Abbildung $a^\sigma\{e'\} \to a^\sigma$ mit G^σ kanonisch isomorph. Durch Hintereinanderausführen dieser beiden Abbildungen erhält man $a\,N \to a^\sigma$ als den kanonischen Isomorphismus von G/N auf G^σ.

Setzt man aber den Homomorphiesatz als bekannt voraus, so folgt der allgemeine Satz daraus relativ schnell, indem man LK als den Kern des Homomorphismus $a \to a^\sigma L^\sigma M$ $(a \in G)$ von G auf $G^\sigma M/L^\sigma M$ erkennt.

Korollar 2 (*Erster Isomorphiesatz*, [1], S. 150)

Es seien G eine Gruppe, N ein Normalteiler von G und H eine beliebige Untergruppe von G. Dann besteht ein kanonischer Isomorphismus

$$H/H \cap N \cong HN/N\,.$$

Beweis. In der Bezeichnung des Satzes sei $G := H$, $G' := G$ und es sei $\sigma\colon H \to G$ die natürliche Injektion d.h. $a^\sigma = a$ für jedes $a \in H$. Man setze weiter $M := N$, $L := \{e\}$. Dann ist offenbar $K = \sigma^{-1}(N) = H \cap N$ und $G^\sigma M = HN$, $LK = H \cap N$, $L^\sigma M = N$. Die Behauptung folgt somit aus dem Satz; der kanonische Isomorphismus ist dabei

$$a\,H \cap N \to a\,N, \quad a \in H\,.$$

Korollar 3 (*Zweiter Isomorphiesatz*, [1], S. 151)

Es seien G eine Gruppe und H, N zwei Normalteiler von G mit $H \supset N$. Dann ist H/N ein Normalteiler in G/N und es besteht ein kanonischer Isomorphismus

$$G/H \cong (G/N)/(H/N)\,.$$

Beweis. Dass H/N ein Normalteiler in G/N ist, ist klar. Man setze $G' := G/N$ und wähle als $\sigma\colon G \to G/N$ den natürlichen Homomorphismus $a \to a\,N$ von G auf G/N. Sodann sei $M := H/N$, $L := \{e\}$. Dann ist offenbar $K = \sigma^{-1}(H/N) = H$, $LK = H$, $L^\sigma M = H/N$ und $G^\sigma M = (G/N)\,(H/N) = G/N$; damit folgt die Behauptung aus dem Satz.

M. R. Chowdhury, Göttingen

LITERATURVERZEICHNIS

[1] B. L. van der Waerden, *Algebra*, Teil I, 5. Auflage, Springer-Verlag 1960.

Aufgaben

Aufgabe 513. If

$$N = \frac{x^2 - 6\,x\,y + y^2}{x^2 - 10\,x\,y + y^2}\,,$$

where x, y are integers not both zero, N a positive integer, then N is representable in the forms

$$s^2 + (s+1)^2 \text{ and } 2\,r^2 + (r \pm 1)^2\,.$$

M. N. Khatri, Bhilupur/India, A. Makowski, Warszawa/Poland

Solution: Rewrite the equation

$$N\,(x^2 - 10\,x\,y + y^2) = x^2 - 6\,x\,y + y^2 \qquad (1)$$

in the form

$$(N-1)\,x^2 - 2\,(5\,N - 3)\,x\,y + (N-1)\,y^2 = 0\,.$$

The latter equation has non-trivial solutions x, y provided

$$(5\,N - 3)^2 - (N-1)^2 = m^2\,,$$

where m is an integer. Clearly m is even and we get

$$6N^2 - 7N + 2 = (2N-1)(3N-2) = M^2,$$

where M is an integer. Clearly $2N - 1$ and $3N - 2$ are relatively prime. Hence

$$2N - 1 = (2s+1)^2, \quad 3N - 2 = (3r \pm 1)^2, \tag{2}$$

where r, s are integers. The first equation implies $N = s^2 + (s+1)^2$, the second $N = 2r^2 + (r \pm 1)^2$.

Remark: Conversely, if

$$N = s^2 + (s+1)^2 = 2r^2 + (r \pm 1)^2,$$

where r and s are integers, then (2) follows and $(2N-1)(3N-2) = M^2$, where M is an integer. It follows, that (1) is solvable in integers x, y not both zero.

