auf dem verallgemeinerten Transversalensatz von Euler-Gergonne und auf $a + b + c = 2s$, nämlich auf $H_a^{-1} + H_b^{-1} + H_c^{-1} = \varrho^{-1}$ (Höhen H_ν). Wie beim verallgemeinerten Satz von Euler-Gergonne darf der Kreismittelpunkt überall in der Ebene liegen, also auch auf dem Rande und ausserhalb des Dreiecks. Dem und der beliebigen Grösse von r wird durch $a', b', c', A', B', C' \gtreqless 0$ Rechnung getragen. I. PAASCHE, München

LITERATUR

[1] E. ROTHMUND, El. Math. *4*, 90 (1949), Aufgabe 43.
[2] I. PAASCHE, El. Math. *20*, 11 (1965), Bild 7 und S. 12 Ende.

Aufgaben

Aufgabe 508. Es bedeute $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ das kleinste gemeinsame Vielfache der natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. $p_1 < p_2 < \ldots$ sei eine unendliche Teilfolge P' der Folge P aller Primzahlen. $a_1 < a_2 < \ldots$ sei die Folge aller natürlichen Zahlen, in deren Primzahlzerlegung nur Primzahlen aus P' vorkommen. Man beweise, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}}$$

immer irrational ist. Für $P' = P$ ist das die Aufgabe 308 [El. Math. *14*, 39 (1959)].

P. ERDÖS

Lösung des Aufgabenstellers: Es sei $p_k = a_{f(k)}$ und $A_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Die Unmöglichkeit von $\sum 1/A_n = u/v$ folgt sofort aus

$$\liminf_{k=\infty} A_{f(k)-1} \sum_{j=f(k)}^{\infty} 1/A_j = 0. \tag{1}$$

Um (1) zu zeigen, setzen wir

$$A_{f(k)-1} \sum_{j=f(k)}^{\infty} 1/A_j = \sum_{u=1}^{\infty} \alpha_u, \tag{2}$$

wo

$$\alpha_u = A_{f(k)-1} \sum\nolimits_u 1/A_j. \tag{3}$$

In $\sum_u$ läuft a_j über diejenigen Elemente unserer Folge, für welche $p_k^u \leqq a_j < p_k^{u+1}$ gilt. Zunächst zeigen wir, dass für jedes $\varepsilon > 0$ und $k > k_0(\varepsilon)$

$$\alpha_3 + \alpha_4 + \cdots < \varepsilon. \tag{4}$$

Da der Beitrag jeder Primzahl p_i $(i < k)$ zu $A_{f(k)-1}$ kleiner als p_k ist, hat man

$$A_{f(k)-1} < p_k^{k-1}. \tag{5}$$

Nun ist die Anzahl der Summanden A_j^{-1} in α_u offenbar kleiner als p_k^{u+1}, und man erhält mit (5) also

$$\alpha_u < p_k^{k+u} \{a_1, a_2, \ldots, p_k^u\}^{-1}. \tag{6}$$

Ist $a_j \geqq p_k^u$, dann gilt

$$A_j \geqq \{a_1, a_2, \ldots, p_k^u\} > p_k^{(u-1)k}, \tag{7}$$

da jedes p_i einen Beitrag liefert, der grösser als p_k^{u-1} ist. Aus (6) und (7) ergibt sich $\alpha_u < p_k^{k+u-(u-1)k}$ und damit (4) für $k > k_0(\varepsilon)$.

Wegen (4) genügt für den Beweis von (1) der Nachweis von

$$\liminf_{k=\infty} (\alpha_1 + \alpha_2) = 0. \tag{8}$$

Hierzu muss ich zwei Fälle unterscheiden. Zunächst nehmen wir an, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ beliebig grosse k mit

$$p_{k+3} < (1+\varepsilon)\, p_k \tag{9}$$

gibt. Für diese k gilt dann

$$\alpha_1 + \alpha_2 = A_{f(k)-1}\left(\sum\nolimits_1 1/A_j + \sum\nolimits_2 1/A_j\right), \tag{10}$$

wo in Σ_1 über $p_k \leqq a_j < p_{k+3}$ und in Σ_2 über $p_{k+3} \leqq a_j \leqq p_k^3$ summiert wird. Wegen (9) hat Σ_1 höchstens $\varepsilon\, p_k$ Summanden, und wegen $A_j \geqq A_{f(k)} = p_k A_{f(k)-1}$ folgt

$$A_{f(k)-1} \sum\nolimits_1 < \varepsilon. \tag{11}$$

Für $a_j \geqq p_{k+3}$ gilt

$$A_j \geqq A_{f(k)-1}\, p_k\, p_{k+1}\, p_{k+2}\, p_{k+3} > A_{f(k)-1}\, p_k^4,$$

also ist

$$A_{f(k)-1} \sum\nolimits_2 < p_k^3\, p_k^{-4} = 1/p_k < \varepsilon. \tag{12}$$

(8) folgt aus (10), (11) und (12).

