ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. | Band XXI | Heft 6 | Seiten 121–144 | 10. November 1966

Zur Axiomatik der ebenen euklidischen Geometrie

Einleitung

Die wissenschaftlichen Probleme der Begründung der ebenen absoluten Geometrie sind heute im wesentlichen gelöst, vor allem durch die zusammenfassende Darstellung der Spiegelungsgeometrie von F. BACHMANN [2] und anschliessende Verallgemeinerungen verschiedener Autoren (vergleiche LINGENBERG [7] und die dort zitierte Literatur).

In didaktischer Hinsicht bleibt jedoch noch viel zu tun. Erstens erscheint der bei BACHMANN vorliegende strenge und lückenlose Aufbau der absoluten Geometrie immer noch reichlich mühsam, und es wäre meines Erachtens sehr erwünscht, ihn noch zu vereinfachen – *wenn* das möglich ist. Zweitens benötigen Schule und Hochschule dringend einen möglichst einfachen Aufbau der euklidischen Geometrie, das heisst der durch das Parallelenaxiom eingeschränkten absoluten Geometrie. Vielleicht kann man dann endlich dahin kommen, dass die Anfängervorlesungen in analytischer Geometrie von geometrischen statt von algebraischen Axiomen ausgehen können[1]), und dass man auch auf der Schule dem Ideal eines strengen Aufbaus der Geometrie näherkommen kann, ohne irgendetwas an Anschaulichkeit aufzugeben. Einen sehr beachtenswerten und durchsichtigen Aufbau der euklidischen Geometrie hat kürzlich J. DILLER [3] gegeben. Hier soll ein weiterer Ansatz vorgeschlagen werden, der von wenigen rein bewegungsgeometrischen Axiomen ausgeht; im Anschluss an ein vor einigen Jahren vorgeschlagenes Axiomsystem der absoluten Geometrie [6].

§1. Grundbegriffe und Axiome

Die *Ebene* ist eine Menge von *Punkten.* Ferner sind gewisse Permutationen der Ebene gegeben, die *Bewegungen* heissen. Sie bilden eine Gruppe.

Eine *Spiegelung* ist eine nichtidentische Bewegung mit mindestens zwei Fixpunkten. Eine *Drehung* ist entweder die identische Bewegung oder eine Bewegung mit genau einem Fixpunkt. Eine *Punktspiegelung* ist eine involutorische Drehung.

Wir fordern die Gültigkeit der folgenden Axiome, die man sich leicht mit Hilfe eines bewegten beziehungsweise umgewendeten Transparentpapiers und einer darauf gezeichneten Geraden veranschaulichen kann.

---

[1]) Für die affine Geometrie ist das durch den Aufbau von ARTIN [1] (Chapter II) geleistet, der allerdings für Anfangssemester meist noch als reichlich abstrakt angesehen wird.

Axiom Ia. *Das Produkt zweier Spiegelungen ist keine Spiegelung.*

Axiom Ib. *Das Produkt zweier Drehungen ist keine Spiegelung.*

Axiom IIa. *Zu je zwei Punkten A, B als Fixpunkten gibt es eine Spiegelung.*

Axiom IIb. *Es gibt eine Spiegelung mit mindestens drei Fixpunkten.*

Axiom III. *Hat die Spiegelung γ weder mit der Spiegelung α noch mit der Spiegelung $\beta \neq \alpha$ einen gemeinsamen Fixpunkt, so haben α und β keinen gemeinsamen Fixpunkt.*

Wenn man wie in [6] unter einer Geraden die Fixpunktmenge einer Spiegelung versteht, so sagt Axiom III aus, dass die Parallelität transitiv ist. Das ist im wesentlichen das Parallelenaxiom.

§2. Folgerungen aus den Axiomen Ia und IIa

Aus den Axiomen Ia und IIa ergeben sich durch elementare Schlüsse einige einfache Folgerungen[2]). Eine Spiegelung mit zwei Fixpunkten A, B ist eindeutig bestimmt und daher involutorisch. Sie sei mit σ_{AB} bezeichnet. Ist α eine Bewegung und $A^\alpha = A'$, $B^\alpha = B'$, so ist

$$\alpha^{-1} \sigma_{AB} \alpha = \sigma_{A'B'} .$$

Durch zwei Punkte A, B geht genau eine Gerade $g(AB)$. Jede Bewegung ist eine Kollineation, das heisst sie bildet Geraden auf Geraden ab. Sind C, D zwei Punkte der Geraden g durch A und B, so ist $\sigma_{CD} = \sigma_{AB}$; man kann diese Spiegelung daher einfach mit σ_g bezeichnen.

Zwei Geraden g, h heissen *senkrecht* (oder orthogonal), wenn $\sigma_g \sigma_h$ involutorisch ist, das heisst wenn σ_g und σ_h verschieden und miteinander vertauschbar sind. Aus jedem nicht auf einer Geraden g liegender Punkt P lässt sich eindeutig ein Lot fällen. Bewegungen sind sogenannte *orthogonale Kollineationen*, das heisst sie bilden senkrechte Geraden auf senkrechte Geraden ab.

Zwei verschiedene Punkte A, B haben höchstens ein Mittellot, das heisst eine Gerade a, so dass $A^{\sigma_a} = B$ ist. Wäre nämlich b ein zweites Mittellot, so wären σ_a und σ_b zwei Bewegungen, die A, B vertauschen und daher $\sigma_a \sigma_b = \sigma_{AB}$, im Widerspruch zu Axiom Ia.