L. CARLITZ, Duke University, USA

G. BACH (Braunschweig) berechnet die Lösungstripel N_t, x_t, y_t mit $(x_t, y_t) = 1$ durch die Formeln:

$N_t = \{(5 + 2\sqrt{6})^{2t+1} + (5 - 2\sqrt{6})^{2t+1} + 14\}/24$,
$y_t : x_t = \{(10 N_t - 6)\sqrt{6} + (5 + 2\sqrt{6})^{2t+1} - (5 - 2\sqrt{6})^{2t+1}\} : 2(N_t - 1)\sqrt{6}$,
$(y_t, x_t) = 1$, $t = 1, 2, 3, \ldots$.. Beispiel: $N_1 = 41$, $x_1 = 1$, $y_1 = 10$.

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), P. BUNDSCHUH (Freiburg i. Br.), H. GAEBELEIN (Helmstedt), H. HARBORTH (Braunschweig), W. JÄNICHEN (Berlin), I. PAASCHE (Stockdorf, Lkr. Starnberg).

Aufgabe 514. Gegeben sei ein Kreis k und auf k ein Punkt S. Man ermittle jene kubische Parabel p, vom Typus $a^2 y = x^3$, von der S ein Scheitel und k der zugehörige Schmiegkreis ist.

R. BEREIS, Dresden

Lösung und Verallgemeinerung; Sei $a = 1$ und $M = X + iY$ der Mittelpunkt sowie $r = (1 + y'^2)^{3/2}/y''$ der Radius des Krümmungskreises k im Punkt $S = x + iy$ einer Kurve p mit der Gleichung $y = y(x)$. S ist genau für extremes r Scheitel, also für

$$3y'y''^2 = (1 + y'^2)\,y''' \quad \text{und} \quad r_{extr.} = (3y'/y''')^{3/2}\,y''^2.$$

Das zugehörige M hat

$$X = x - y'(1 + y'^2)/y'' = x - 3y'^2 y''/y''' \quad \text{und} \quad Y = y + (1 + y'^2)/y'' = y + 3y'y''/y'''.$$

Im Falle $y; y'; y''; y''' = x^n; n x^{n-1}; n(n-1)x^{n-2}; n(n-1)(n-2)x^{n-3}$ liegt der Scheitel S also auf der Geraden $y = x\sqrt{n-2}/n\sqrt{2n-1}$. Die Tangente in diesem Scheitel $S = x + iy = x + ix^n$ hat die Richtung $y' = ny/x = \sqrt{n-2}/\sqrt{2n-1}$. Der Mittelpunkt M des Scheitelkrümmungskreises k hat

$$X = x - 3n^2y^2/(n-2)x \quad \text{und} \quad Y = y + 3ny/(n-2) = 2y(2n-1)/(n-2).$$

Der Radius von k ist $r = 3\sqrt{3}\,n^2(n-1)^{1/2}y^2/x(n-2)^{3/2}$. Die Gerade SM hat den Abszissenabschnitt $u = x + ny^2/x$ und den Ordinatenabschnitt $v = y + x^2/ny$.

Im Spezialfall $n = 3$, wo p die Kurve $y = x^3$ ist, kann p z.B. im Quadrat mit Ecken $0, 1, 1 + i, i$ gut approximiert werden, weil die 3 Kurvenpunkte $0; S; 1 + i$ die Tangentenrichtungen $y' = 0; 1/\sqrt{5}; 3$ besitzen und im Scheitel S der Krümmungskreis k bekannt ist: Verlängert man $MS = r$ über S hinaus um $r/9$ bis T und über M hinaus um $2r/3$ bis P, so liegt T auf der x-Achse und P auf der y-Achse. Den Ursprung O findet man wegen $TO:OP:PT = 1:\sqrt{5}:\sqrt{6}$ durch eine Ähnlichkeitskonstruktion. Die Quadratecken 1 und $1 + i$ konstruiert man auf Grund von $r = 3\sqrt{2}/5\sqrt[4]{5}$.

I. PAASCHE, München

Eine weitere Lösung sandte H. MEILI (Winterthur).

