b) $G = NM$. Denn: $NM = MN$ ist Untergruppe von G, da N normal. M ist in NM enthalten. Wäre $M = NM$, so gäbe es zu beliebigem n aus N ein m, m' aus M mit $m' = n\,m$, also $n = m'\,m^{-1}$ aus M, was unter a) ausgeschlossen war. M ist also echt in NM enthalten. Aus der Maximalität von M folgt $NM = G$.

c) R und Q seien beliebig vorgegebene Ziffern der Permutationsgruppe. Aus der Transitivität von G folgt: Es existiert ein g aus G mit $R^g = P$; $g = n\,m$ nach b); $R^{nm} = P$, $R^n = P^{m^{-1}} = P$, da m aus der Standuntergruppe. Analog existiert ein n' aus N mit $Q^{n'} = P$. Dann gilt $R^{n n'^{-1}} = P^{n'^{-1}} = Q$. $n\,n'^{-1}$ ist aus N. Daraus folgt: N ist transitiv.

Aufgabe 512. Es seien n, k, m, r, s natürliche Zahlen, $d(n)$ die Anzahl aller Teiler von n, und man setze

$$D_s^{(r)} = \sum_{k \mid n^s} \{d(k)\}^r, \quad d_s = d(n^s)\,.$$

Dann gilt

$$D_{2m}^{(1)} = d_m\, d_{2m}, \quad D_{6m}^{(2)} = d_{3m}\, d_{4m}\, d_{6m}, \quad D_{2m}^{(3)} = d_m^2\, d_{2m}^2\,.$$

E. TROST, Zürich

Solution: Since the various functions are factorable it suffices to take $n = p^t$, where p is a prime and $t \geq 1$. Then we have

$$D_{2m}^{(1)} = \sum_{a\,b\,c = p^{2mt}} 1 = (2\,m\,t + 1)\,(m\,t + 1) = d_{2m}\, d_m\,,$$

$$D_{6m}^{(2)} = \sum_{k \mid p^{6mt}} (d(k))^2 = \sum_{j=0}^{6mt} (j + 1)^2 = \frac{1}{6}\,(6\,m\,t + 1)\,(6\,m\,t + 2)\,(12\,m\,t + 3)$$

$$= (6\,m\,t + 1)\,(3\,m\,t + 1)\,(4\,m\,t + 1) = d_{6m}\, d_{3m}\, d_{4m}\,,$$

$$D_{2m}^{(3)} = \sum_{k \mid p^{2mt}} (d(k))^3 = \sum_{j=0}^{2mt} (j + 1)^3 = \frac{1}{4}\,(2\,m\,t + 1)^2\,(2\,m\,t + 2)^2$$

$$= (2\,m\,t + 1)^2\,(m\,t + 1)^2 = d_{2m}^2\, d_m^2\,.$$

L. CARLITZ, Duke University, Durham, N.C., USA

Eine weitere Lösung sandte H. MEILI (Winterthur).

Neue Aufgaben

Aufgabe 533. Mit A, B, C seien Kreise oder Geraden und auch die Inversion (bzw. Spiegelung) an denselben bezeichnet. Welche geometrische Bedingung erfüllen drei Kreise, wenn in der Möbiusgruppe der Kreistransformationen

$$ABCABCBCABCACBACBCBACB = 1$$

gilt? H. GUGGENHEIMER, Minneapolis, USA

Aufgabe 534. Let P be an interior point of a triangle ABC. Let x, y, z denote the distances from P to the vertices of ABC and let p, q, r denote the perpendiculars from P to the sides of ABC. Let α, β, γ denote the angles of ABC. Show that

$$x \sin(\alpha/2) + y \sin(\beta/2) + z \sin(\gamma/2) \geqq p + q + r\,,$$

with equality only if P is the incenter of ABC. L. CARLITZ, Durham, N.C., USA

Aufgabe 535. Démontrer le théorème de Fermat d'après lequel, pour p premier, les diviseurs premiers $\neq 3$ du nombre $2^p + 1$ sont de la forme $2\,k\,p + 1$, où k est un nombre naturel. W. SIERPIŃSKI, Varsovie