Zwei verschiedene Punkte A, B haben auch höchstens einen Mittelpunkt, das heisst einen Punkt P, so dass eine Punktspiegelung mit dem Fixpunkt P existiert, die A mit B vertauscht. Wäre nämlich P' ein zweiter Mittelpunkt, und wären π, π' Punktspiegelungen mit den Fixpunkten P beziehungsweise P', so wäre $\pi \pi' = \sigma_{AB}$ involutorisch, also $\pi \pi' \pi = \pi'$. Nun hat $\pi \pi' \pi$ den einzigen Fixpunkt P'^π und π' den einzigen Fixpunkt P'. Also ist $P'^\pi = P'$. Das ist nur möglich, wenn doch $P' = P$ ist. Ferner ist $\pi \sigma_{AB} \pi = \sigma_{AB}$, also $\sigma_{AB} \pi \sigma_{AB} = \pi$. Die linke Seite dieser Gleichung hat den Fixpunkt $P^{\sigma_{AB}}$, die rechte den Fixpunkt P. Also ist $P \in g(AB)$. Daraus folgt: Eine Punktspiegelung hat jede Gerade durch ihren Fixpunkt als Fixgerade.

Über die Existenz von Mittelloten, Punktspiegelungen und Mittelpunkten lässt sich auf Grund der bisherigen Axiome noch nichts aussagen.

Hilfssatz 2.1. Hat das Spiegelungsprodukt $\sigma_a \sigma_b \neq 1$ einen Fixpunkt F, so ist dieser der Schnittpunkt der Geraden a und b.

---

[2]) Vergleiche [6].

Beweis. Es ist $F^{\sigma_a} = F^{\sigma_b}$. Wäre dieser Punkt von F verschieden, so hätten F^{σ_a} und F die verschiedenen Mittellote a und b, was oben widerlegt wurde. Also folgt $F^{\sigma_a} = F^{\sigma_b} = F$, nach der Definition der Geraden also die Behauptung.

Wir schreiben nun, wie es in der Spiegelungsgeometrie üblich ist, statt σ_g einfach g. Dann gilt

Hilfssatz 2.2. Ist das Produkt dreier Spiegelungen a, b, c eine Spiegelung, so sind die Spiegelungsgeraden a, b, c entweder paarweise parallel oder sie haben einen Punkt gemein.

Beweis. Es seien die Geraden a, b, c nicht paarweise parallel, etwa $F = a \cap b$. Das Spiegelungsprodukt $a\,b\,c$ ist nach Voraussetzung eine Spiegelung d, also $a\,b = d\,c$. Daher hat $d\,c$ den Fixpunkt F. Nach Hilfssatz 2.1 ist $d \cap c = F$. Hilfssatz 2.2 ist eine Umkehrung des Dreispiegelungssatzes, für den ein Beweis auf Grund der bisherigen Axiome kaum möglich sein dürfte.

Hilfssatz 2.3. Es sei a eine Gerade und P ein Punkt, ferner π eine Punktspiegelung mit dem Fixpunkt P. Dann liegt jeder Fixpunkt $F \neq P$ von $a\,\pi = \pi\,a$ auf einem in P errichteten Lot auf a.

Beweis. Dass $a\,\pi = \pi\,a$ ist, folgt aus der Identität $\pi\,a\,\pi = a$. Ist $F \neq P$ Fixpunkt, so ist $F \notin a$. Es sei a' das aus F auf a gefällte Lot. Wegen $F^a = F^\pi$ muss $P \in g(F\,F^a)$, also $a' = g(F\,P)$ sein, was zu beweisen war.

§3. Hinzunahme des Axioms Ib

Hilfssatz 3.1. Jede Drehung ist Produkt zweier Spiegelungen.

Beweis. Es sei δ eine Drehung mit dem Fixpunkt F, und G ein weiterer Punkt. Das Produkt $\delta\,\sigma_{FG}$ ist nach Axiom Ib keine Drehung, also eine Spiegelung, was zu beweisen war.

Bemerkung. Das Axiom Ib ist nicht aus den übrigen Axiomen beweisbar; denn in der gewöhnlichen euklidischen Geometrie mit den Ähnlichkeitsabbildungen als «Bewegungen» gelten alle unsere Axiome ausser Ib.

Satz 3.1 (*erster Dreispiegelungssatz*). *Sind a, b, c drei Geraden mit dem gemeinsamen Punkt F, so ist das Spiegelungsprodukt $a\,b\,c$ eine Spiegelung.*

Beweis. $a\,b$ ist nach Axiom Ia keine Spiegelung, also eine Drehung δ, und $\delta\,c$ ist nach Axiom Ib keine Drehung, also eine Spiegelung, was zu beweisen war.

Wir werden im folgenden das Axiom Ib nicht mehr direkt verwenden, nur noch den mit seiner Hilfe abgeleiteten ersten Dreispiegelungssatz. Man könnte also diesen, wie es in der Spiegelungsgeometrie üblich ist, an Stelle von Axiom Ib unter die Axiome aufnehmen. In [6] ist der erste Dreispiegelungssatz eine Teilaussage des Axioms I.

§4. Hinzunahme des Parallelenaxioms

Wir benützen zunächst nur die Axiome Ia, IIa und III.

