Kleine Mitteilungen

Eine Verallgemeinerung des Homomorphiesatzes[1])

Es soll in dieser Note ein Isomorphiesatz für Gruppen mitgeteilt werden, der eine nützliche Verallgemeinerung des Homomorphiesatzes ([1], S. 39) darstellt aber in den Lehrbüchern der Gruppentheorie anscheinend nicht anzutreffen ist. Wir setzen lediglich die Grundbegriffe der Gruppentheorie voraus, insbesondere den Begriff des Normalteilers und den der Faktorgruppe.

Verallgemeinerter Homomorphiesatz

Es seien $\sigma: G \to G'$ ein Homomorphismus der Gruppen G, G' und M ein Normalteiler von G'; man setze $K := \sigma^{-1}(M)$. Ist L ein Normalteiler von G, so besteht ein kanonischer Isomorphismus

$$G/LK \cong G^\sigma M/L^\sigma M .$$

Zur Bezeichnung ist zu sagen, dass statt $\sigma(a)$ für $a \in G$, a^σ geschrieben wird. Dann ist $\sigma(a^{-1}) = (a^{-1})^\sigma = (a^\sigma)^{-1}$ und G^σ bedeutet natürlich $\sigma(G)$.

Beweis. Zunächst ist K ein Normalteiler in G; dann gilt $LK = KL$ und somit ist LK sogar ein Normalteiler in G. Ebenso ist L^σ ein Normalteiler in G^σ und sodann ist $L^\sigma M$ ein Normalteiler in $G^\sigma M$. Der einfache Nachweis dieser Aussagen sei dem Leser überlassen. Die Faktorgruppen G/LK und $G^\sigma M/L^\sigma M$ sind also definiert.

Die naheliegende Zuordnung

$$a\, LK \to a^\sigma\, L^\sigma M \quad \text{für jedes } a \in G ,$$

ist nun tatsächlich ein kanonischer Isomorphismus von G/LK auf $G^\sigma M/L^\sigma M$.

Zunächst ist zu zeigen, dass diese Zuordnung eindeutig ist d.h. ist $a\, LK = b\, LK$ so muss auch $a^\sigma\, L^\sigma M = b^\sigma\, L^\sigma M$ sein. Das ist aber wegen $K^\sigma \subset M$ offensichtlich der Fall. Die Zuordnung ist also eine wohldefinierte Abbildung von G/LK in $G^\sigma M/L^\sigma M$. Sie ist ein Gruppenhomomorphismus, denn es ist für alle $a, b \in G$

$$a\, b\, LK = (a\, LK)\, (b\, LK) \to (a^\sigma\, L^\sigma M)\, (b^\sigma\, L^\sigma M) = a^\sigma\, b^\sigma\, L^\sigma M = (a\, b)^\sigma\, L^\sigma M .$$

Die Abbildung ist injektiv d.h. ist $a^\sigma\, L^\sigma M = b^\sigma\, L^\sigma M$, so ist auch $a\, LK = b\, LK$. Dies ist wiederum wegen $\sigma^{-1}(M) = K$ natürlich der Fall.

Schliesslich ist der Homomorphismus auch surjektiv, denn eine beliebige Nebenklasse in $G^\sigma M$ nach $L^\sigma M$ hat ja die Form $a'\, L^\sigma M$ mit $a' \in G^\sigma M$ also $a' = a^\sigma\, b'$ wobei $a \in G$, $b' \in M$. Dann ist $a'\, L^\sigma M = a^\sigma\, b'\, L^\sigma M = a^\sigma\, L^\sigma(b'\, M) = a^\sigma\, L^\sigma M$; somit tritt das gegebene Element $a'\, L^\sigma M$ von $G^\sigma M/L^\sigma M$ als das Bild des Elements $a\, LK$ von G/LK bei der obigen Abbildung auf.

Damit ist der Satz bewiesen.

Korollar 1 (*Homomorphiesatz* [1], S. 39)

Es sei $\sigma: G \to G'$ ein Homomorphismus der Gruppen G, G'; es sei N der Kern des Homomorphismus σ d.h. $N := \sigma^{-1}(e')$ wobei e' das Einselement von G' bezeichnet.

Dann besteht ein kanonischer Isomorphismus $G/N \cong G^\sigma$.

Beweis. Setze $M := \{e'\}$ und $L := \{e\}$, wo e das Einselement von G sei; dann ist $K = N$, $LK = N$, $L^\sigma M = \{e'\}$ und $G^\sigma M = G^\sigma$. Der bewiesene Satz liefert den kanonischen Isomorphismus $a\, N \to a^\sigma\{e'\}$ von G/N auf $G^\sigma/\{e'\}$. Es ist aber $G^\sigma/\{e'\}$ vermöge der trivialen

[1]) Eine kürzere Darstellung dieses Satzes, ohne die Korollare, ist im Nieuw Archief voor Wiskunde (3) *14*, 102 (1966) erschienen.