

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2rt \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & r^2 - t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & r^2 + t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ein nichttriviales Lösungstripel von (1) für $n = 2^3 = 8$ im Ring G_4 der ganzzahligen quadratischen Matrizen der Ordnung 4. Das kann man übrigens auch direkt durch Nachrechnung verifizieren.

R. Z. DOMIATY, Graz

LITERATUR

[1] A. AIGNER, *Über die Möglichkeit von $x^4 + y^4 = z^4$ in quadratischen Körpern.* Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. *43*, Heft 9/12, S. 226–229 (1934).
[2] A. AIGNER, *Weitere Ergebnisse über $x^3 + y^3 = z^3$ in quadratischen Körpern.* Monatsh. f. Math. *56*, 3. Heft, S. 240–252 (1952).
[3] A. AIGNER, *Ein zweiter Fall der Unmöglichkeit von $x^3 + y^3 = z^3$ in quadratischen Körpern mit durch 3 teilbarer Klassenzahl.* Monatsh. f. Math. *56*, 4. Heft, S. 335–338 (1952).
[4] A. AIGNER, *Die kubische Fermatgleichung in quadratischen Körpern.* J. f. reine u. angew. Math. *195*, Heft 1/2, S. 3–17 (1956).
[5] A. AIGNER, *Die Unmöglichkeit von $x^6 + y^6 = z^6$ und $x^9 + y^9 = z^9$ in quadratischen Körpern.* Monatsh. f. Math. *61*, Heft 2, S. 147–150 (1957).
[6] R. Z. DOMIATY, *Solutions of $x^4 + y^4 = z^4$ in 2×2 Integral Matrices* (Erscheint im American Mathematical Monthly).

Über Kegelschnitte mit gemeinsamem Krümmungselement

F. LAURENTI hat in zwei Untersuchungen [2][1]), [3] gezeigt, dass die Achsen von Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement eine *Steiner-Zykloide* einhüllen. W. KICKINGER [1] hat dem analytischen Beweis von LAURENTI einen synthetischen gegenübergestellt und ausserdem noch nachgewiesen, dass sich die Brennpunkte von Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement auf Kreisen bewegen. In der vorliegenden Untersuchung sollen die gleichen Fragen für allgemeine Kegelschnitte g (*Ellipsen und Hyperbeln*) diskutiert werden.

Es sei K der Krümmungsmittelpunkt eines beliebigen Punktes P des Kegelschnitts g und t die Kurventangente in P. Wir wählen ein kartesisches Bezugskreuz so, dass t mit der x-Achse und P mit O zusammenfallen, wodurch K im Abstand R von O

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 10.

auf die y-Achse zu liegen kommt. Der Krümmungsradius einer Kurve $y = f(x)$ in O ist daher durch

$$R = \frac{1}{y''} \tag{1}$$

bestimmt.

Wir gehen von der Gleichung eines Kegelschnitts g in der Form

$$\lambda^2 \xi^2 + \eta^2 = 2 p \xi \qquad (\lambda^2, p = \text{const}) \tag{2}$$

aus. Dabei treten für $\lambda^2 \neq 1$, $\lambda^2 > 0$ Ellipsen, für $\lambda^2 = 0$ Parabeln, für $\lambda^2 < 0$ Hyperbeln und für $\lambda^2 = 1$ Kreise auf. Durch die Transformation

$$\xi = x \cos\alpha + y \sin\alpha + C_1, \qquad \eta = -x \sin\alpha + y \cos\alpha + C_2 \tag{3}$$

wird (2) in eine allgemeine Kegelschnittgleichung verwandelt. Die Konstanten C_1 und C_2 in der Transformation (3) sind durch die Bedingungen

$$y = 0 \text{ für } x = 0, \quad y' = 0 \text{ für } x = y = 0, \quad y'' = \frac{1}{R} \text{ für } y' = x = y = 0 \tag{4}$$

bestimmt, so dass die Gleichung von g mit (3) und den Bedingungen (4) die Form annimmt

$$\lambda^2 (x \cos\alpha + y \sin\alpha)^2 + (x \sin\alpha - y \cos\alpha)^2 = 2 R y (\lambda^2 \cos^2\alpha + \sin^2\alpha), \tag{5}$$

wobei R der Krümmungsradius ist und α der Winkel zwischen einer Hauptachse von g und der x-Achse. λ^2 entspricht dem Achsenverhältnis.