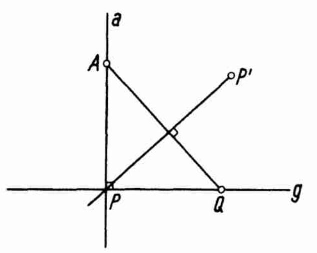
Hilfssatz 4.1. In einem Punkt P einer Geraden g lässt sich höchstens ein Lot auf g errichten.

Beweis. Es seien a und b zwei verschiedene in P errichtete Lote. Ferner sei h ein weiteres Lot auf g, das nicht durch P geht. Dann sind a und b zu h parallel, aber nicht untereinander, entgegen Axiom III.

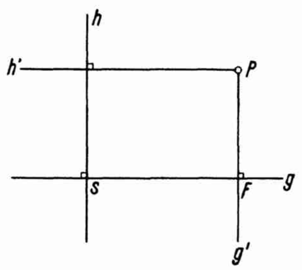
Es wäre noch der Fall denkbar, dass jedes Lot h auf g durch P geht (Fig. 1). Es sei $Q \neq P$ ein weiterer Punkt von g und $A \neq P$ ein weiterer Punkt von a. Die Spiegelung σ_{AQ} bringe P nach P'. Die Gerade $g(A\ Q)$ steht nicht senkrecht auf g, weil das aus A gefällte Lot eindeutig ist. Daher ist $g(P\ P') \neq g$. Das aus P' auf g gefällte Lot ist nach unserer Annahme $g(P'\ P)$. Damit hätten wir zwei aus Q auf $g(P\ P')$ gefällte Lote, nämlich g und $g(Q\ A)$. Dieser Widerspruch vervollständigt unseren Beweis.

Hilfssatz 4.2. Es seien g, h senkrechte Geraden, und P sei ein weder auf g noch auf h liegender Punkt. Die aus P auf g beziehungsweise h gefällten Lote seien g' beziehungsweise h'. Dann schneiden sich g, g' und ebenso h, h', sowie g, h. Die Geraden g' und h' stehen aufeinander senkrecht.

Beweis (Fig. 2). Die verschiedenen Geraden g und h' (ebenso h und g') können wegen der Eindeutigkeit des Lotes (auf h) keinen Schnittpunkt haben. Nach Axiom III müssen sich daher g und g' (ebenso h und h') schneiden, etwa im Punkt F. Nochmalige Anwendung des Parallelenaxioms III liefert die Existenz des Schnittpunkts $S = g \cap h$. Wäre das aus F auf h' gefällte Lot l von g' verschieden, so wären l und g' zu h parallel, aber nicht untereinander. Daher muss $g' \perp h'$ sein.



Figur 1



Figur 2

Bemerkung: Aus Hilfssatz 4.2 folgt noch nicht, dass Rechtecke existieren. Als Gegenbeispiel dient eine Ebene aus genau vier Punkten mit der Gruppe aller ihrer Permutationen als Bewegungsgruppe. Es ist nämlich keineswegs sicher, dass ausserhalb von g und h noch ein Punkt P existiert.

§5. Hinzunahme des Axioms IIb

Nach Axiom IIb gibt es eine Gerade s mit mindestens drei Punkten.

Hilfssatz 5.1. Sind g, h senkrechte Geraden, so gibt es einen Punkt P, der weder auf g noch auf h liegt.

Beweis (Fig. 3). Die Behauptung ist klar, wenn die Gerade s von g und von h verschieden ist. Nun sei $s = g$; und $A \notin h$, B, C seien drei Punkte von g, sowie $D \notin g$ ein Punkt von h. Die Gerade $g(A\ D)$ steht weder auf g noch auf h senkrecht. Die Spiegelung an dieser Geraden bildet B und C auf zwei Punkte B', C' ab, die mit A auf einer von g verschiedenen Geraden liegen. Daher kann höchstens einer von ihnen auf h liegen, was zu beweisen war. Beim Beweis wurden nur die Axiome Ia, IIa, IIb verwendet.

Mit Hilfe des vorigen Paragraphen folgt nun unmittelbar

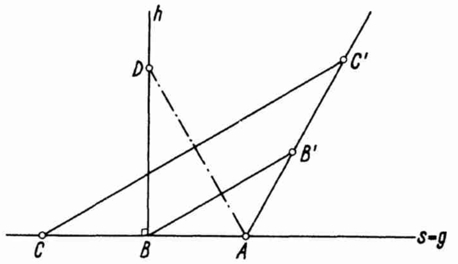
Satz 5.1. *Senkrechte Geraden schneiden sich. Jede Gerade enthält mindestens drei Punkte. Jedes Vierseit mit drei rechten Winkeln ist ein Rechteck.*

Satz 5.2. *Das Produkt zweier Spiegelungen an senkrechten Geraden ist eine Punktspiegelung an ihrem Schnittpunkt.*

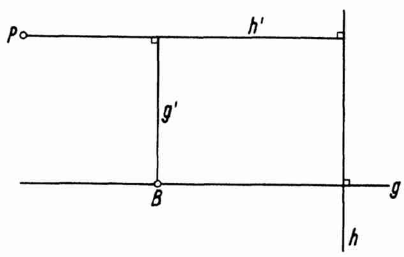
Der Beweis verwendet nur die Axiome Ia und II und die Existenz des Schnittpunkts senkrechter Geraden.