Aufgabe 515. Es sei $\mathfrak{C}$ ein «einfacher» Kurvenbogen (die Tangente ist in jedem Punkt von $\mathfrak{C}$ eindeutig und variiert kontinuierlich und monoton). Das von einer beweglichen Sehne s abgeschnittene Segment habe die Fläche S und T sei die Fläche des von s und den Tangenten in den Endpunkten von s gebildeten Dreiecks. Man zeige, dass die Parabelbogen die einzigen $\mathfrak{C}$ sind, für die S/T einen konstanten Wert hat. E. W. STEIN, Graz

Lösung: In einem rechtwinkligen x, f-Koordinatensystem habe $\mathfrak{C}$ die Endpunkte $A(0; 1)$ und $B(1; 0)$, und die Tangenten in diesen Punkten seien die Koordinatenachsen mit Schnittpunkt $O(0; 0)$. Diese Annahme bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, weil jeder beliebige einfache Kurvenbogen durch eine geeignete affine Abbildung in einen solchen mit vorgeschriebenen Endpunkten samt Richtungen abgebildet werden kann, und Flächeninhaltsverhältnisse gegenüber dieser Abbildung invariant sind.

$\mathfrak{C}$ wird dann durch eine in $I = (0 < x < 1)$ zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ dargestellt, welche die Randbedingungen $\lim\limits_{x \to 0} f = 1$, $\lim\limits_{x \to 1} f = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f' = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1} f' = 0$ erfüllt, und wegen der monotonen Richtungsänderung der Tangente ist $f'(x)$ in I monoton wachsend und ständig negativ. Die Tangente in einem beliebigen Punkt $P(x; f)$ von $\mathfrak{C}$ $(x \in I)$ schneidet die Tangente AO in $Q(0; f - x f')$ und die Tangente BO in $R(x - f/f'; 0)$. Demnach hat das Dreieck AQP den Inhalt $T = x(1 - f + x f')/2$, und das Segment mit den Endpunkten A und P den Inhalt $S = x(1 + f)/2 - \int\limits_0^x f(t)\, dt$. Auf Grund der Flächeneigenschaft von $\mathfrak{C}$ ist nun $T = (1 + c) S$ mit konstantem $c > 0$ für alle $x \in I$. Daraus folgt durch Differenzieren nach x die Differentialgleichung

$$x^2 f'' - c x f' + c f = c \quad (x \in I) \tag{1}$$

Die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung 2. Ordnung ist

$$f(x) = 1 + a x + b x^c \quad (a, b \text{ konstant}; x \in I),$$

denn die Funktionen x und x^c bilden für $c \neq 1$ ein Hauptsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung, während die konstante Funktion 1 eine triviale Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1) ist. Damit $f(x)$ auch die Randbedingungen erfüllt, muss notwendig $0 < c < 1$ sein, und als Lösung ergibt sich

$$f(x) = \frac{1}{1 - c} [(1 - c) + c x - x^c] \quad (0 < c < 1; x \in I). \tag{2}$$

Aus der Flächeneigenschaft von $\mathfrak{C}$ folgt weiterhin, dass auch die Dreiecke QOR und APB ein konstantes Inhaltsverhältnis besitzen, und zwar ist $F(QOR) = c\, F(APB)$. Wegen $2\, F(QOR) = -(f - x f')^2/f'$ und $2\, F(APB) = 1 - x - f$ muss also $f(x)$ der zusätzlichen Bedingung

$$(f - x f')^2 = c f' (f + x - 1) \quad (x \in I) \tag{3}$$

genügen. Mit Berücksichtigung von (2) muss demnach für alle $x \in I$ die Gleichung

$$(1 - x^c)^2 = \left(\frac{c}{1 - c}\right)^2 (1 - x^{c-1})(x - x^c)$$

bestehen. Dies trifft genau dann zu, wenn $c = 1/2$ ist, und damit ist

$$f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x} = (1 - \sqrt{x})^2 \quad (x \in I)$$

die einzige Lösungsfunktion. Deren Schaubild ist eine Parabel 2. Ordnung (Scheitel $S(1/4; 1/4)$, Achse = 1. Winkelhalbierende). O. REUTTER, Ochsenhausen

Eine weitere Lösung sandte C. BINDSCHEDLER (Küsnacht).