Der Mittelpunkt von g hat die Koordinaten

$$x = \frac{R}{\lambda^2} (1 - \lambda^2) \frac{\sin 2\alpha}{2} (\lambda^2 \cos^2\alpha + \sin^2\alpha), \quad y = \frac{R}{\lambda^2} (\lambda^2 \cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2, \tag{6}$$

so dass sich folgende Gleichungen der Kegelschnittachsen ergeben

$$a_1: \quad y \cos\alpha - x \sin\alpha = R \cos\alpha (\lambda^2 \cos^2\alpha + \sin^2\alpha), \tag{7a}$$

$$a_2: \quad y \lambda^2 \sin\alpha + x \lambda^2 \cos\alpha = R \sin\alpha (\lambda^2 \cos^2\alpha + \sin^2\alpha). \tag{7b}$$

Durch Differentiation der Gleichungen von a_1 und a_2 nach dem Parameter α sowie Elimination von x bzw. y erhalten wir als Gleichungen der Hüllkurven h_1 und h_2 von a_1 und a_2:

$$h_1: \left.\begin{aligned} x &= -R(1-\lambda^2)\left[\frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\sin 4\alpha}{4}\right] \\ y &= \frac{R}{4}(3\lambda^2+1) - R(1-\lambda^2)\left[\frac{\cos 2\alpha}{2} - \frac{\cos 4\alpha}{4}\right], \end{aligned}\right\} \tag{8a}$$

$$h_2: \left.\begin{aligned} x &= -R\left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}\right)\left[\frac{\sin 2\alpha}{2} - \frac{\sin 4\alpha}{4}\right] \\ y &= \frac{R}{4}\left(\frac{\lambda^2+3}{\lambda^2}\right) - R\left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}\right)\left[\frac{\cos 2\alpha}{2} + \frac{\cos 4\alpha}{4}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{8b}$$

Beide Kurven sind wieder *Steiner-Zykloiden*, wobei jeweils eine Spitze im Krümmungszentrum K liegt (s. Abb. 1, 2). Als Erweiterung des Ergebnisses von LAURENTI ergibt sich daher folgender

Satz: Die Hüllkurven der Achsen von Ellipsen und Hyperbeln mit gemeinsamem Krümmungselement und konstantem Achsenverhältnis sind zwei Steiner-Zykloiden. Sie haben die gemeinsame Hauptnormale der Kurvenschar zur Symmetrieachse, eine Spitze jeder Kurve liegt im gemeinsamen Krümmungszentrum.

Von Interesse sind auch die Ortskurven ausgezeichneter Punkte der betrachteten Kegelschnittscharen. Die Bahnkurve der Mittelpunkte der Kegelschnitte folgt aus Gleichung (6). Durch elementare Umformungen lässt sich (6) auf folgende Form bringen:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{R}{\lambda^2}\left[\left(\frac{3}{8}\lambda^4 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{3}{8}\right) + \frac{\lambda^4 - 1}{2}\cos 2\alpha + \frac{(1-\lambda^2)^2}{8}\cos 4\alpha\right] \\ x &= \frac{R}{\lambda^2}\left[-\frac{1-\lambda^4}{4}\sin 2\alpha - \frac{(1-\lambda^2)^2}{8}\sin 4\alpha\right]. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

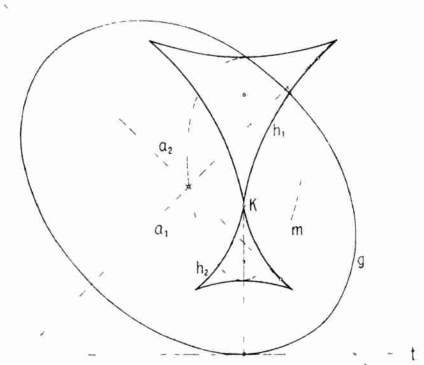

Abbildung 1
Ellipsen mit gemeinsamem Krümmungselement.

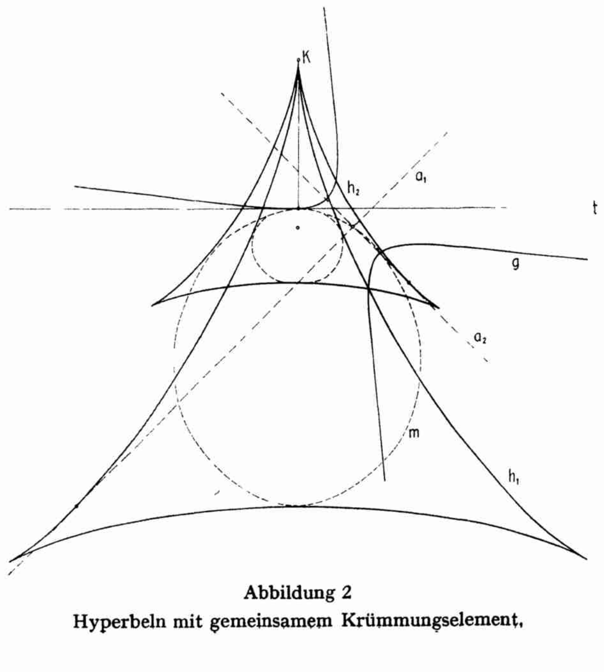

Abbildung 2
Hyperbeln mit gemeinsamem Krümmungselement.