Satz 5.3. *In jedem Punkt B einer Geraden g lässt sich eindeutig ein Lot errichten.*

Beweis (Fig. 4). Es sei h irgendein Lot auf g. Falls es durch B geht, sind wir fertig. Andernfalls sei P ein weder auf g noch auf h liegender Punkt. Das aus P auf h gefällte Lot sei h', und das aus B auf h' gefällte Lot sei g'. Nach Hilfssatz 4.2 ist g' das gesuchte Lot.



Figur 3

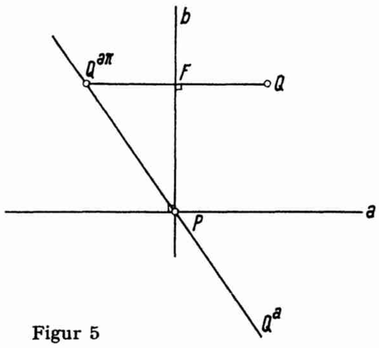


Figur 4

Wir beweisen weiter

Hilfssatz 5.2. Ist a eine Gerade und π eine Punktspiegelung an einem Punkt $P \in a$, so ist $a\,\pi = \pi\, a$ eine Spiegelung.

Das ist klar, wenn Axiom Ib verwendet wird. Ohne dieses Axiom schliessen wir wie folgt (Fig. 5): Es sei b das in P auf a errichtete Lot und Q ein Punkt, der weder auf a noch auf b liegt. Nach Hilfssatz 2.3 ist Q kein Fixpunkt von $a\,\pi$. Es ist $\pi\, a\, \pi = a$, also $a\,\pi = \pi\, a$ involutorisch. Daher ist $g(Q\, Q^{a\,\pi})$ eine Fixgerade von $a\,\pi$. Läge P auf dieser Geraden, so auch auf $g(Q^a\, Q^\pi)$; also wäre $Q^a \in g(P\, Q^\pi) = g(P\, Q)$ und daher $g(P\, Q) \perp a$, entgegen der Voraussetzung $Q \notin b$. Der Fusspunkt F des von P aus auf $g(Q\, Q^{a\,\pi})$ gefällten Lotes b' ist ein zweiter Fixpunkt von $a\,\pi$ (ausser P). Daraus folgt die Behauptung, und weiter $b' = a\,\pi$, $a\, b' = \pi$, $b' \perp a$, $b' = b$, also gilt



Figur 5

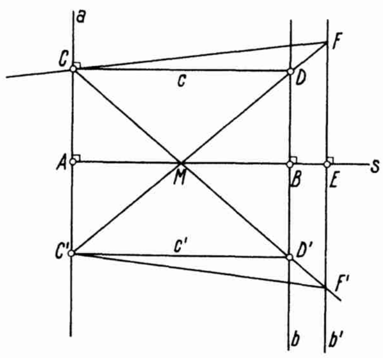
Satz 5.4. *Zu jedem Punkt P als Fixpunkt existiert genau eine Punktspiegelung.*

Wie üblich werde diese Punktspiegelung einfach mit P bezeichnet.

Ist P ein Punkt der Geraden g, so ist $P\,g = g\,P$ die Spiegelung an dem in P auf g errichteten Lot. Sind a, b senkrechte Geraden, so ist $a\,b$ die Spiegelung an ihrem Schnittpunkt.

Satz 5.5. *Jedes Paar verschiedener Punkte A, B hat einen Mittelpunkt.*

Beweis (Fig. 6). Es sei $s = g(A\,B)$, $a = s\,A$, $b = s\,B$. Auf a liegt ein weiterer Punkt C. Es sei $c = a\,C$. Nach Satz 5.1 bilden s, a, c, b ein Rechtseit; es sei $D = b\,c$, $C' = C^s$, $D' = D^s$, $c' = c^s$, also $C' = a\,c'$, $D' = b\,c'$. Die Geraden s und $g(C'\,D)$ haben nach Axiom III einen Schnittpunkt M; er liegt auch auf $g(C\,D') = g(C'\,D)^s$.



Figur 6

Es sei $A^M = E$, $b' = s\,E$, ferner $F = b' \cap g(C'\,D)$ und $F' = b' \cap g(C\,D')$. Es folgt $C'^M = F$, $C^M = F'$, also $g(C\,F)^M = g(C'\,F')$. Daher sind diese beiden Geraden parallel. Weil sie durch Spiegelung an s auseinander hervorgehen, sind sie auch zu s parallel. Das ist nur möglich, wenn $F = D$, also $E = B$ ist, was zu beweisen war.

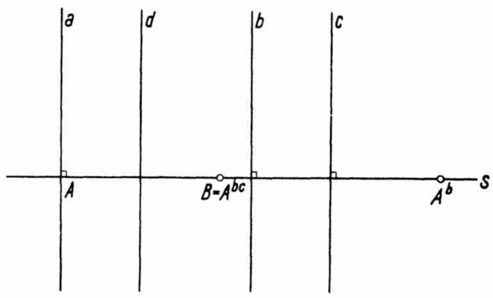
Folgerung. Jedes Paar verschiedener Punkte hat ein Mittellot. Satz 5.5 ist in der nichteuklidischen Geometrie im Sinne von F. BACHMANN bekanntlich nicht immer richtig.