Im zweiten Fall nehmen wir an, dass für alle genügend grossen Werte von l gilt

$$p_{l+3} \geqq (1+\varepsilon)\, p_l. \tag{13}$$

Aus (13) wollen wir

$$\lim_{k=\infty} (\alpha_1 + \alpha_2) = 0 \tag{14}$$

herleiten. $U(x)$ sei die Anzahl der $a_i \leqq x$. Wir zeigen zunächst

$$U(x) = O(x^{\varepsilon}). \tag{15}$$

Aus (13) folgt sofort, dass $\Sigma\, 1/p_k^{\varepsilon} < \infty$ für jedes $\varepsilon > 0$ gilt. Daraus ergibt sich (15), weil jetzt

$$a_k^{-\varepsilon}\, U(a_k) < \sum 1/a_k^{\varepsilon} = \prod (1 + p_k^{-\varepsilon} + p_k^{-2\varepsilon} + \cdots) < \infty.$$

Man hat $A_j \geqq p_k A_{f(k)-1}$ für $j \geqq f(k)$, und für $a_j \leqq p_k^3$ gibt es in (14) höchstens $U(p_k^3)$ Summanden, somit ist

$$\alpha_1 + \alpha_2 \leqq U(p_k^3)/p_k. \tag{16}$$

Aus (15) folgt natürlich $U(p_k^3) = o(p_k)$, und damit ergibt (16) die Richtigkeit von (14).

Aufgabe 509. Auf einer Geraden g liegen drei Punkte A, B, C derart, dass A ausserhalb der Strecke BC liegt und die Strecke AB kleiner als die Strecke AC ist. A sei Doppelpunkt, B und C seien Scheitel einer verschlungenen Pascalschnecke c (c = rationale Quartik mit Spitzen in den absoluten Kreispunkten).

Man ermittle eine gestreckte Pascalschnecke c^*, die den gleichen Umfang besitzt wie c.

R. Bereis, Dresden[1])

Lösung des Aufgabenstellers: Spiegelt man einen der beiden Scheitel von c, etwa B, an A nach B^*, so genügt jene (gestreckte) Pascalschnecke, deren symmetrische Scheitel B^* und $C^* = C$ sind und deren isolierter Punkt in $A^* = A$ liegt, der gestellten Forderung.

1. Beweis: Ist H die Mitte der Strecke AB, gilt also

$$\overline{OH} = \frac{1}{2}\,(\overline{AB} + \overline{AC}) =: a \quad \text{und sei} \quad \frac{1}{2}\,(\overline{AC} - \overline{AB}) =: b\ (b < a),$$

so lautet die Polargleichung von c

$$r = a\cos\varphi + b. \tag{1}$$

Der Umfang von c ergibt sich nach (1) mit

$$u = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2 \pm 2\,a\,b\cos\varphi}\, d\varphi. \tag{2}$$

---

[1]) Die Redaktion hat die traurige Mitteilung erhalten, dass Prof. Dr. R. Bereis, dem die Elemente viele wertvolle Beiträge verdanken, am 6. 6. 66 verstorben ist.

Aus (2) ist ersichtlich, dass sich der Umfang von c nicht ändert, wenn die Bedeutungen von a und b vertauscht werden. In diesem Fall entsteht aber eine gestreckte Pascalschnecke c^* mit dem isolierten Punkt $A^* = A$ und den symmetrischen Scheiteln $B^* =$ Spiegelpunkt von B an A und $C^* = C$.

2. *Beweis:* Man fasst die gegebene verschlungene Pascalschnecke c als Rastpolkurve eines Gelenkdeltoides auf, dessen Steg kleiner sei als die Koppel. Die Gangpolkurve c^* muss den gleichen Umfang wie c haben, da c^*, ohne zu gleiten, auf c abrollt und nach einmaliger Umdrehung die Ausgangsstellung erreicht.

Nun gilt aber für diese speziellen Gang- und Rastpolkurven c^* und c bekanntlich die Relation $\overline{AB} = \overline{A^*B^*}$ und $\overline{AC} = \overline{A^*C^*}$, nur dass der isolierte Punkt A^* von c^* jetzt innerhalb der Strecke B^*C^* liegt.

