Aufgabe 516. Es sei r der Inkreisradius, $2s$ der Umfang und R der Umkreisradius eines reellen ebenen Dreiecks, also

$$2r \leqq \frac{2s}{3\sqrt{3}} \leqq R.$$

Man zeige, dass zwischen $2r$ und R beliebig viele in s quadratische Terme in folgender Weise eingeschoben werden können:

$$2r \leqq \frac{4s^2R^{-1} - 2tr}{27-t} \leqq \frac{4s^2R^{-1} - 2Tr}{27-T} \leqq R \quad (-\infty < t \leqq T \leqq 11).$$

I. PAASCHE, München

Lösung; Es genügt zu zeigen, dass der Term $f(x) = (4s^2R^{-1} - 2rx)/(27-x)$ in der Variablen x für $x < 27$ monoton zunimmt und für $x \leqq 11$ der Doppelungleichung $2r \leqq f(x) \leqq R$ genügt.

Aus $4s^2 = \Sigma a_i^2 + 2\Sigma a_i a_{i+1} \geqq 3\Sigma a_i a_{i+1} \geqq 54 Rr$ [1] folgt

$$f(x) \geqq \frac{54r - 2rx}{27-x} = 2r \quad \text{und} \quad \frac{df(x)}{dx} = \frac{4s^2R^{-1} - 54r}{(27-x)^2} \geqq 0 \quad \text{für alle} \quad x < 27,$$

womit die Monotonie und die untere Grenze von $f(x)$ nachgewiesen sind.

Aus $4s^2 \leqq 4(3r^2 + 4Rr + 4R^2)$ [2] und $2r \leqq R$ folgt $4s^2 \leqq 16R^2 + 22Rr$ und damit $f(11) \leqq R$, womit auch die obere Grenze von $f(x)$ für $x \leqq 11$ nachgewiesen ist.

O. REUTTER, Ochsenhausen

[1] F. LEUENBERGER, El. Math. *13*, S. 126 (1958).
[2] J. STEINIG, El. Math. *18*, S. 129 (1963).

Weitere Lösungen sandten F. LEUENBERGER (Feldmeilen) und K. ZACHARIAS (Berlin).

Neue Aufgaben

Aufgabe 537. Ein gegebener Kreis K wird von zwei zueinander orthogonalen Kreisen K_1, K_2, die durch einen festen Punkt F seiner Ebene gehen, berührt. Welches ist der geometrische Ort der Ähnlichkeitszentren von K_1 und K_2?

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Aufgabe 538. Trouver toutes les solutions de l'équation

$$x^2 + (x+1)^2 = y^4$$

en nombres naturels x et y.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Aufgabe 539. Show that the quotient

$$\frac{(a^n - 1)(a^n - a)\dots(a^n - a^{n-1})}{n!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

is integral for arbitrary integers a.

L. CARLITZ, Duke University, Durham, N.C., USA

Aufgabe 540. Sei $a_{-1}\, a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 \dots = 1\ 0\ 1\ 1\ 2\ 3\ 5 \dots$ die Fibonaccifolge. Für $n = -1, 0, 1, 2, \dots$ und $k = 0, 1, 2, \dots$ zeige man

$$\sum_{\nu=-1}^{n} \binom{n+k-\nu}{k} a_\nu + \sum_{\nu=0}^{k} \binom{n+1+k-\nu}{1+n} a_{2\nu} = a_{n+2k+2}.$$

I. PAASCHE, München