Satz 5.6. *Die Ebene ist eine affine Translationsebene.*

Die Behauptung sagt aus, dass zu je zwei verschiedenen Punkten A, B eine Translation (das heisst eine Kollineation mit genau den uneigentlichen Punkten als Fixpunkten) existiert, die A nach B bringt. Ist nun s die Verbindungsgerade, M der Mittelpunkt, und m das Mittellot von A und B, so ist $s\,A\,m$ die gesuchte Translation. Jedes Lot auf m ist nämlich Fixgerade von $s\,A\,m$, daher ist $s\,A\,m = A\,M$ eine zentrale Kollineation. $A\,M$ bildet jede Gerade auf eine Parallele ab, hat also die uneigentlichen Punkte als Fixpunkte.

Satz 5.7. (zweiter Dreispiegelungssatz). *Sind a, b, c Geraden mit dem gemeinsamen Lot s, so ist $a\,b\,c$ eine Geradenspiegelung an einem Lot d auf s.*

Beweis (Fig. 7). Es sei $A = a\,s$ und $A^{bc} = B$, ferner d das Mittellot von A und B. Dann hat die Bewegung $b\,c\,d$ den Fixpunkt A, also die Fixgerade a. Weil alle Lote auf a nach Satz 5.1 Fixgeraden sind, lässt $b\,c\,d$ die Gerade a punktweise fest. Nach Axiom Ia ist $b\,c\,d \neq 1$, also folgt $b\,c\,d = a$, $a\,b\,c = d$, was zu beweisen war.



Figur 7

Satz 5.8. *Jedes Produkt von vier Spiegelungen ist Produkt von zwei Spiegelungen.*

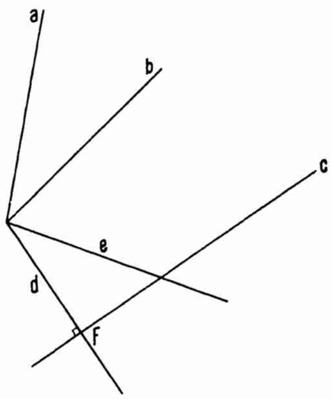
Beweis. Gegeben sei das Spiegelungsprodukt $a\,b\,c\,d$. Die Behauptung ist klar, wenn a, b, c, d nicht alle verschieden sind; ebenso, wenn sie alle parallel sind. Beides sei jetzt ausgeschlossen. Mit $a\,b\,c\,d$ sind auch $b\,c\,d\,a = (a\,b\,c\,d)^a$, $c\,d\,a\,b$, $d\,a\,b\,c$ Produkte von zwei Spiegelungen; wir dürfen daher jetzt annehmen, dass a und b einen Punkt C gemein haben. Falls c und d einen Punkt D gemein haben, sei b' eine Gerade durch C und D; andernfalls sei b' die Parallele zu c und d durch C. Es gibt eine Gerade $a' \ni C$, so dass $a'\,b' = a\,b$ ist, nämlich nach dem ersten Dreispiegelungssatz. Daher ist $a\,b\,c\,d = a'(b'\,c\,d)$. Weil $b'\,c\,d$ eine Spiegelung ist, gilt die Behauptung.

Folgerung. Jedes Spiegelungsprodukt (falls Axiom Ib vorausgesetzt wird, also jede Bewegung) ist entweder Produkt von zwei Spiegelungen oder Produkt von drei Spiegelungen, nicht aber beides.

Die Produkte von zwei Spiegelungen heissen gerade Bewegungen, die Produkte von drei Spiegelungen ungerade Bewegungen.

Satz 5.9. *Jede ungerade Bewegung α ist Produkt einer Punktspiegelung und einer Geradenspiegelung.*

Beweis (Fig. 8). Falls α eine Spiegelung g ist, sei P ein Punkt der Spiegelungsachse g. Dann ist $\alpha = P\,g = g\,P$. Nun sei α keine Spiegelung, also ein Spiegelungsprodukt $a\,b\,c$, wobei entweder a, b oder b, c sich schneiden. Im zweiten Fall kann man $b\,c$ durch ein Produkt $b'\,c'$ ersetzen, so dass auch a, b' sich schneiden. Wir dürfen also



Figur 8

den ersten Fall annehmen. d sei das aus $a \cap b$ auf c gefällte Lot mit dem Fusspunkt F; ferner sei $a\,b = e\,d$. Dann ist $a\,b\,c = e\,d\,c = e\,F = F^e\,e$, was zu beweisen war.

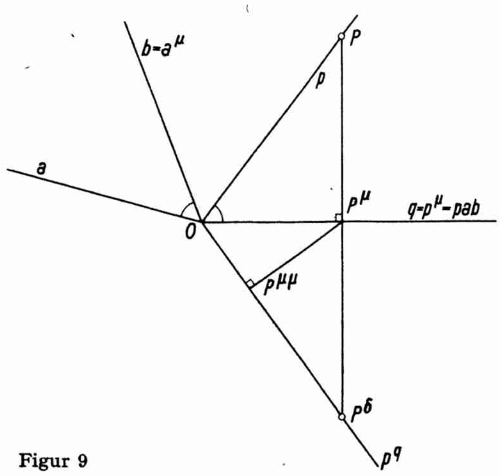
Satz 5.10. (*Hjelmslevscher Mittelpunktesatz*). *Ist α eine Bewegung und g eine Gerade, so liegen die Mittelpunkte aller Paare (P, P^α), wobei P die Gerade g durchläuft, auf einer Geraden s.*