Bemerkung: Sind die Abmessungen des Gelenkdeltoides gegeben durch m, n $(m < n)$, so gilt:

$$\overline{AB} = \frac{2\,m\,n}{n-m} = -\overline{A^*B^*}, \qquad \overline{AC} = \frac{2\,m\,n}{n+m} = \overline{A^*C^*}.$$

Aufgabe 510. Es ist zu beweisen, dass in einem Parallelepipedgitter alle vierseitigen konvexen Pyramiden mit Gitterpunktecken, die keine weiteren Gitterpunkte weder im Innern noch auf der Oberfläche enthalten, denselben Inhalt haben. Ist die Forderung der Konvexität notwendig? János Surányi, Budapest

Lösung des Aufgabenstellers: Wir wollen ein Polyeder oder Polygon mit Gitterpunkten als Ecken leer nennen, wenn weder im Innern noch auf dem Rande weitere Gitterpunkte liegen. Die in der Aufgabe auftretende leere Pyramide sei $SABCD$. Die Grundfläche $ABCD$ ist ein Parallelogramm; denn die in ihrer Ebene Σ liegenden Gitterpunkte bilden ein Parallelogrammgitter, und in diesem sind die leeren konvexen Vierecke Parallelogramme. Alle weiteren Gitterpunkte liegen in Parallelebenen zu Σ, die in gleichem Abstand aufeinander folgen, und die in ihnen liegenden Gitter können durch Parallelverschiebung ineinander übergeführt werden. Die Pyramide $SABCD$ werde zum Parallelepiped $ABCDSTUV = \Pi$ ergänzt. Es genügt zu zeigen, dass Π leer ist, da alle leeren Parallelepipeda denselben Inhalt haben. Σ' sei die erste zu Σ parallele und die Pyramide schneidende Gitterebene. Σ' schneidet Π in einem zu $ABCD$ kongruenten Parallelogramm und enthält also wenigstens einen zu Π gehörenden Gitterpunkt P. Die Gerade CP schneidet jede zu Σ parallele Gitterebene in einem Gitterpunkt, da die Gitterpunkte auf ihr gleiche Abstände haben. Ist Σ' von der durch S gehenden Parallelebene Σ_1 verschieden, so liegt P in dem ausserhalb der Pyramide liegenden, L-förmigen Teil $\mathfrak{B}$ des Schnittes von Π mit Σ'. Projiziert man $\mathfrak{B}$ von C aus auf Σ_1, so wird diese Projektion von den beiden Streifen zwischen den Geraden ST und UV bzw. SV und TU überdeckt, und diese Streifen enthalten Gitterpunkte nur auf den Rändern, und zwar in den Abständen $\overline{ST}$ bzw. $\overline{SV}$. Betrachtet man die Projektion P_1 von P, so folgt, dass P nur auf der Strecke CU oder auf einem der Dreiecke BCT, CDV liegen kann. Dann gäbe es aber auf dem Durchschnitt von Σ' mit den Dreiecken ADS und ABS einen Gitterpunkt, und die Pyramide wäre nicht leer. (Einen ähnlichen Beweis gab auch Prof. G. Hajós.)

Nun sei $ABCD$ ein nicht konvexes leeres ebenes Viereck in einem Parallelepipedgitter. C sei die einspringende Ecke und D_1 das Spiegelbild von D in bezug auf den Mittelpunkt der Strecke AC. BD_1 ist dann die nächste zu AC parallele, durch Gitterpunkte gehende Gerade. $\overline{D_1B}/\overline{AC}$ ist eine ganze Zahl $k \geqq 2$. Wählt man nun eine Gittergerade durch D_1 ausserhalb der Ebene $ABCD$ und auf ihr einen Gitterpunkt S so, dass die Anzahl der Strecken, in die D_1S durch die Gitterpunkte geteilt wird, zu k teilerfremd ist, so ist $SABCD$ eine leere Pyramide, deren Volumen von der Wahl von S abhängt.

Aufgabe 511. Ist G eine primitive Permutationsgruppe und ist N ein nicht trivialer Normalteiler von G, so ist N transitiv. (Beim Beweis benutze man, dass die Standuntergruppe einer Ziffer in G maximal ist.) R.-H. Schulz, Mainz

Lösung des Aufgabenstellers:

a) N ist nicht in der Standuntergruppe M enthalten; andernfalls wäre $P^{g n g^{-1}} = P^{n'} = P$ (mit g aus G beliebig, n und n' aus N und der Standuntergruppe M auf P) und damit $(P^g)^n = P^g$, was nicht möglich ist. (Eine primitive Permutationsgruppe ist ja transitiv.)