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass α ungerade ist (sonst betrachte man $g\,\alpha$ statt α). Dabei wird entweder Axiom Ib mit vorausgesetzt oder unter Bewegungen werden nur Spiegelungsprodukte verstanden. Es sei $\alpha = b\,A$ (Satz 5.9). Es sei s das aus A auf b gefällte Lot und P ein beliebiger Punkt; ferner p das Lot aus P auf s, und $a = A\,s = s\,A$, $q = p\,b\,a$, $Q = q\,s$. Dann ist $\alpha = b\,a\,s = p\,q\,s = p\,Q$, also $P^\alpha = P^{pQ} = P^Q$, das heisst der Mittelpunkt Q von P und P^α liegt auf s, was zu beweisen war.

§6. Hjelmslevsche Halbdrehungen

Es sei δ eine Drehung um den Punkt O, jedoch keine Punktspiegelung. Die Abbildung μ, die jedem Punkt P den Mittelpunkt von P und P^δ zuordnet, heisst eine *Halbdrehung* (Fig. 9). Das ist die ursprüngliche Hjelmslevsche Definition. Es sei $\delta = a\,b$ und P ein beliebiger Punkt ($\neq O$), ferner $p = g(O\,P)$ und $a\,b = p\,q$. Dann ist P^μ der Fusspunkt des aus P auf q gefällten Lotes. Mit Hilfe des Parallelenaxioms erkennt man sofort: Die Halbdrehungen bilden die Ebene umkehrbar auf sich ab. Aus Satz 5.10 folgt, dass sie Geraden in Geraden abbilden. Mit den soeben eingeführten Bezeichnungen gilt $a^\mu \subseteqq b$, $p^\mu \subseteqq q$, $q^\mu \subseteqq p^q$. Das rechtwinklige Dreieck $O\,P\,P^\mu$ geht in das rechtwinklige Dreieck $O\,P^\mu\,P^{\mu\mu}$ über. Wegen der Geradentreue folgt daraus, dass senkrechte Geraden, von denen eine durch O geht, in senkrechte Geraden abgebildet werden. Nach Satz 5.1 (also unter wesentlicher Verwendung des Parallelenaxioms) folgt, dass beliebige senkrechte Geraden in senkrechte Geraden abgebildet werden, also auch parallele Geraden in parallele Geraden. Ordnet man dem uneigentlichen Punkt U einer Geraden g als Bildpunkt U^μ den uneigentlichen Punkt der Bildgeraden $h \supseteqq g^\mu$ zu, so wird μ zu einer umkehrbaren, geradentreuen Abbildung der projektiven Erweiterungsebene.

Dass eine Halbdrehung jede Gerade sogar *auf* eine Gerade abbildet, folgt (mit Hilfe des Parallelenaxioms) aus dem elementaren



Figur 9

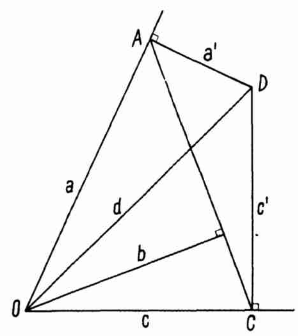
Hilfssatz 6.1. Jede umkehrbare Abbildung μ einer projektiven Ebene *auf* sich, die kollineare Punkte in kollineare Punkte abbildet, bildet jede Gerade *auf* eine Gerade ab und ist umkehrbar geradentreu.

Beweis. Wäre $A\ B\ C$ ein Dreieck, dessen Bildpunkte A^μ, B^μ, C^μ auf einer Geraden g liegen, so sei $P' = P^\mu$ ausserhalb g gewählt. Ferner sei $Q = g(A\ P) \cap g(B\ C)$. Dann wäre $Q^\mu \in g(B\ C)^\mu \subseteqq g$, $P^\mu \in g(A\ Q)^\mu \subseteqq g$, Widerspruch. Die Halbdrehungen sind also Kollineationen.

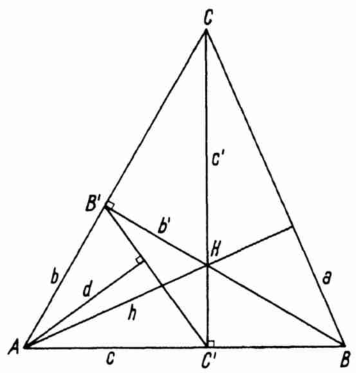
Ist μ eine Halbdrehung mit dem Zentrum O, und sind p, q Geraden durch O, so ist $p^\mu\ q^\mu = p\ q$.

Satz 6.1. (*Hjelmslevscher Lotesatz*). *Es seien a, c verschiedene Geraden durch einen Punkt O; ferner seien a', c' die in weiteren Punkten A beziehungsweise C von a beziehungsweise c errichteten Lote mit dem Schnittpunkt D, b das aus O auf $g(A\ C)$ gefällte Lot und $d = g(O\ D)$. Dann ist $a\ b\ c = d$.*

Beweis (Fig. 10). Es sei $b' = a\ d\ c$, also $a\ b' = d\ c$. Die Halbdrehung μ mit dem Zentrum O, die D nach C bringt, bildet A auf den Fusspunkt B des aus A auf b' gefällten Lotes ab. Wegen der Erhaltung der Orthogonalität muss $D^\mu = C$ auf $g(A\ B)$ liegen. Daher ist $B \in g(A\ C)$, also $b' = b$, was zu beweisen war.



Figur 10



Figur 11

Bemerkungen: Satz 6.1 kann auch direkt durch Rechnen mit Spiegelungen bewiesen werden (vergleiche BACHMANN [2]). Aus dem Lotesatz lässt sich die Halbdrehungstheorie gewinnen, ohne Verwendung von Satz 5.10 (vergleiche [2], [3]). Der Lotesatz, der sich im Rahmen der euklidischen Geometrie schon bei HILBERT [4], Seite 55 findet, kann bekanntlich im Rahmen des Bachmannschen Axiomensystems ohne Verwendung des Parallelenaxioms bewiesen werden.

Satz 6.2. (*Höhensatz*). *Die Höhen jedes Dreiecks $A\ B\ C$ schneiden sich in einem Punkt.*

Beweis (Fig. 11). Der triviale Fall eines rechtwinkligen Dreiecks sei ausgeschlossen. Die Dreiecksseiten seien wie üblich mit $a = g(B\ C)$, b, c bezeichnet. Die Höhen seien a', b', c'; das heisst die Spiegelungsprodukte $A' = a\ a'$, $B' = b\ b'$, $C' = c\ c'$, $A\ a'$, $B\ b'$, $C\ c'$ seien involutorisch. H sei der Schnittpunkt von b' und c', ferner sei $h = g(A\ H)$. Die Halbdrehung μ mit Zentrum A, die B nach B' bringt, bringt C^c nach C'. Also ist

$$B^{c\mu} = B', \quad C^{c\mu} = C'.$$

Die Höhe a' wird durch $c\,\mu$ auf das Lot d aus A auf $g(B\,C)^{c\mu} = g(B'\,C')$ abgebildet. Nach dem Lotesatz ist $b\,h = d\,c$, also

$$h^c\,b^c = b\,h = a'^{c\mu}\,b^{c\mu} = a'^c\,b^c,$$

und daher

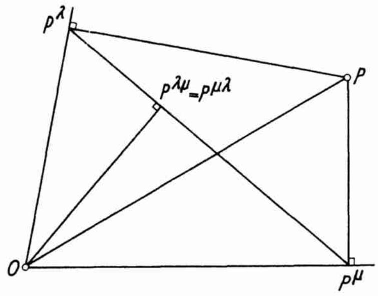
$$h^c = a'^c\,,\quad h = a'\,,$$

was zu beweisen war.

Auch der klassische Beweis durch Zurückführung auf den Satz vom Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist hier möglich ([3]).

Satz 6.3. *Je zwei Halbdrehungen mit gleichem Zentrum O sind vertauschbar.*

Das folgt unmittelbar aus dem Lotesatz (Fig. 12).



Figur 12

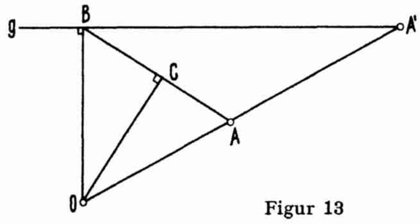
§7. Einführung von Koordinaten

Um Koordinaten einzuführen, gibt es verschiedene Wege. Man kann die Hilbertsche Streckenrechnung ([4]) verwenden, wozu wesentlich geeignete Sonderfälle des Satzes von PAPPOS-PASCAL benötigt werden, die sich zum Beispiel mit Hilfe der Sätze 6.1 oder 6.2 beweisen lassen (vergleiche [4], Seite 55; [5], Seite 201; [2], Seite 205).

Eine andere Möglichkeit wurde, wie bereits erwähnt, von ARTIN angegeben. Sie führt zur analytischen Geometrie über einem Körper, wenn der Satz von DESARGUES in affiner Form zur Verfügung steht. Wir beweisen folgende Form des Desarguesschen Satzes.

Satz 7.1. *Es seien O, A, A' verschiedene Punkte einer Geraden. Dann gibt es genau eine zentrale Kollineation mit dem Zentrum O und der uneigentlichen Geraden als Achse, die A nach A' bringt.*

$$A'^\lambda = B,\ B^\mu = C,\ A^\nu = C\,.$$



Figur 13

Beweis (Fig. 13) (vergleiche [3]). Es sei $g \neq g(O\,A)$ eine Gerade durch A', B der Fusspunkt des Lotes aus O auf g und C der Fusspunkt des Lotes aus O auf $g(A\,B)$. Es gibt Halbdrehungen λ, μ, ν mit den Eigenschaften
Das Halbdrehungsprodukt $\nu\,\mu^{-1}\,\lambda^{-1}$ ist die gesuchte zentrale Kollineation. Diese Kollineationen heissen auch *Dehnungen.*

Die Artinsche Schlussweise ([1], [5], Seite 152) liefert nun

Satz 7.2. *Die Ebene ist einer affinen Koordinatenebene über einem Körper K isomorph.*

Aus Satz 6.3 folgt, dass je zwei Dehnungen mit gleichem Zentrum O vertauschbar sind. Das ist gleichbedeutend mit

Satz 7.3. *Der Koordinatenkörper K ist kommutativ.*

Die Punktspiegelungen sind spezielle Dehnungen, also Homologien im Sinne der projektiven Geometrie. Weil involutorische Homologien nur existieren, wenn das Fano-Axiom gilt, folgt

Satz 7.4. *Die Charakteristik des Koordinatenkörpers ist nicht 2.*

In weniger gelehrter Ausdrucksweise heisst das $1 + 1 \neq 0$.[1])

Aus Satz 7.3 folgt natürlich wieder der Satz von PAPPOS.

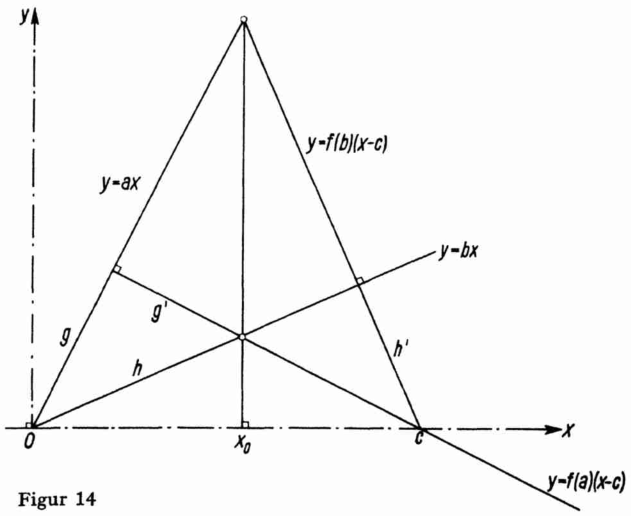
Es fehlt noch die algebraische Beschreibung der Orthogonalität. Auch diese ist jetzt leicht. Am bequemsten erhält man sie nach einem Ansatz von R. BAER mit Hilfe des Höhensatzes (vergleiche [3]). Die Koordinatenachsen seien zueinander senkrecht gewählt (Fig. 14). Die Lote zu den Geraden

$$\{(x, y):\ y = a\,x + b\} \quad (a \neq 0)$$

sind die Geraden

$$\{(x, y):\ y = f(a)\,x + b'\} \quad \text{mit} \quad f(a) \neq 0\,.$$

Gesucht ist die Funktion f.



Figur 14

1) Noch einfacher ergibt sich Satz 7.4 daraus, dass Translationen $A\,M = 1$ (vgl. den Beweis des Satzes 5.6) nicht involutorisch sind. Aus $(A\,M)^2 = 1$ würde ja $A^M = A$, also $M = A$ folgen.

Wir fällen aus dem Punkt C mit den Koordinaten $(c, 0)$ die Lote g', h' auf die Geraden g, h mit den Gleichungen $y = a\,x$ beziehungsweise $y = b\,x$. Die Gleichungen dieser Lote sind

$$y = f(a)\,(x - c) \quad \text{beziehungsweise} \quad y = f(b)\,(x - c)\,.$$

Aus dem Höhensatz folgt, dass die Schnittpunkte $g \cap h'$ und $h \cap g'$ dieselbe Abszisse haben. Für diese Abszisse x_0 ergibt sich einerseits

$$a\,x_0 = f(b)\,(x_0 - c)\,,$$

andererseits

$$b\,x_0 = f(a)\,(x_0 - c)\,, \quad \text{also}$$

$$b\,f(b)\,(x_0 - c) = a\,f(a)\,(x_0 - c)\,.$$

Für $a, b \neq 0$ ist wegen der Eindeutigkeit des Lotefällens sicher $x_0 \neq c$, also

$$b\,f(b) = a\,f(a)\,.$$

Fassen wir a als fest und b als variabel auf, so können wir $a\,f(a) = -\,k$ setzen, und haben

$$f(b) = \frac{-k}{b}\,.$$

Weil keine Gerade auf sich selbst senkrecht steht, darf $-\,k$ kein Quadrat (im Körper K) sein.

Zwei Vektoren (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sind daher senkrecht, wenn $(y_1\,x_1^{-1})\,(y_2\,x_2^{-1}) = -\,k$, das heisst wenn

$$k\,x_1\,x_2 + y_1\,y_2 = 0$$

ist. Das gilt auch noch für achsenparallele Vektoren. Im Fall $k = 1$ ist die linke Seite dieser Gleichung das gewöhnliche Skalarprodukt. Dieser Fall lässt sich jedoch nur dann durch geeignete Wahl des Koordinatensystems erreichen, wenn zwei senkrechte und ineinander bewegliche Geraden existieren.

Damit ist der Anschluss an die übliche analytische Geometrie erreicht.

HANFRIED LENZ, München

LITERATUR

[1] E. ARTIN, *Geometric Algebra*, New York 1957.
[2] F. BACHMANN, *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1959.
[3] J. DILLER, *Algebraisierung euklidischer Ebenen*, Der Mathematikunterricht 1964, S. 83–107, Ernst Klett Verlag, Stuttgart.
[4] D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, 9. Aufl., Stuttgart 1962.
[5] H. LENZ, Grundlagen der Elementarmathematik, Berlin 1961.
[6] H. LENZ, *Zur Axiomatik der absoluten Geometrie der Ebene*, Arch. Math. *12*, 370–373 (1961).
[7] R. LINGENBERG, *Über Gruppen mit einem invarianten System involutorischer Erzeugender, in dem der allgemeine Satz von den drei Spiegelungen gilt*, I, II, III, IV, Math. Ann. *137* und folgende Bände.